26. LA CIRCONFERENZA NEL PIANO CARTESIANO

La circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r è il luogo dei punti $P(x, y)$ tali che $PC = r$.

Pertanto la sua equazione si ottiene coi passaggi seguenti:

$PC = r$

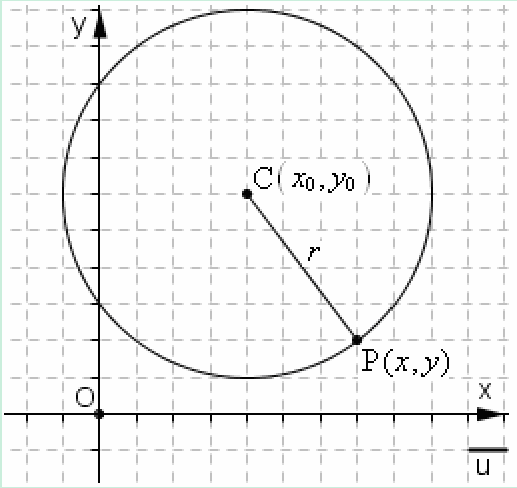
(1) $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$

(2) $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2}$

$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2 = r^2$

$x^2+y^2\underbrace{-2x_0}_{\alpha}x\underbrace{-2y_0}_{\beta}y+\underbrace{x_0^2+y_0^2-r^2}_{\gamma} = 0$

(3) $\boxed{x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0}$



Dati dunque il centro $C(x_0, y_0)$ e la misura r del raggio, l'equazione si scriverà

- sotto la forma (1)
- o, meglio, già sotto la forma (2),
- poi si faranno i calcoli per portarsi alla forma definitiva (3).

ESEMPI

1) *Scrivere l'equazione della circonferenza di centro* $(4,6)$ *e raggio* 5
(che è poi proprio quella della figura sopra!)

$\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2} = 5$

$(x-4)^2+(y-6)^2 = 25$

$x^2-8x+16+y^2-12y+36 = 25$

$\boxed{x^2+y^2-8x-12y+27 = 0}$

Per esercizio, prendi ora qualche punto che dalla figura risulti appartenere alla circonferenza, ad esempio il punto $(1, 2)$ *o il punto* $(-1, 6)$ *e controlla, sostituendo, che le sue coordinate verificano l'equazione trovata.*

2) *Scrivere l'equazione della circonferenza di centro* $A(1,-3)$ *e passante per* $B(-6,21)$

Per prima cosa calcolo il raggio

$r = AB = \sqrt{(-6-1)^2+(21+3)^2} = \sqrt{(-7)^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$.

Poi: $(x-1)^2+(y+3)^2 = 25^2$; $\quad x^2-2x+1+y^2+6y+9 = 625$; $\quad \boxed{x^2+y^2-2x+6y-615 = 0}$

3) *Scrivere l'equazione della circonferenza di diametro* AB, *con* $A(0,-3)$; $B(4,2)$

Innanzitutto determino il centro, punto medio del diametro: $C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$

Poi calcolo il raggio, ad esempio come metà del diametro: $r = \frac{\sqrt{(4-0)^2+(2+3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

Infine: $(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2$; $\quad x^2-4x+4+y^2+y+\frac{1}{4} = \frac{41}{4}$; $\quad \boxed{x^2+y^2-4x+y-6 = 0}$

Osserviamo che a partire dalla (3) si può risalire alle coordinate del centro e alla misura del raggio tramite le formule seguenti:

$\alpha = -2x_0 \to \boxed{x_0 = -\frac{\alpha}{2}} \qquad \beta = -2y_0 \to \boxed{y_0 = -\frac{\beta}{2}}$

$\gamma = x_0^2+y_0^2-r^2 \;\to\; r^2 = x_0^2+y_0^2-\gamma =$ *da cui* $\boxed{r = \sqrt{x_0^2+y_0^2-\gamma}}$

ESEMPIO

Determinare centro e raggio della circonferenza di equazione $2x^2+2y^2+4x-3y=18$

Innanzitutto dobbiamo **portare l'equazione nella forma "standard"** $x^2+y^2+\ldots=0$,
che è poi quella in relazione alla quale valgono le formule ricavate in precedenza.

