24. LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

Cosa si intende per "parabola"?

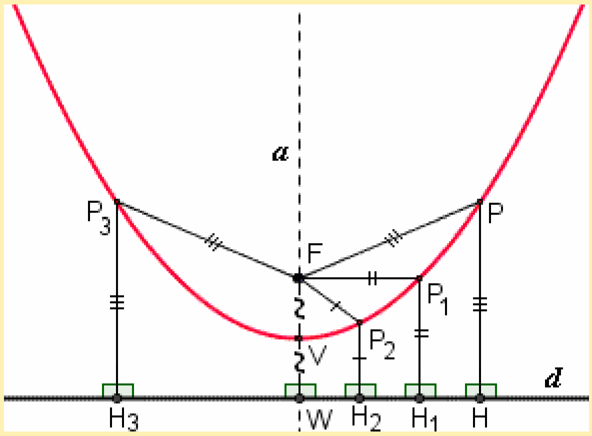
La definizione di "parabola" può essere posta in più modi, assai diversi l'uno dall'altro, che si dimostrano esser fra loro equivalenti. Noi sceglieremo, come la maggior parte dei libri di testo, la definizione seguente.

DEFINIZIONE DI PARABOLA

Si dice "parabola" il luogo dei punti del piano, aventi la proprietà di essere equidistanti da un punto fisso F detto "fuoco" e da una retta fissa *d* detta "direttrice".

*Una parabola ha evidentemente (NOTA) un asse di simmetria (la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco, tratteggiata e indicata con **a** nella figura).*

*Il punto medio **V** del segmento di perpendicolare FW condotto dal fuoco alla direttrice appartiene alla parabola e ne è detto il "vertice".*



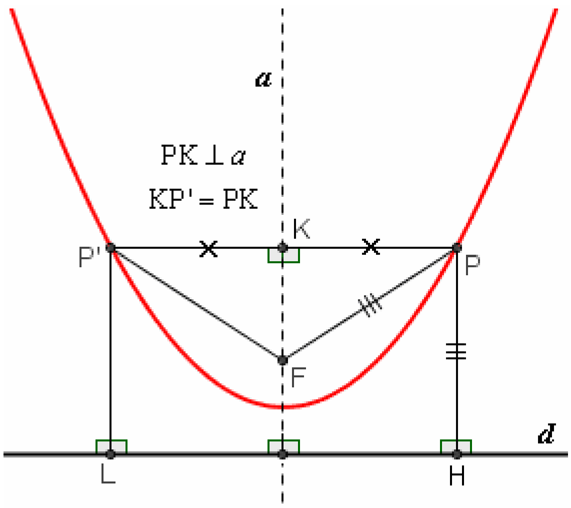
La parabola fa parte, con l'ellisse e con l'iperbole, di una famiglia di importantissime curve chiamate CONICHE.

NOTA

Che la perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco sia asse di simmetria per la curva precedentemente definita, è del tutto intuitivo: tuttavia, è anche facilmente dimostrabile coi ben noti teoremi della Geometria euclidea.

Facciamo vedere che se un punto P appartiene alla curva, allora vi apparterrà senz'altro anche il simmetrico di P rispetto alla retta *a*.

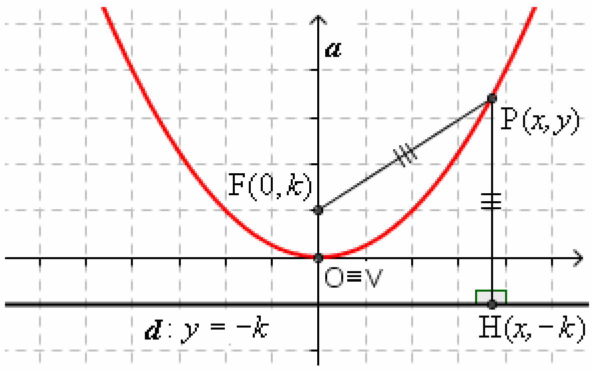
Infatti, con riferimento alla figura:
sia P un punto appartenente alla parabola;
sia P' il simmetrico di P rispetto alla retta *a*;
indichiamo con L la proiezione di P' su *d*.
E' immediato osservare che i due triangoli PKF, P'KF sono uguali per il 1° Criterio e dedurne che $P'F = PF$;
è poi $P'L = PH$ in quanto distanze di due rette parallele.
essendo allora $PF = PH$, perché P appartiene alla parabola, sarà pure $P'F = P'L$, quindi anche P' apparterrà alla parabola, come volevasi dimostrare.



LA PARABOLA NEL PIANO CARTESIANO

Supponiamo dapprima, per semplicità, che l'asse della parabola coincida con l'asse *y*, e il vertice con l'origine.
Il fuoco F avrà allora coordinate $(0,\ k)$ e la direttrice avrà equazione $y = -k$.
La costante *k* potrà essere positiva o negativa; nella figura, l'abbiamo supposta positiva.

$$\mathrm{P}(x,y)$$
$$\textit{fuoco}\ \mathrm{F}(0,k)$$
$$\textit{direttrice}\ d: y=-k$$
$$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}\ \ (\mathrm{PH}=\textit{dist.}(\mathrm{P},d))$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-k)^2}=|y+k|$$
$$x^2+\cancel{y^2}-2ky+\cancel{k^2}=\cancel{y^2}+2ky+\cancel{k^2}$$
$$x^2-4ky=0$$
$$\boxed{y=\frac{1}{4k}x^2 \quad \textit{ossia} \quad y=ax^2, \ \textit{se poniamo} \ \ a=\frac{1}{4k}}.$$



Fin qui, abbiamo dimostrato che

l’equazione della parabola di fuoco $\mathrm{F}(0,k)$ e direttrice $d: y=-k$

è $y=ax^2$, con $a=\dfrac{1}{4k}$ (e dunque, inversamente, $k=\dfrac{1}{4a}$).

