

## 21. BISETTRICE DI UN ANGOLO

La bisettrice di un angolo è definita come

**quella semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due parti uguali.**

Ma in Geometria si dimostra che la bisettrice risulta essere pure **il luogo dei punti, appartenenti all'angolo, che hanno la proprietà di essere equidistanti dai due lati dell'angolo.**

ESEMPIO. Dati i tre punti:  $A(1,2)$ ;  $B(3,4)$ ;  $C(2,9)$ , scrivere l'equazione della bisettrice dell'angolo  $\widehat{BAC}$ .

Scriveremo l'equazione della bisettrice richiesta traducendo in coordinate la proprietà caratteristica  $PH = PK$ , essendo  $P(x, y)$  il generico punto del piano cartesiano,  $H$  e  $K$  le sue proiezioni sui due lati dell'angolo considerato.

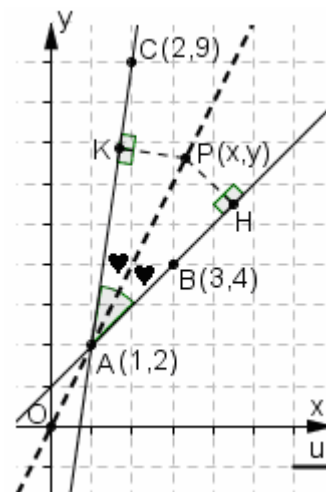
Per esprimere in coordinate le due distanze  $PH$  e  $PK$  (ciascuna delle quali è la distanza di un punto da una retta), abbiamo bisogno innanzitutto delle equazioni delle due rette  $AB$ ,  $AC$ .

eq. retta  $AB$ :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{x - 1}{3 - 1}; \quad \dots; \quad y = x + 1 \quad \text{oppure} \quad \boxed{x - y + 1 = 0}$$

eq. retta  $AC$ :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{y - 2}{9 - 2} = \frac{x - 1}{2 - 1}; \quad \dots; \quad y = 7x - 5 \quad \text{oppure} \quad \boxed{7x - y - 5 = 0}$$



Ora impostiamo l'uguaglianza  $PH = PK$ , cioè  $d(P, AB) = d(P, AC)$  dove  $P$  è il generico punto  $P(x, y)$ .

Sappiamo che per calcolare la distanza di un punto da una retta dobbiamo applicare la formula

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{ossia dobbiamo:}$$

- considerare l'equazione della retta in forma IMPLICITA:  $ax + by + c = 0$
- prenderne soltanto il primo membro  $ax + by + c$
- sostituire al posto di  $x, y$  le due coordinate del punto in questione
- racchiudere quanto ottenuto entro le stanghette di valore assoluto
- dividere per la quantità  $\sqrt{a^2 + b^2}$

Equazione bisettrice:  $PH = PK$  ovvero  $d(P, AB) = d(P, AC)$

$$\frac{|x - y + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|7x - y - 5|}{\sqrt{49 + 1}} \quad \text{perché nel nostro caso il punto è } P(x, y) \text{ e quindi}$$

si tratta di ... sostituire  $x$  al posto di  $x$  e  $y$  al posto di  $y$ !

$$\frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x - y - 5|}{5\sqrt{2}} \quad 5|x - y + 1| = |7x - y - 5|$$

$$5x - 5y + 5 = \pm(7x - y - 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x - 5y + 5 = 7x - y - 5; \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}} \\ 5x - 5y + 5 = -7x + y + 5; \quad \boxed{y = 2x} \end{array} \right.$$

Che è successo?

Il luogo da noi considerato era una SEMIRETTA, ma qui abbiamo ottenuto le equazioni di DUE RETTE!

Il fatto è che impostando l'uguaglianza  $d(P, AB) = d(P, AC)$  e traducendola in coordinate, noi abbiamo scritto, appunto,

l'equazione del luogo dei punti la cui distanza dalla retta  $r_1 = AB$  è uguale alla distanza dalla retta  $r_2 = AC$ ; e tale luogo è costituito dalle SEMIRETTE BISETTRICI DI BEN 4 ANGOLI (a 2 a 2 opposti al vertice),

o, se si preferisce, dalle due rette una delle quali fa da bisettrice per l'angolo  $\widehat{BAC}$  e per il suo opposto al vertice, l'altra fa da bisettrice per la coppia di angoli opposti al vertice che sono adiacenti a  $\widehat{BAC}$ .

Ora, fra le due rette trovate, una delle due andrà scartata.

E' evidente che la retta che va bene per noi è quella "in salita" ovvero con coeff. angolare  $> 0$ : la  $\boxed{y = 2x}$ .

**ESERCIZIO** Trovare le coordinate dell'incentro del triangolo formato dalle tre rette

$$y = \frac{1}{4}x + 3; \quad y = -4x + 3; \quad 5x - 3y - 8 = 0 \quad [\text{Soluzione: } I\left(\frac{5}{2}(2 - \sqrt{2}), \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)]$$

Altri esercizi a pag. 49