In questo caso si tratterà di portare tutto a 1° membro e dividere per 2: $x^2+y^2+2x-\frac{3}{2}y-9=0$.

Ora: $x_0=-\frac{2}{2}=-1 \quad y_0=-\frac{-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4} \quad r=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2-(-9)}=\sqrt{1+\frac{9}{16}+9}=\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{13}{4}$

Supponiamo invece che sia data un'equazione della forma
$\boldsymbol{x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0}$ **con** α,β,γ **scelti in modo arbitrario**.
Sarebbe ora **un errore dare per scontato che l'equazione data rappresenti per forza una circonferenza**.
Consideriamo infatti l'equazione $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ e cerchiamo di ricondurla, se possibile, col metodo "del completamento del quadrato", alla forma (2). Avremo:

$$x^2+\alpha x+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{4}+y^2+\beta y+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}+\gamma=0; \quad \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma$$

$$\left[x-\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma$$

Tutto ora **dipende dal segno della quantità** a secondo membro $\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$.

- Infatti, se tale quantità è <0, si vede che l'equazione non può essere soddisfatta da alcuna coppia (x,y) (una somma di due quadrati non potrà mai dare come risultato un numero negativo) e saremo costretti a concludere che l'equazione data rappresenta il **luogo vuoto**.
- Se poi è $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma=0$, l'equaz. data sarà verificata se e solo se si annullano contemporaneamente entrambi i quadrati a primo membro, e quindi le loro basi; ma ciò avviene solo con $x=-\frac{\alpha}{2},\ y=-\frac{\beta}{2}$.

  Perciò, in questo caso, l'equazione è soddisfatta dalle coordinate di un punto soltanto: il punto $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$.

  Il **luogo** che l'equazione rappresenta è in questo caso **puntiforme**
  (potremmo, con un po' di fantasia, pensare ad una circonferenza di raggio nullo, ridotta al solo centro).
- Se, infine, è $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma>0$, l'equazione può essere scritta come

  $\left[x-\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]^2=r^2$, avendo posto $r=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$

  e rappresenta **effettivamente una circonferenza**, di centro $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$.

Riassumendo, e impostando il discorso da un punto di vista "pratico", diremo dunque che:

Data un'equazione della forma $\boldsymbol{x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0}$**,**
noi "ci aspettiamo" in generale che rappresenti una circonferenza,
e andiamo subito a calcolarne le coordinate $\boldsymbol{(x_0,y_0)}$ **del centro e la misura** $\boldsymbol{r}$ **del raggio con le formule**

$$x_0=-\frac{\alpha}{2}; \quad y_0=-\frac{\beta}{2}; \quad r=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$$

Se, tuttavia, applicando la terza formula ci ritroviamo con un radicando negativo,
dovremo "fare marcia indietro" e concludere che l'equazione assegnata
non rappresentava una circonferenza bensì il luogo vuoto.
Nel caso poi il radicando ci risulti nullo, concluderemo che l'equazione assegnata
rappresenta una "circonferenza degenere, di raggio nullo, ridotta perciò al suo solo centro".

ESEMPI SVOLTI - PROBLEMI SULLA CIRCONFERENZA

Sarà molto utile tenere sempre presenti le osservazioni che seguono.

Una circonferenza $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$

- passa per l'origine se e soltanto se la sua equazione ha $\gamma=0$, ossia: manca del termine noto, è della forma $x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0$
- ha il centro sull'asse x se e soltanto se la sua equazione manca del termine con y, vale a dire ha $\beta=0$
- ha il centro sull'asse y se e soltanto se la sua equazione manca del termine con x, vale a dire ha $\alpha=0$.

Se in un qualsiasi problema occorre determinare *n* parametri, si imposterà a tale scopo un sistema con *n* condizioni contenenti quei parametri.