Viceversa,

fissata ad arbitrio una costante non nulla a, l’equazione $y=ax^2$ rappresenterà *sempre* una parabola: infatti, se si prova a scrivere l’equazione della parabola di fuoco $\mathrm{F}\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ e direttrice $d: y=-\dfrac{1}{4a}$,

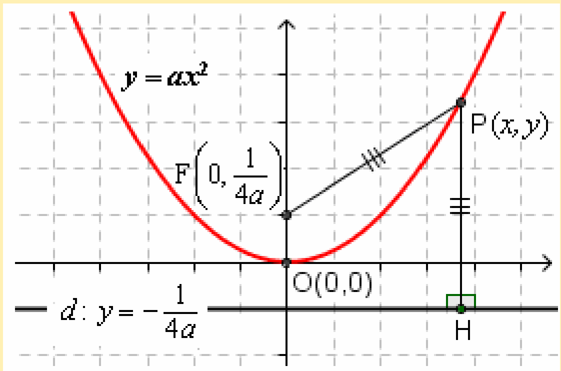
si trova proprio $y=ax^2$.

L’essenziale del discorso può essere riassunto nel quadro seguente.

L’equazione $y=ax^2$ rappresenta una parabola con

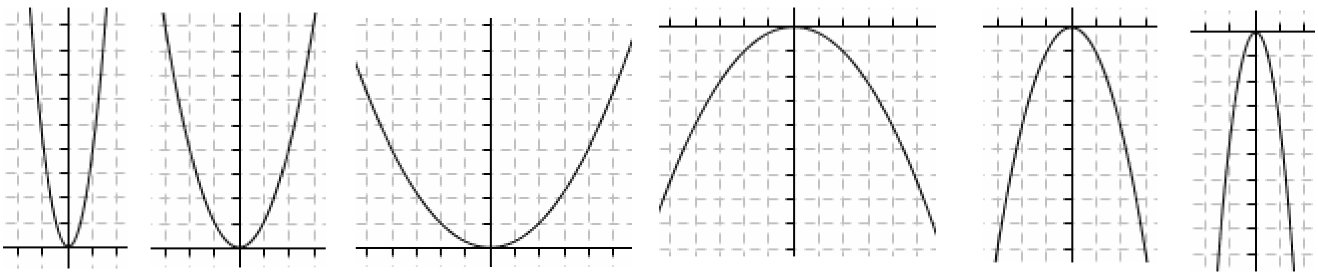
- **vertice nell’origine,**
- **asse coincidente con l’asse *y*,**
- **fuoco $\mathrm{F}(0,k)$ con $k=\dfrac{1}{4a}$**
- **e direttrice $d:\ y=-\dfrac{1}{4a}$.**

La quantità $\dfrac{1}{4a}$ fornisce la distanza *orientata* vertice-fuoco
(se è positiva, il fuoco sta sopra il vertice, se negativa sotto).



Se ora andiamo a disegnare la funzione $y=ax^2$ per diversi valori di a,

$a=4$ $\quad a=1$ $\quad a=1/4$ $\quad a=-1/4$ $\quad a=-1$ $\quad a=-4$



potremo osservare che

- **con $a>0$, la parabola ha la concavità rivolta verso l’alto $\cup$;**
- **con $a<0$, la parabola ha concavità rivolta verso il basso $\cap$.**

Ciò è perfettamente coerente col fatto che k, ordinata del fuoco,
essendo uguale a $1/(4a)$, ha lo stesso segno di a: poiché ora la parabola “gira intorno al fuoco”,

- ♪ con $a>0$, $k>0$ la concavità sarà verso l’alto $\cup$,
- ♫ con $a<0$, $k<0$ la concavità sarà verso il basso $\cap$.

Il numero *a* viene spesso chiamato “il parametro” della parabola.

E’ davvero fondamentale ricordare che la quantità $\dfrac{1}{4a}$ fornisce la distanza orientata vertice-fuoco.

Inoltre:

- quanto più $|a|$ è grande,
  tanto più la parabola è rapida nel suo impennarsi (verso l’alto o verso il basso),
- mentre se $|a|$ è piccolo
  avremo, invece, una parabola che si impenna lentamente e ha una curvatura più “dolce”.

Per questo, la costante $|a|$ è detta “apertura” della parabola.

EQUAZIONE DI UNA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE *y*, E VERTICE $V(x_0, y_0)$

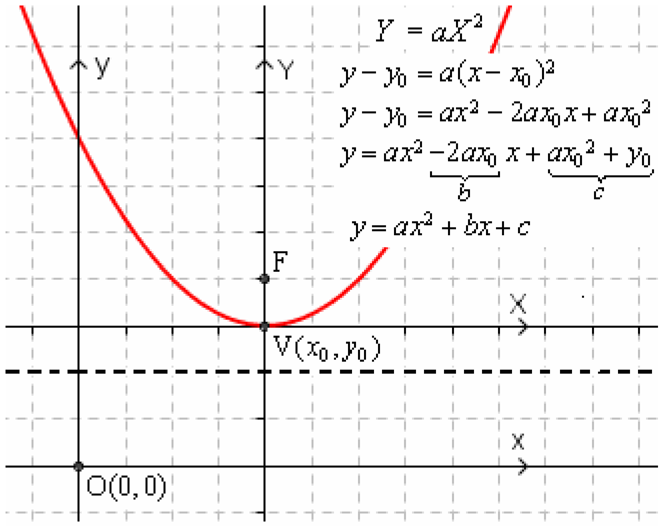
E' giunto il momento di abbandonare l'ipotesi che il vertice della nostra parabola coincida con l'origine: vogliamo infatti porci in condizioni *più generali*.

Il vertice della parabola potrà ora stare in una posizione qualsiasi: indichiamolo con $V(x_0, y_0)$.

Continueremo però ancora a supporre che l'asse della parabola sia parallelo all'asse *y* (e quindi la direttrice, che è perpendicolare all'asse, sia parallela all'asse *x*).

Possiamo ricavare l'equazione della nostra parabola ponendoci inizialmente in un riferimento cartesiano ausiliario, nel quale il vertice della parabola coincida con l'origine, per poi ritornare al riferimento cartesiano iniziale.

