25. ESERCIZI SULLA PARABOLA

1) Trovare vertice, asse, fuoco, direttrice della parabola
$y = x^2 - 3x - 4$;
disegnare la curva.

2) Trovare vertice, asse, fuoco, direttrice della parabola
$y = x - 2x^2$;
disegnare la curva

3) Trovare vertice, asse, fuoco, direttrice della parabola
$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$;
disegnare la curva.

4) Scrivere l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse *y*, passante per i tre punti
$A(1,0)$; $B(2,1)$; $C(3,4)$;
determinarne vertice, asse, fuoco, direttrice.

5) Scrivere l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse *y*,
avente vertice in $V(2,4)$
e passante per $A(1,3)$.
SUGGERIMENTO IMPORTANTE
Conviene utilizzare la formula
$y - y_0 = a(x - x_0)^2$:
in questo modo, infatti, c'è un solo parametro da determinare anziché 3 !

6) Scrivere l'equazione della parabola con fuoco $F(3,1)$ e direttrice $d : y = 2$

7) Una parabola ha vertice in $V\left(3, -\frac{3}{2}\right)$ e fuoco in $F(3,-1)$. Determinarne l'equazione.

8) Scrivere le equazioni delle parabole di vertice $V(-3,2)$ e apertura $|a| = 1$

9) Scrivere l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse *x*, passante per i tre punti
$A(1,0)$; $B(2,1)$; $C(3,4)$;
determinarne vertice, asse, fuoco, direttrice.

10) Scrivere l'equazione della parabola avente per fuoco l'origine, e per direttrice la retta $x + y = 4$
(Occhio!
Non essendo l'asse di simmetria parallelo né all'asse *x*, né all'asse *y*,
l'equazione *non* sarà della forma
$y = ax^2 + bx + c$ o $x = ay^2 + by + c$)

11) Condurre, dal punto $A(3,4)$, le rette tangenti alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$,
e calcolare l'area del triangolo AST, essendo S, T i punti di contatto.

12) Scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola $y = -x^2$ nel suo punto di ascissa 1.

13) Scrivere l'equazione della parabola (con asse verticale)
passante per i due punti $A(-3,4)$ e $B(0,1)$
e tangente nel punto B alla retta di coefficiente angolare 2.
Successivamente, scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola in A.

14) Nel segmento parabolico che la $y = -x^2 + 6x$ determina con l'asse x,
inscrivere un rettangolo il cui perimetro misuri 18.

15) Nel segmento parabolico che la parabola $y = x^2 - 6x + 5$ determina sull'asse *x*, inscrivere:
   a) un rettangolo di perimetro 10
   b) un rettangolo di area 6
   c) un quadrato
   d) un rettangolo di diagonale 4

16) Disegnata la parabola
$y^2 = 8x$,
determinare l'equazione della retta, ad essa tangente,
parallela alla retta
$2x + 2y - 3 = 0$

17) Verificare che le due rette tangenti condotte ad una parabola da un punto qualsiasi della sua direttrice, sono sempre perpendicolari.
OSSERVAZIONE:
non è restrittivo supporre che la parabola abbia il vertice nell'origine e l'asse coincidente con l'asse *y*.
In questo modo, i calcoli saranno più semplici.

18) Dimostra che il luogo dei centri delle circonferenze
passanti per $A(1,1)$ e tangenti all'asse x
è una parabola,
e scrivine l'equazione.

19) Data la funzione
$y = x^2 + |x-2|$,
disegnarne il grafico
e scrivere le equazioni delle due semirette tangenti
nel punto "angoloso" di ascissa 2.

20) Scrivi l'equazione della parabola con asse verticale passante per i punti
$(1,4)$; $(3,4)$; $(4,7)$
e l'equazione della parabola con asse verticale, di vertice $(3,8)$ e passante per $(1,4)$.
Fra le rette $y = 2x + q$,
a) quali sono quelle che, complessivamente, hanno 4 intersezioni con le due parabole?
b) Quali sono quelle che hanno 3 intersezioni?
c) Quali sono quelle che hanno 2 intersezioni?
d) Quali sono quelle che hanno 1 sola intersezione?

21) Condurre una retta parallela all'asse *y*,
in modo che le due parabole
$y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -x^2 + 4x - 1$
determinino su di essa un segmento uguale a 2.

22) Sulla parabola avente vertice $V(-1,-2)$ e fuoco $F\left(-1,-\dfrac{7}{4}\right)$,
determinare i punti le cui distanze dagli assi cartesiani siano una il doppio dell'altra.