1) *Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i tre punti* $A(-3,3);\ B(-2,4);\ C(1,5)$.

Il problema può essere risolto CON METODO ALGEBRICO O CON METODO GEOMETRICO.

- Il **metodo algebrico ("METODO DELL'APPARTENENZA")**
  consiste nello scrivere l'equazione della generica circonferenza $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$,
  per poi determinare la terna di coefficienti $\alpha,\ \beta,\ \gamma$
  scrivendo le condizioni di appartenenza dei tre punti A, B, C e facendone il sistema.

$\Gamma:\ x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$

$A(-3,3)\in\Gamma:\ (-3)^2+3^2+\alpha\cdot(-3)+\beta\cdot 3+\gamma=0$

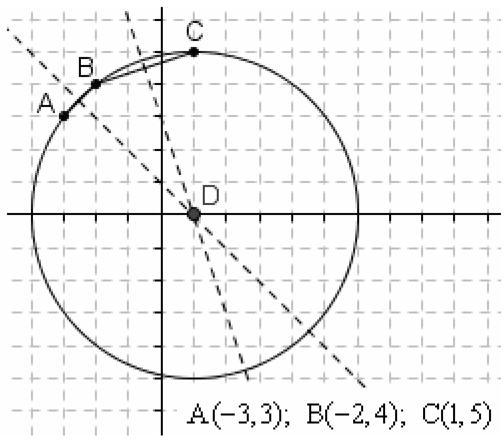
$B(-2,4)\in\Gamma:\ (-2)^2+4^2+\alpha\cdot(-2)+\beta\cdot 4+\gamma=0$

$C(1,5)\in\Gamma:\ 1^2+5^2+\alpha\cdot 1+\beta\cdot 5+\gamma=0$

$$\begin{cases}9+9-3\alpha+3\beta+\gamma=0\\4+16-2\alpha+4\beta+\gamma=0\\1+25+\alpha+5\beta+\gamma=0\end{cases}\quad\begin{cases}-3\alpha+3\beta+\gamma=-18\\-2\alpha+4\beta+\gamma=-20\\\alpha+5\beta+\gamma=-26\end{cases}\quad\ldots\quad\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=0\\\gamma=-24\end{cases}\quad \textit{da cui}\quad \boxed{\Gamma:\ x^2+y^2-2x-24=0}$$

- Il **metodo geometrico ("METODO DEGLI ASSI")**
  consiste nel tener presente che in una circonferenza
  l'asse di una corda passa sempre per il centro;
  perciò il centro di una circonferenza può essere individuato come punto di intersezione degli assi di due corde qualsiasi.
  Facile poi calcolare il raggio; dopodiché, noti centro e raggio, si potrà scrivere l'equazione sotto la forma

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$



Asse di AB:

$$(x+3)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-4)^2\ \ldots\ x+y-1=0$$

Asse di BC:

$$(x+2)^2+(y-4)^2=(x-1)^2+(y-5)^2\ \ldots\ 3x+y-3=0$$

Intersezione D dei due assi: $\begin{cases}x+y-1=0\\3x+y-3=0\end{cases}\ \ldots\ \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ $D(1,0)$ Raggio: $DA=\sqrt{(1+3)^2+(0-3)^2}=5$

Equazione circonferenza: $(x-1)^2+(y-0)^2=25;\quad x^2-2x+1+y^2=25;\quad \boxed{x^2+y^2-2x-24=0}$

2) *Scrivere l'equazione della circonferenza di centro* $A(-4,2)$ *e passante per* $B(-3,5)$

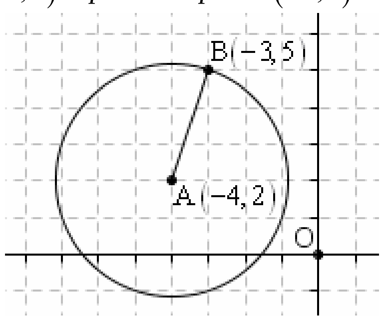
$r=AB=\sqrt{(-3-(-4))^2+(5-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