Passiamo dunque al nuovo riferimento cartesiano *XVY*, avente l'origine in V, e *traslato* rispetto al sistema di riferimento originario *xOy*.



Nel riferimento *XVY*, la parabola avrà equazione della forma $Y = aX^2$,

dove $a = \frac{1}{4k}$, $k = \frac{1}{4a}$, essendo *k* l'ordinata del fuoco nel *nuovo* riferimento

(*k* è la misura con segno del segmento orientato vertice-fuoco VF).

Ma le equazioni del cambiamento di riferimento sono

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

per cui, ritornando al "vecchio" riferimento *xOy*, l'equazione

$$Y = aX^2$$

diventerà

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

Pertanto

EQUAZIONE DI UNA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE *y* NOTO IL VERTICE

$y - y_0 = a(x - x_0)^2$ è l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y* e vertice (x_0, y_0)

Il segmento orientato vertice-fuoco (VF) ha misura relativa $\frac{1}{4a}$

Se sviluppiamo i calcoli, otterremo

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$
$$y - y_0 = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2$$
$$y = ax^2 \underbrace{-2ax_0}_{b} x + \underbrace{ax_0^2 + y_0}_{c}$$
$$y = ax^2 + bx + c$$

Abbiamo così scoperto che

EQUAZIONE GENERALE DI UNA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE *y*

Una parabola con asse parallelo all'asse *y* ha equazione della forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

dove la quantità $\frac{1}{4a}$ fornisce la misura relativa del segmento orientato vertice-fuoco VF

Occupiamoci ora del **viceversa:** **data un'equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$,**
dove *a, b, c* sono tre costanti reali $(a \neq 0)$,
siamo sicuri che essa rappresenti sempre una parabola?

Per rispondere, andiamo a vedere se è sempre possibile passare dalla forma $y = ax^2 + bx + c$
alla forma $y - y_0 = a(x - x_0)^2$, che individuerebbe la parabola con asse parallelo all'asse *y* e vertice (x_0, y_0) .

$$y = ax^2 + bx + c; \quad y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right); \quad y = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right);$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]; \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]; \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a};$$

$$y + \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^{\Delta}}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad OSSIA \quad y - y_0 = a(x - x_0)^2 \quad con\ x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Possiamo allora trarre la conclusione seguente.

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$, qualunque sia il valore della terna di coefficienti reali *a, b, c* $(a \neq 0)$, rappresenta sempre una parabola con asse parallelo all'asse *y*.

Il vertice di tale parabola ha coordinate $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$, si ha cioè $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

- Con $a > 0$, la parabola ha la **concavità rivolta verso l'alto** $\cup$;
- e con $a < 0$, ha la **concavità rivolta verso il basso** $\cap$. Il numero a è detto il "**parametro**" della parabola.
- **Quanto più il valore assoluto di *a* è grande ,**
  tanto più la parabola è rapida nel suo impennarsi (verso l'alto o verso il basso),
  mentre se il valore assoluto di *a* è piccolo avremo, invece, una parabola che si impenna lentamente
  e ha una curvatura più "dolce". Per questo, il numero $|a|$ è detto "**apertura**" della parabola.

E il fuoco della parabola, che coordinate avrà? E quale sarà l'equazione della direttrice?
Per rispondere, è sufficiente ricordare il ruolo che il parametro a ricopre in tutto questo discorso:

$\boldsymbol{a = \frac{1}{4k}}$, **ovvero** $\boldsymbol{k = \frac{1}{4a}}$**, con** $\boldsymbol{k}$ **= misura con segno del segmento orientato vertice-fuoco** .

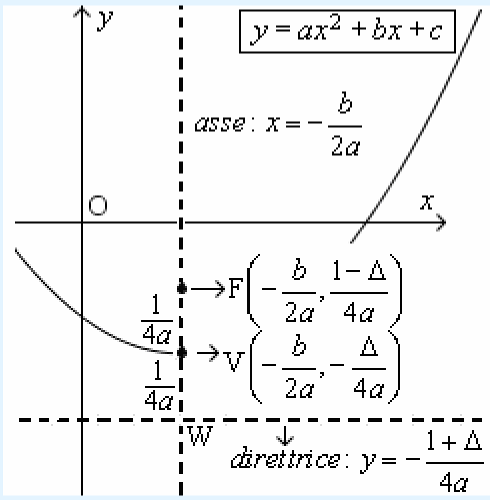
Sarà allora $\boldsymbol{y_F = y_V + \frac{1}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{1 - \Delta}{4a}}$; $\quad \boldsymbol{d : y = y_V - \frac{1}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} = -\frac{1 + \Delta}{4a}}$

RIASSUMENDO: DALL'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA ALLE COORDINATE DI VERTICE E FUOCO E ALLE EQUAZIONI DI ASSE E DIRETTRICE

Nella parabola di equazione $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, si ha $\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right); \ F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right); \ d : y = -\frac{1 + \Delta}{4a}}$.

Le ordinate che compaiono in tali formule
possono essere "ricostruite" senza fatica
a partire dalla sola ascissa del vertice

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$



Infatti, poiché V sta sulla parabola, si ha subito

$$y_V = a{x_V}^2 + by_V + c$$

e basterà poi tenere presente che l'ordinata y_F del fuoco
e l'ordinata costante y_d di tutti i punti della direttrice
possono essere ricavate dall'ordinata y_V del vertice,
addizionandole e rispettivamente sottraendole la quantità

$\frac{1}{4a}$ = misura relativa del segmento orientato vertice-fuoco = VF = WV

Ovviamente, essendo l'asse parallelo all'asse *y*, l'ascissa del vertice e quella del fuoco coincidono anche con l'ascissa costante di tutti i punti dell'asse di simmetria della parabola:

$$\boxed{x_F = x_V = -\frac{b}{2a}; \quad asse: \ x = -\frac{b}{2a}}$$

ESEMPI SVOLTI

1) *E' data la parabola di equazione* $y = x^2 - 2x - 8$.
Disegna la curva, poi determina:
le coordinate del vertice e del fuoco; l'equazione dell'asse e della direttrice.
Quanto vale il "parametro" di questa parabola? Quanto vale l' "apertura"?