23) Scrivere l'equazione della parabola di vertice $V(-1,-1)$ e tangente alla retta $y = 2x$.
Dopo aver verificato che tale parabola passa per l'origine e per il punto $A(-3,3)$,
determinare, sull'arco OA di parabola, un punto P in modo che:
a) l'area del triangolo PAO misuri 3;
b) l'area del triangolo PAO sia massima

SOLUZIONI

1) $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$; $a: x=\frac{3}{2}$; $F\left(\frac{3}{2}, -6\right)$; $d: y=-\frac{13}{2}$

2) $V\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$; $a: x=\frac{1}{4}$; $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$; $d: y=\frac{1}{4}$

3) $V(0, 1)$; $a: x=0$; $F(0, 2)$; $d: y=0$

4) $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$; $V\equiv A(1, 0)$; $\text{asse}: x=1$; $F\left(1, \frac{1}{4}\right)$; $d: y=-\frac{1}{4}$

5) $y=-x^2+4x$ 6) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-3$ 7) $y=\frac{1}{2}x^2-3x+3$

8) Se l'apertura è $|a|=1$, il parametro potrà essere $a=1$ (1^a parabola) oppure $a=-1$ (2^a parabola).
Utilizzando l'equazione $y-y_0=a(x-x_0)^2$ di una parabola noto il vertice, avremo immediatamente:
$y-2=1\cdot(x+3)^2$; $y-2=x^2+6x+9$; $y=x^2+6x+11$ (1^a parabola);
$y-2=-1\cdot(x+3)^2$; $y-2=-x^2-6x-9$; $y=-x^2-6x-7$ (2^a parabola).

9) $x=-\frac{1}{6}y^2+\frac{7}{6}y+1$; $V\left(\frac{73}{24}, \frac{7}{2}\right)$; $\text{asse}: y=\frac{7}{2}$; $F\left(\frac{37}{24}, \frac{7}{2}\right)$; $d: x=\frac{109}{24}$

10) $x^2+y^2-2xy+8x+8y-16=0$

11) $t_1: y=2x-2$; $t_2: y=-6x+22$; $\text{Area}=16$

12) $y=-2x+1$

13) $y=x^2+2x+1$; $y=-4x-8$

14) base = 4, altezza = 5 opp. b = 0, h = 9 (soluzione degenere)

15a) base = 2, h = 3

15b) base = 2, h = 3 oppure $b=\sqrt{13}-1$, $h=\frac{\sqrt{13}+1}{2}$

15c) $\text{lato}=2\left(\sqrt{5}-1\right)$

15d) due soluzioni entrambe degeneri, in cui il rettangolo ha base 0 e altezza 4, o viceversa

16) $y=-x-2$

17) La parabola $y=ax^2$ ha come direttrice la retta $y=-\frac{1}{4a}$.

Un punto generico della direttrice ha dunque coordinate $\left(k, -\frac{1}{4a}\right)$.

La generica retta per questo punto avrà equazione $y+\frac{1}{4a}=m(x-k)$

e scrivendo la condizione di tangenza di questa retta con la parabola, si trova un'equazione, nell'incognita *m*, le cui soluzioni m_1, m_2 sono, per qualsiasi valore di *k*, antireciproche l'una dell'altra. Segue la tesi.

18) $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$

19) $y=3x-2$ $(x\le 2)$; $y=5x-6$ $(x\ge 2)$

20) $y=x^2-4x+7$, $y=-x^2+6x-1$
- 4 intersezioni con $-2<q<-1 \vee -1<q<2 \vee 2<q<3$
- 3 intersezioni con $q=-2$, $q=-1$, $q=2$, $q=3$
- 2 intersezioni con $q<-2 \vee q>3$
- per nessun valore di *q* si ha 1 sola intersezione

21) La retta in questione ha equazione della forma $x=k$; si trova che *k* può assumere i valori: 0, 1, 2 oppure 3.

22) $y=x^2+2x-1$; $(\pm 1, \pm 2)$; $\left(-2\pm\sqrt{5}, 4\mp 2\sqrt{5}\right)$; $(-2,-1)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $\left(\frac{-5\pm\sqrt{41}}{4}, \frac{5\mp\sqrt{41}}{8}\right)$

23) $y=x^2+2x$; a) $P_1(-2,0)$; $P_2(-1,-1)\equiv V$ b) $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ (la retta dovrà essere tangente!)