Circonferenza di centro $A(-4,2)$ *e raggio* $\sqrt{10}$:

$(x+4)^2+(y-2)^2=(\sqrt{10})^2$

$x^2+8x+16+y^2-4y+4=10$

$\boxed{x^2+y^2+8x-4y+10=0}$



ALTERNATIVA, decisamente meno conveniente

L'equazione di una circonferenza è sempre della forma

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0\,.$$

Ora, dette $(x_0,\,y_0)$ le coordinate del centro, sappiamo che valgono le formule

$$x_0=-\frac{\alpha}{2}\ \text{ da cui }\ \alpha=-2x_0;\qquad y_0=-\frac{\beta}{2}\ \text{ da cui }\ \beta=-2y_0\,.$$

Nel nostro caso, essendo $(x_0,\,y_0)=(-4,\,2)$ avremo dunque

$$x^2+y^2+8x-4y+\gamma=0$$

quindi resterà da determinare solo γ.

A tale scopo, possiamo porre la condizione di appartenenza del punto $B(-3,5)$ e otterremo:

$$(-3)^2+5^2+8\cdot(-3)-4\cdot 5+\gamma=0;\quad 9+25-24-20+\gamma=0;\quad \gamma=10$$

In definitiva l'equazione sarà: $\boxed{x^2+y^2+8x-4y+10=0}$

3) *Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i due punti* $O(0,0)$ e $A(7,-1)$ *e ha il centro sulla retta di equazione* $x+y+1=0$

♪ 1° MODO

E' noto che in una circonferenza il centro sta sull'asse di ogni corda.
Allora per trovare il centro basterà scrivere l'equazione dell'asse del segmento OA e successivamente trovare l'intersezione fra tale asse e la retta $x+y+1=0$.

Asse di OA:

$P(x,y)$

$PO=PA$

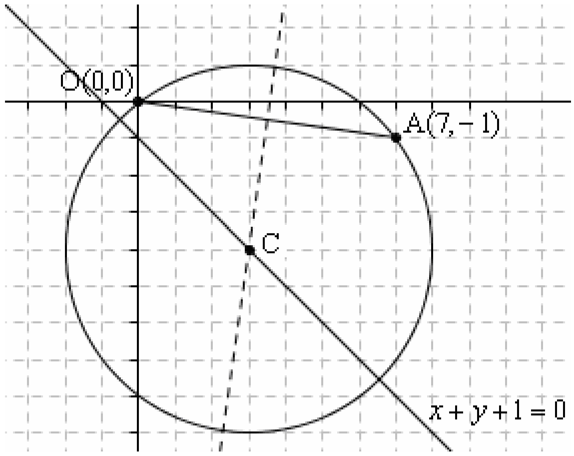
$PO^2=PA^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2=(x-7)^2+(x+1)^2$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}-14x+49+\cancel{y^2}+2y+1$

$14x-2y-50=0$

$7x-y-25=0$



Intersezione fra l'asse trovato e la retta $x+y+1=0$, per determinare il centro:

$$\begin{cases}7x-y-25=0\\ x+y+1=0\end{cases}\ \dots\ \begin{cases}x=3\\ y=-4\end{cases}\qquad C(3,\,-4)$$

Raggio: $\quad r=CO=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Equazione circonferenza: $(x-3)^2+(x+4)^2=25\ \dots\ \boxed{x^2+y^2-6x+8y=0}$

♫ 2° MODO

Presa la generica equazione di una circonferenza $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ abbiamo *3 parametri* $\alpha,\,\beta,\,\gamma$ da determinare e dobbiamo quindi fare un *sistema* con *3 condizioni*.