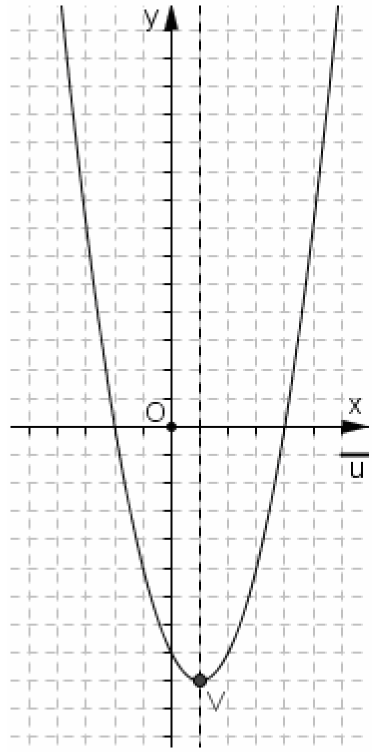
Quando si deve disegnare una parabola,
conviene innanzitutto calcolare la quantità $-\frac{b}{2a}$,
che esprime: l'ascissa del vertice, l'ascissa del fuoco
e l'ascissa costante di tutti i punti dell'asse di simmetria.

Nel nostro caso, è $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = +1$.

Dunque potremo disegnare per prima cosa,
tratteggiato, l'asse di simmetria $x = +1$,
che ci sarà *molto utile* in quanto,
nel disegnare poi la parabola, dopo aver
1) dato a x un valore,
2) calcolato il corrispondente valore di y,
3) e segnato sul foglio il punto corrispondente,

potremo, senza altri calcoli,
posizionare immediatamente *un altro* punto:
il simmetrico del precedente, rispetto all'asse.

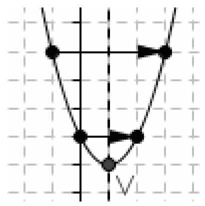
Per fare un esempio, con riferimento alla figura qui a fianco,
dopo aver segnato il punto $(0, -8)$
potremo subito segnare anche il punto $(2, -8)$.



x	$y = x^2 - 2x - 8$
–4	16
–3	7
–2	0
–1	–5
0	–8
1	–9
2	–8
3	–5
4	0
5	7
6	16

Come spiegato qui a sinistra, una volta determinata una coppia (x, y) e quindi disegnato un punto, se ne può subito segnare un altro ossia il simmetrico, rispetto all'asse tratteggiato, del punto individuato prima.

Ciò permette di risparmiare, pressappoco, la metà dei calcoli.



Ora, per quanto riguarda l'ordinata del vertice,
la cui ascissa è $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$, essa potrà essere calcolata:

- tramite la formula

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}{4\cdot 1} = -\frac{4+32}{4} = -\frac{36}{4} = -9$$

- oppure,
più semplicemente e senza bisogno di ricordare formule,
sostituendo l'ascissa nota nell'equazione della parabola:

$$y_V = 1^2 - 2\cdot 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$$

Per l'ordinata del fuoco,
e l'ordinata costante di tutti i punti della direttrice,
di può procedere con le formule note
oppure ricordare soltanto che
la *distanza orientata vertice-fuoco* è

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{4\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

e, addizionando poi sottraendo questa quantità
all'ordinata del vertice, si ottengono rispettivamente
l'ordinata del fuoco e l'ordinata che caratterizza la direttrice.
Dunque:

$$y_F = y_V + \frac{1}{4} = -9 + \frac{1}{4} = -\frac{35}{4}$$

$$\textit{direttrice}:\ y = y_V - \frac{1}{4} = -9 - \frac{1}{4} = -\frac{37}{4}$$

Il "parametro" di questa parabola vale $a = 1$
L' "apertura" vale $|a| = |1| = 1$.

2) *Scrivi l'eq. della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per i 3 punti* $A(-1,3)$; $B(1,5)$; $C(4,-7)$.

L'equazione generale di una parabola con asse parallelo all'asse y è $y = ax^2 + bx + c$.
Ci sono 3 parametri da determinare, dunque:
ma abbiamo appunto 3 condizioni, le condizioni di appartenenza dei 3 punti.

$$\begin{array}{c} A(-1,3) \\ B(1,5) \\ C(4,-7) \end{array} \begin{cases} 3 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ 5 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ -7 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a - b + c \\ 5 = a + b + c \\ -7 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 16a + 4b + c = -7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (2)-(1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} 2b = 2;\ b = 1 \\ a + 1 + c = 5;\ a + c = 4 \\ 16a + 4 + c = -7;\ 16a + c = -11 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} (1) \\ (3)-(2) \\ (2) \end{array} \begin{cases} b = 1 \\ 15a = -15;\ a = -1 \\ -1 + c = 4;\ c = 5 \end{cases}$$

La parabola che ci interessa è perciò la $\boxed{y = -x^2 + x + 5}$.

3) *Scrivere l'eq. della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha per vertice* $V(1,4)$ *e passa per* $P(-2,1)$.
Determinare successivamente: il fuoco; l'equazione dell'asse e della direttrice; il parametro; l'apertura.

L'equazione di una parabola di cui sia noto il vertice si può scrivere con la formula $y - y_0 = a(x - x_0)^2$
che nel nostro caso diventa $y - 4 = a(x-1)^2$
Determineremo il valore del parametro a imponendo l'appartenenza del punto $P(-2,1)$ e quindi scrivendo

$$1 - 4 = a(-2-1)^2;\ -3 = 9a;\ a = -\frac{1}{3}.$$

L'equazione è perciò

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x-1)^2;\ 3(y-4) = -(x-1)^2;\ 3y - 12 = -x^2 + 2x - 1;\ 3y = -x^2 + 2x + 11;\ y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

Ora, per quanto riguarda il fuoco è $x_F = x_V = 1;\quad y_F = y_V + \dfrac{1}{4a} = 4 + \dfrac{1}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = 4 + \dfrac{1}{-\frac{4}{3}} = 4 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4}$.

La direttrice ha equazione $d: y = y_V - \dfrac{1}{4a};\quad y = 4 - \dfrac{1}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)};\ y = 4 - \dfrac{1}{-\frac{4}{3}};\ y = 4 + \dfrac{3}{4};\ y = \dfrac{19}{4}$.

L'asse ha equazione $x = x_F$ quindi $x = 1$; il parametro è $a = -\dfrac{1}{3}$; l'apertura è $|a| = \left|-\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$.

4) *Scrivere l'equazione della parabola di vertice* $V(2,0)$ *e direttrice* $d: y = -1$

METODO ALGEBRICO

$y - y_0 = a(x - x_0)^2$ *quindi* $y - 0 = a(x-2)^2;$
$y = a(x-2)^2;$
$y = ax^2 - 4ax + 4a$

La direttrice ha equazione:

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1 + (-4a)^2 - 4\cdot a\cdot 4a}{4a} = -\frac{1}{4a}$$

$$y = -\frac{1}{4a}$$

da cui $-\dfrac{1}{4a} = -1;\ a = \dfrac{1}{4}$

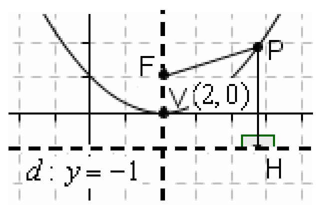
Equazione della parabola:

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2;\ y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right);$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1}$$

METODO GEOMETRICO (più efficace!)

Dalla figura si vede che il fuoco
(che giace sull'asse, a una distanza dal vertice
uguale a quella che il vertice ha dalla direttrice)
deve aver coordinate $(2,1)$.
Ma la parabola che ha per fuoco $F(2,1)$ e per direttrice $d: y = -1$ non è altro che il luogo dei punti $P(x,y)$ equidistanti dal fuoco e dalla direttrice: quindi



$$PF = PH$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y+1|$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 \cancel{+y^2} - 2y \cancel{+1} = \cancel{y^2} + 2y \cancel{+1}$$

$$-4y = -x^2 + 4x - 4;\quad \boxed{y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1}$$

CASI PARTICOLARI di $y = ax^2 + bx + c$

- $c = 0$: $y = ax^2 + bx$
  In questo caso (termine noto nullo) è certamente verificata la condizione di appartenenza dell'origine, che ha coordinate $(0,0)$, alla curva; pertanto **la parabola passa per l'origine.**

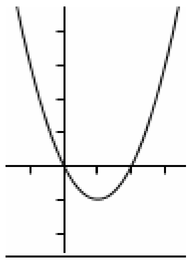
> In generale, è utile tener presente che una qualsivoglia **curva algebrica**
> (= curva la cui **equazione** si può portare sotto la forma**: polinomio nelle variabili *x, y* uguagliato a zero**)
> passa per l'origine,
> se e solo se la sua equazione manca del termine noto.

- $b = 0$: $y = ax^2 + c$

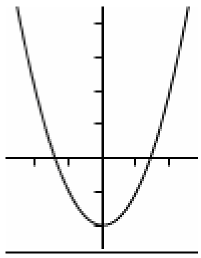
  In questo caso, si ha $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 0$ e quindi
  - ♪ **il vertice della parabola sta sull'asse delle *y*;**
  - ♫ **l'asse delle *y* coincide con l'asse di simmetria della parabola.**

  Quest'ultimo fatto si comprende ancor meglio se si pensa che,
  poiché manca il termine in x e sopravvivono solo il termine in x^2 e il termine noto,
  se si muta x in $-x$, la *y* corrispondente rimane la medesima;
  insomma, **a valori opposti di *x* corrisponde lo stesso valore di *y***
  ($\forall x,\ f(-x) = f(x)$: **si dice che la funzione è "pari"**).
  Ma ciò comporta appunto che la parabola presenti una simmetria rispetto all'asse verticale.

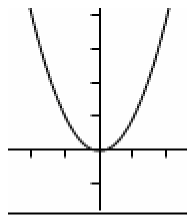
- $b = c = 0$: $y = ax^2$
  Come abbiamo già visto e come si deduce dal fatto che qui sono verificati contemporaneamente entrambi i casi particolari esaminati in precedenza, **la parabola ha il vertice nell'origine**.



$c = 0$: $y = ax^2 + bx$
la parabola
passa per l'origine



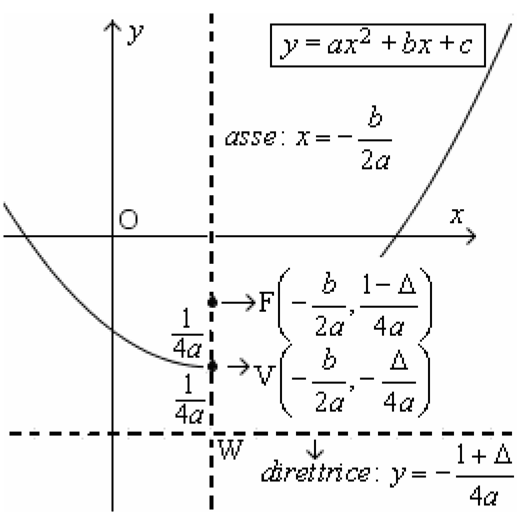
$b = 0$: $y = ax^2 + c$
la parabola è simmetrica
rispetto all'asse x