Appartenenza di $O(0,0)$: $\gamma=0$

Appartenenza di $A(7,-1)$: $49+1+7\alpha-\beta+\gamma=0,\ 7\alpha-\beta+\gamma=-50$

Appartenenza del centro, che ha coordinate $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$, *alla retta* $x+y+1=0$:

$$-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+1=0,\ \ -\alpha-\beta+2=0,\ \ \alpha+\beta=2$$

$$\begin{cases}\gamma=0\\ 7\alpha-\beta+\gamma=-50\\ \alpha+\beta=2\end{cases}\ \dots\ \begin{cases}\alpha=-6\\ \beta=8\\ \gamma=0\end{cases}\quad \text{da cui l'equazione: }\ \boxed{x^2+y^2-6x+8y=0}$$

4) *Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per centro il punto* $C(4,2)$ *ed è tangente alla retta* $y=3x+2$

♪ 1° MODO

Il raggio della circonferenza sarà la distanza fra il centro $C(4,2)$ e la retta $y=3x+2;\ 3x-y+2=0$.

$$r=\frac{|3\cdot 4\cancel{-2}\cancel{+2}|}{\sqrt{9+1}}=\frac{12}{\sqrt{10}}$$

Equazione:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=\left(\frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$x^2-8x+16+y^2-4y+4=\frac{144}{10}$$

$$10x^2-80x+160+10y^2-40y+40=144$$

$$10x^2+10y^2-80x-40y+56=0$$

$$\boxed{5x^2+5y^2-40x-20y+28=0}$$

♫ 2° MODO (puramente algebrico, molto meno conveniente!)

Presa la generica equazione di una circonferenza

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

la conoscenza delle coordinate del centro $C(4,2)$ ci assicura (vedi esercizio 2, "ALTERNATIVA") che è

$$\alpha=-2x_0=-8,\quad \beta=-2y_0=-4.$$

Dunque l'equazione sarà

$$x^2+y^2-8x-4y+\gamma=0.$$

Per determinare poi γ possiamo "porre la condizione di tangenza con la retta $y=3x+2$".

In pratica, il sistema finalizzato a determinare le intersezioni retta-circonferenza, ossia il sistema

$$\begin{cases} y=3x+2 \\ x^2+y^2-8x-4y+\gamma=0 \end{cases},$$

dovrà avere 1 sola soluzione.

Scriviamo dunque l'equazione risolvente del sistema

$$x^2+(3x+2)^2-8x-4(3x+2)+\gamma=0$$

$$x^2+9x^2\cancel{+12x}+4-8x\cancel{-12x}-8+\gamma=0$$

$$10x^2-8x-4+\gamma=0$$

e domandiamoci:
per quale valore di γ questa equazione, che è di 2° grado, ha eccezionalmente 1 sola soluzione anziché 2?

Un'equazione di 2° grado ha 1 sola soluzione (= 2 soluzioni coincidenti fra loro) se e soltanto se $\Delta=0$.

Quindi dovrà essere

$$\boxed{\Delta=0},$$

o anche

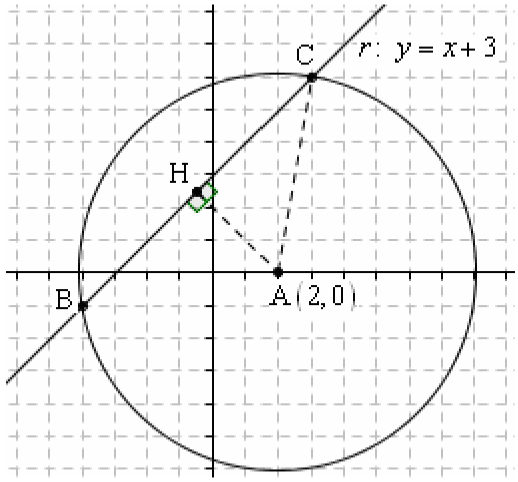
$$\boxed{\frac{\Delta}{4}=0};\ (-4)^2-10(-4+\gamma)=0;\ 16+40-10\gamma=0;\ \gamma=\frac{56}{10}=\frac{28}{5}$$

L'equazione cercata è

$$x^2+y^2-8x-4y+\frac{28}{5}=0$$

$$\boxed{5x^2+5y^2-40x-20y+28=0}$$

5) *Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro in* $A(2,0)$ *e stacca sulla retta* $r:\ y=x+3$ *una corda* BC *la cui lunghezza è* $6\sqrt{2}$.