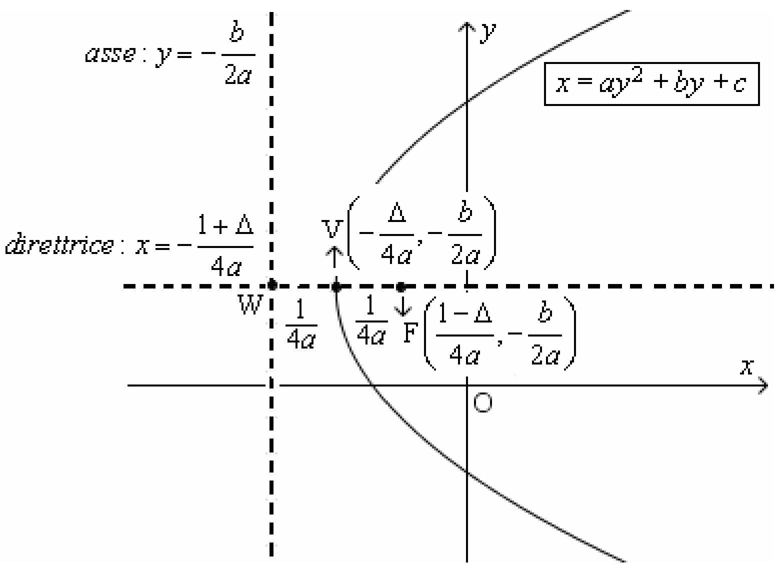


$b = c = 0$: $y = ax^2$
la parabola
ha il vertice nell'origine

PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE *x*

Se si pensa ad una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle *x*,
i ruoli di *x* e di *y* sono scambiati ma il discorso rimane ovviamente il medesimo.
Pertanto, confrontando le due situazioni:





PARABOLA "RUOTATA"

Se venisse richiesto di determinare l'equazione della parabola
avente per fuoco il punto $F(1,1)$ e per direttrice le retta $r:\ y=2x-5\ \ (2x-y-5=0)$,
basterebbe considerare il generico punto $P(x,y)$ del piano cartesiano
e porre la condizione che le due distanze di P dal punto F e dalla retta *r* siano uguali.

$$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$$

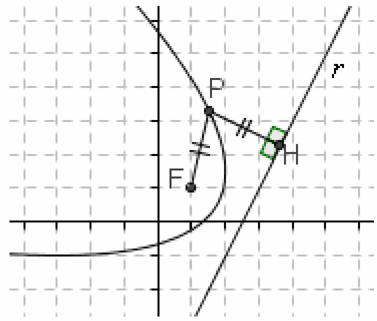
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{|2x-y-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$\sqrt{x^2-2x+1+y^2-2y+1}=\frac{|2x-y-5|}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}=|2x-y-5|$$

$$5x^2-10x+5y^2-10y+10=4x^2+y^2+25-4xy-20x+10y$$

$$\boxed{x^2+4xy+4y^2+10x-20y-15=0}$$



Questo è solo un esempio: si potrebbe dimostrare, in generale, che l'equazione di una parabola comunque disposta nel piano cartesiano si può *sempre* scrivere sotto la forma

$$\boxed{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$$

e inoltre che, in questa equazione, risulta sempre

$$\boxed{b^2-4ac=0}\ !!!$$

ESEMPI SVOLTI

5) Scrivere l'equazione della parabola che ha per direttrice l'asse *x*, per asse l'asse *y* e che passa per $A(1,1)$.

$$y=ax^2+c\ \ (\textit{ha per asse l'asse } y,\ \textit{quindi } b=0)$$

$$\textit{direttrice di equazione } y=0:\quad -\frac{1+\Delta}{4a}=0;\quad 1+\Delta=0\quad 1+0-4ac=0;\quad 1-4ac=0$$

$$\textit{passaggio per } (1,1):\ 1=a\cdot 1^2+c;\ \ 1=a+c$$

$$\begin{cases}1-4ac=0;\ ac=\dfrac{1}{4}\\ a+c=1\end{cases}$$

Il sistema ha una sola soluzione: $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Dunque la parabola cercata ha equazione $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

6) Una parabola con l'asse parallelo all'asse *x* ha per fuoco il punto $F(-2,4)$ e che passa per $A(1,8)$.
Qual è la sua equazione?

Parabola con asse parallelo all'asse *x*: equazione $x=ay^2+by+c$ e fuoco $\left(\dfrac{1-\Delta}{4a},-\dfrac{b}{2a}\right)$. Dunque:

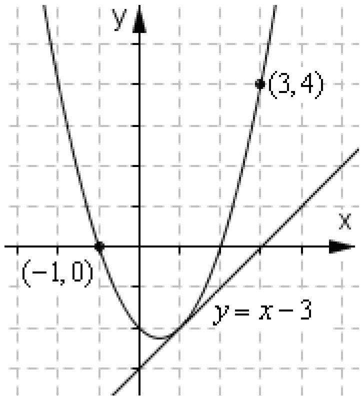
$$\begin{cases}\dfrac{1-\Delta}{4a}=-2\\ -\dfrac{b}{2a}=4\\ 1=64a+8b+c\ \ (\textit{passaggio per } P)\end{cases}\quad\begin{cases}1-b^2+4ac=-8a\\ -b=8a\\ 64a+8b+c=1\end{cases}\quad\begin{cases}b=-8a\\ \cancel{64a}\ \cancel{-64a}+c=1;\\ 1-b^2+4ac=-8a\end{cases}\quad\begin{cases}b=-8a\\ c=1\\ 1-(-8a)^2+4a=-8a\end{cases}$$

$$1-64a^2+4a=-8a;\quad -64a^2+12a+1=0;\quad 64a^2-12a-1=0;\quad a_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+64}}{64}=\frac{6\pm 10}{64}=\left\langle\begin{array}{l}-\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{16}\\ b=\dfrac{1}{2}\\ c=1\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=-2\\ c=1\end{cases}$$

Ci sono perciò 2 parabole che risolvono il problema: $\boxed{x=-\dfrac{1}{16}y^2+\dfrac{1}{2}y+1}$ e $\boxed{x=\dfrac{1}{4}y^2-2y+1}$

7) Scrivere l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, che passa per i due punti $(-1,0)$ e $(3,4)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = x - 3$.



Equazione generale: $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

$\boxed{\textit{PASSAGGIO PER } (-1,0)}$: $0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c;$ $\boxed{0 = a - b + c}$

$\boxed{\textit{PASSAGGIO PER } (3,4)}$: $4 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c;$ $\boxed{4 = 9a + 3b + c}$

Condizione di tangenza:
facendo il sistema fra la parabola e la retta, questo sistema dovrà avere una sola soluzione

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente del sistema: $ax^2 + bx + c = x - 3$

Questa equazione di 2° *grado avrà una sola soluzione se, e soltanto se,* $\boxed{\Delta = 0}$

$$ax^2 + bx - x + c + 3 = 0; \quad ax^2 + (b-1)x + (c+3) = 0$$

$$\boxed{\Delta = 0} \quad \boxed{(b-1)^2 - 4a(c+3) = 0} \quad \boxed{\textit{CONDIZIONE DI TANGENZA}}$$

$$\begin{cases} (b-1)^2 - 4a(c+3) = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3)-(2) \\ (2) \\ (1) \end{matrix} \begin{cases} 8a + 4b = 4;\ \ 2a + b = 1;\ \ b = 1 - 2a \\ a - 1 + 2a + c = 0;\ \ c = 1 - 3a \\ (\cancel{1} - 2a \cancel{-1})^2 - 4a(1 - 3a + 3) = 0 \end{cases}$$

$$(-2a)^2 - 4a(4 - 3a) = 0;\ \ 4a^2 - 16a + 12a^2 = 0;\ \ 16a^2 - 16a = 0;\ \ a^2 - a = 0$$

$$a(a-1) = 0; \quad a = \begin{cases} 0 & \textit{non accettabile (con } a = 0\textit{, non si avrebbe una parabola!)} \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - 2a = 1 - 2 = -1 \\ c = 1 - 3a = 1 - 3 = -2 \end{cases}$$ *Pertanto la parabola che risolve il problema è la* $\boxed{y = x^2 - x - 2}$

8) Scrivere l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, tangente alla retta $y = 3x + 4$ e altresì tangente, nell'origine, alla retta $y = -x$.

Equazione generale: $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

$\boxed{\textit{Passaggio per l'origine } (0,0):\ c = 0}$

Condizione di tangenza con la retta $y = -x$:
facendo il sistema fra la parabola e la retta, questo sistema dovrà avere una sola soluzione

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \ \ \textit{(abbiamo già tenuto conto del fatto che } c = 0) \\ y = -x \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente del sistema: $ax^2 + bx = -x;$ $ax^2 + (b+1)x = 0$

$$\boxed{\Delta = 0} \quad (b+1)^2 - 4\cdot a\cdot 0 = 0 \quad (b+1)^2 = 0 \quad \boxed{b = -1} \quad \boxed{\textit{CONDIZIONE DI TANGENZA}}$$

Condizione di tangenza con la retta $y = 3x + 4$:
facendo il sistema fra la parabola e la retta, questo sistema dovrà avere una sola soluzione

$$\begin{cases} y = ax^2 - x \quad (\textit{abbiamo già tenuto conto del fatto che } b = -1) \\ y = 3x + 4 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione risolvente del sistema:

$ax^2 - x = 3x + 4$

$ax^2 - 4x - 4 = 0$

$\boxed{\frac{\Delta}{4} = 0}$ $\quad 4 + 4a = 0 \quad \boxed{a = -1} \quad \boxed{\textit{CONDIZIONE DI TANGENZA}}$

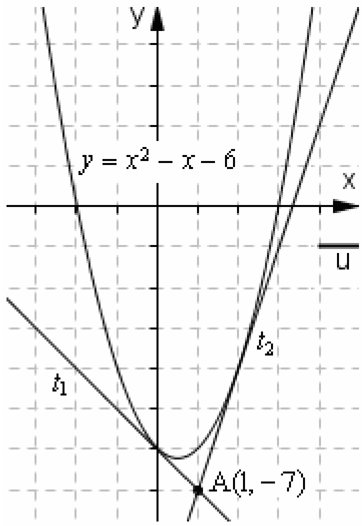
(*abbiamo utilizzato, per comodità, il* $\Delta/4$ *anzichè il* Δ; *è chiaro che* $\Delta = 0$ *se e solo se* $\Delta/4 = 0$)

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1; \quad \textit{pertanto la parabola che risolve il problema è la } \boxed{y = -x^2 - x} \\ c = 0 \end{cases}$$

9) Determinare le equazioni delle due rette tangenti alla parabola $y = x^2 - x - 6$,
condotte dal punto $A(1, -7)$

Scriviamo l'equazione della generica retta passante per $A(1, -7)$:
$\boxed{y + 7 = m(x - 1)}$

Poniamo a sistema la retta con la parabola;
il sistema ottenuto avrà un'equazione risolvente di 2° grado;
noi in questa equazione risolvente porremo la condizione $\boxed{\Delta = 0}$



$$\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y + 7 = m(x - 1) \end{cases}$$

$x^2 - x - 6 + 7 = m(x - 1)$
$x^2 - x + 1 = mx - m$
$x^2 - x - mx + 1 + m = 0$
$x^2 - (1 + m)x + (1 + m) = 0$

$\boxed{\Delta = 0}$ $\quad (1 + m)^2 - 4(1 + m) = 0 \quad (1 + m)(1 + m - 4) = 0$
$(m + 1)(m - 3) = 0 \quad m = -1 \vee m = 3$

Le due tangenti cercate sono perciò le rette

$t_1: \; y + 7 = -1 \cdot (x - 1); \;\; y + 7 = -x + 1; \;\; \boxed{y = -x - 6}$

$t_2: \; y + 7 = 3 \cdot (x - 1); \;\; y + 7 = 3x - 3; \;\; \boxed{y = 3x - 10}$

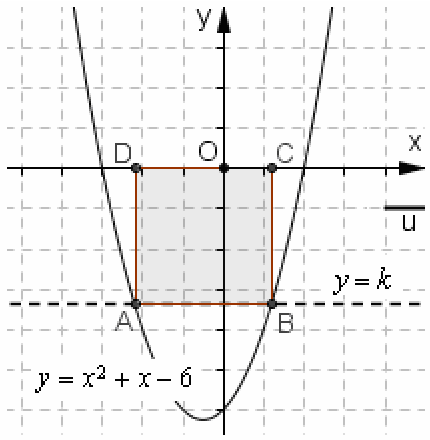
10) Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola dell'esercizio precedente,
nel suo punto di ascissa -2.