Fatto un disegno approssimativo, possiamo tracciare la perpendicolare AH dal centro A alla corda BC. Com'è noto, tale perpendicolare taglierà a metà la corda stessa, quindi si avrà

$$BH = HC = 3\sqrt{2}.$$

Se allora calcoliamo la lunghezza del segmento AH, che è poi la distanza del centro $A(2,0)$ dalla retta

$$r:\ y=x+3;\quad x-y+3=0,$$

potremo poi, con Pitagora, determinare il raggio AC e infine, essendo noti il centro e il raggio, scrivere l'equazione richiesta.

$$AH = d(A,r) = \frac{|2-0+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = \sqrt{AH^2+HC^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}+18} = \frac{\sqrt{122}}{2}$$

Equazione circonferenza di centro $A(2,0)$ e raggio $\sqrt{122}/2$:

$$(x-2)^2+(y-0)^2=\left(\frac{\sqrt{122}}{2}\right)^2;\qquad x^2-4x+4+y^2=\frac{\cancel{122}^{61}}{\cancel{4}_2}\quad \ldots\quad \boxed{2x^2+2y^2-8x-53=0}$$

In ALTERNATIVA, si sarebbe potuto (metodo algebrico, in questo caso molto meno conveniente):

I) scrivere l'equazione della circonferenza avente per centro il punto $A(2,0)$, lasciando indicata con r la misura del raggio:

$$(x-2)^2+(y-0)^2=r^2$$

II) determinare le coordinate dei punti di intersezione di questa circonferenza con la retta $r:\ y=x+3$:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=r^2\\ y=x+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x+3\\ (x-2)^2+(x+3)^2=r^2;\ \ 2x^2+2x+13-r^2=0;\ \ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-2\left(13-r^2\right)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{2r^2-25}}{2};\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=x+3=\dfrac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}+3=\dfrac{5-\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}\qquad C:\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=x+3=\dfrac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}+3=\dfrac{5+\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}$$

III) Calcolare la distanza BC (che dipende dal parametro r) e poi domandarsi per quale valore di r tale distanza risulta uguale proprio a $6\sqrt{2}$

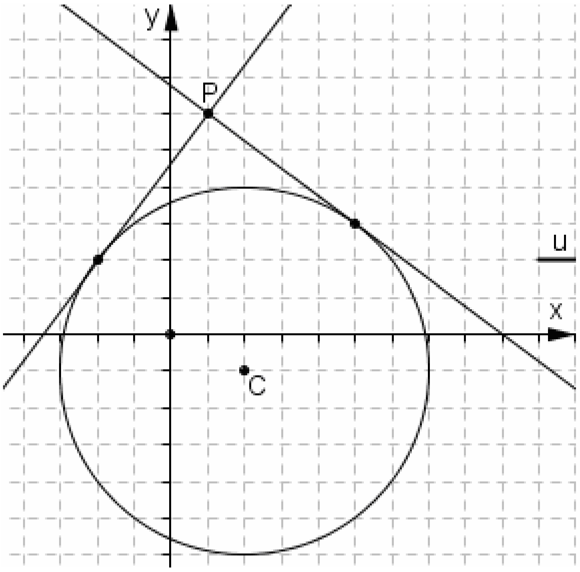
$$B:\begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=\dfrac{5-\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}\qquad C:\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}\\ y=\dfrac{5+\sqrt{2r^2-25}}{2}\end{cases}$$

$$BC=\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{2r^2-25}}{2}-\frac{-1-\sqrt{2r^2-25}}{2}\right)^2+\left(\frac{5+\sqrt{2r^2-25}}{2}-\frac{5-\sqrt{2r^2-25}}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2r^2-25}}{\cancel{2}}\right)^2+\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2r^2-25}}{\cancel{2}}\right)^2}=\sqrt{2r^2-25+2r^2-25}=\sqrt{4r^2-50}$$

$$\sqrt{4r^2-50}=6\sqrt{2};\quad 4r^2-50=72;\quad 4r^2=122;\quad r^2=\frac{122}{4};\quad r=\sqrt{\frac{122}{4}}=\frac{\sqrt{122}}{2},\ \textit{ecc.}$$

6) *Condurre dal punto* $P(1,6)$ *le tangenti alla circonferenza di equazione* $x^2+y^2-4x+2y-20=0$.