L'ordinata del punto è $y = x^2 - x - 6 = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$. *Il punto è* $(-2, 0)$.
Generica retta per $(-2, 0)$: $y - 0 = m(x + 2); \;\; y = mx + 2m$
Sistema con la parabola: $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ y = mx + 2m \end{cases}$
Equazione risolvente: $x^2 - x - 6 = mx + 2m; \;\; x^2 - x - mx - 6 - 2m = 0; \;\; x^2 - (1 + m)x - (6 + 2m) = 0$
Condizione di tangenza $\boxed{\Delta = 0}$: $(1 + m)^2 + 4(6 + 2m) = 0; \;\; 1 + 2m + m^2 + 24 + 8m = 0$
$m^2 + 10m + 25 = 0 \quad (m + 5)^2 = 0 \quad m = -5$

Com'era geometricamente prevedibile (dato che in questo caso il punto apparteneva alla curva)
si è trovata UNA SOLA retta tangente: quella di equazione $\boxed{y = -5x - 10}$.

11) La parabola di equazione $y = x^2 + x - 6$ determina, con l'asse delle x, una regione limitata chiusa. Quanto misura il lato del quadrato inscritto in tale regione?

Consideriamo una retta r parallela all'asse x, di equazione $y = k$.
Vogliamo determinare il parametro k in modo che, dette A e B le intersezioni di r con la parabola, e dette C e D le proiezioni di B e A rispettivamente sull'asse x, il rettangolo ABCD abbia i lati tutti uguali fra loro.



$$\begin{cases} y = x^2 + x - 6 \\ y = k \end{cases}$$

$$x^2 + x - 6 = k$$

$$x^2 + x - 6 - k = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6-k)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24+4k}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25+4k}}{2}$$

$$\mathrm{A}\left(\frac{-1-\sqrt{25+4k}}{2}, k\right) \quad \mathrm{B}\left(\frac{-1+\sqrt{25+4k}}{2}, k\right)$$

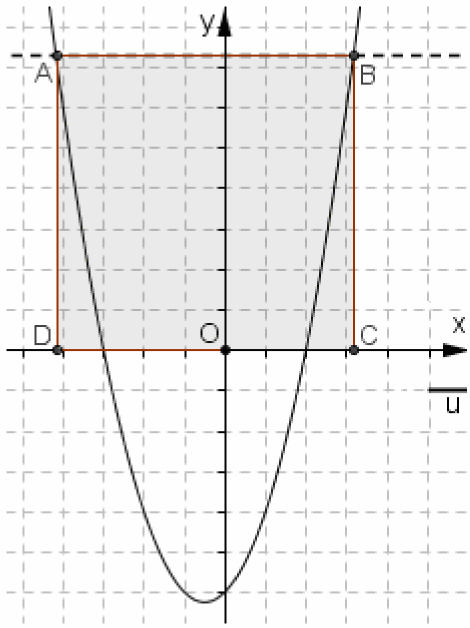
$$\mathrm{AB} = \frac{-1+\sqrt{25+4k}}{2} - \frac{-1-\sqrt{25+4k}}{2} = \ldots = \sqrt{25+4k}$$

$$\mathrm{AD} = |k|$$

$$\sqrt{25+4k} = |k| \qquad 25 + 4k = k^2 \qquad k^2 - 4k - 25 = 0$$

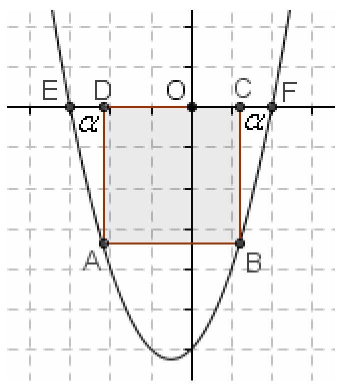
$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+25} = \left\langle \begin{array}{l} 2-\sqrt{29} \\ 2+\sqrt{29} \end{array} \right.$$

La soluzione che ci interessa è evidentemente solo quella negativa:
$k = 2 - \sqrt{29}$
che corrisponde alla retta $y = 2 - \sqrt{29}$
e al quadrato di lato $|k| = \left|2 - \sqrt{29}\right| = \sqrt{29} - 2$.



Il valore di k positivo corrisponderebbe al quadrato nella seconda figura, che non è però quello richiesto dal problema.

IN ALTERNATIVA,
si sarebbe potuta assumere come incognita la misura (> 0) di uno qualsiasi dei due segmenti uguali $\mathrm{ED} = \mathrm{CF} = \alpha$.
La risoluzione sarebbe stata allora



$$\mathrm{D}(-3+\alpha, 0); \quad \mathrm{E}(2-\alpha, 0)$$

$$y_{\mathrm{A}} = (-3+\alpha)^2 + (-3+\alpha) - 6 = \cancel{9} - 6\alpha + \alpha^2 \cancel{-3} + \alpha \cancel{-6} = \alpha^2 - 5\alpha$$

$$\mathrm{AD} = \left|\alpha^2 - 5\alpha\right|; \quad \mathrm{DE} = 2 - \alpha - (-3+\alpha) = 2 - \alpha + 3 - \alpha = 5 - 2\alpha$$

L'equazione risolvente è $\left|\alpha^2 - 5\alpha\right| = 5 - 2\alpha$
che può essere ricondotta, ad esempio, al sistema misto

$$\begin{cases} 5 - 2\alpha \geq 0 \\ \alpha^2 - 5\alpha = \pm(5 - 2\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \leq \frac{5}{2} \\ \alpha^2 - 5\alpha = 5 - 2\alpha \ \vee \ \alpha^2 - 5\alpha = -5 + 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \leq \frac{5}{2} \\ \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \ \vee \ \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Tenuto conto che deve essere anche $\alpha > 0$, si vede che l'unica soluzione accettabile è $\alpha = \frac{7 - \sqrt{29}}{2}$

la quale poi porta alla stessa misura, per il lato del quadrato, trovata con l'altro (più comodo) metodo.