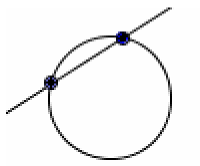
S'intende
che sono richieste
le equazioni
di queste due
rette tangenti.

Il problema può essere risolto con METODO ALGEBRICO o con METODO GEOMETRICO.

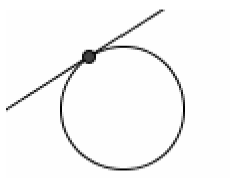
♪ Il **metodo algebrico ("METODO DEL DELTA")**
consiste nel porre l'equazione data a sistema con l'equazione della generica retta per P

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-20=0 \\ y-6=m(x-1) \end{cases}$$

per poi determinare
i valori di *m* per i quali
questo sistema di 2° grado,
anziché portare a *due* valori
per la coppia (x, y)
quindi a *due* punti di intersezione
retta-circonferenza …



… porta ad *una sola* coppia (x, y),
quindi ad *un solo*
punto di intersezione.



L'equazione risolvente sarà un'equazione di secondo grado contenente il parametro *m* nei coefficienti.

Ma un'equazione di secondo grado ammette una sola soluzione se e solo se $\Delta=0$!

Coraggio:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-20=0 \\ y=mx-m+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=mx-m+6 \\ x^2+(mx-m+6)^2-4x+2(mx-m+6)-20=0 \end{cases}$$

Considero ora la sola equazione risolvente.

$$x^2+(mx-m+6)^2-4x+2(mx-m+6)-20=0$$

Svolgo i calcoli, ordino i termini
(prima quelli con x^2, poi quelli con x, infine i "termini noti", ossia quelli non contenenti né x^2 né x)

$$x^2+m^2x^2+m^2\underset{**}{+36}-2m^2x\,\underline{+12mx}\,\underline{\underline{-12m}}-4x\,\underline{+2mx}\,\underline{\underline{-2m}}\underset{**}{+12}\underset{**}{-20}=0$$

$$x^2+m^2x^2-2m^2x+14mx-4x+m^2-14m+28=0$$

$$\left(1+m^2\right)x^2-2\left(m^2-7m+2\right)x+\left(m^2-14m+28\right)=0$$

A questo punto NON MI INTERESSA *risolvere* l'equazione:
mi interessa invece cercare quali sono i valori di m per cui l'equazione ha 1 sola soluzione anziché 2.

E tali valori di m saranno quelli per i quali il Δ dell'equazione (o, indifferentemente, il Δ " della formula ridotta", ossia il $\Delta/4$) è uguale a 0.

$$\boxed{\frac{\Delta}{4}=0}$$

$$\left(m^2-7m+2\right)^2-\left(1+m^2\right)\left(m^2-14m+28\right)=0$$

$$\cancel{m^4}\ \underline{+49m^2}\ \underset{**}{+4}\ \cancel{-14m^3}\ \underline{+4m^2}\ \underline{\underline{-28m}}\ \underline{-m^2}\ \underline{\underline{+14m}}\ \underset{**}{-28}\ \cancel{-m^4}\ \cancel{+14m^3}\ \underline{-28m^2}=0$$

$$24m^2-14m-24=0$$

$$m_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+576}}{24}=\frac{7\pm\sqrt{625}}{24}=\frac{7\pm 25}{24}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{18}{24}=-\frac{3}{4}\\ \frac{32}{24}=\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Le due rette tangenti hanno dunque equazioni:

$$y-6=m(x-1)$$

con $m=-\frac{3}{4}$ o, rispettivamente, $m=\frac{4}{3}$

e sono perciò:

$$t_1:\ y-6=-\frac{3}{4}(x-1);\quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+6;\quad \boxed{y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{4}}$$

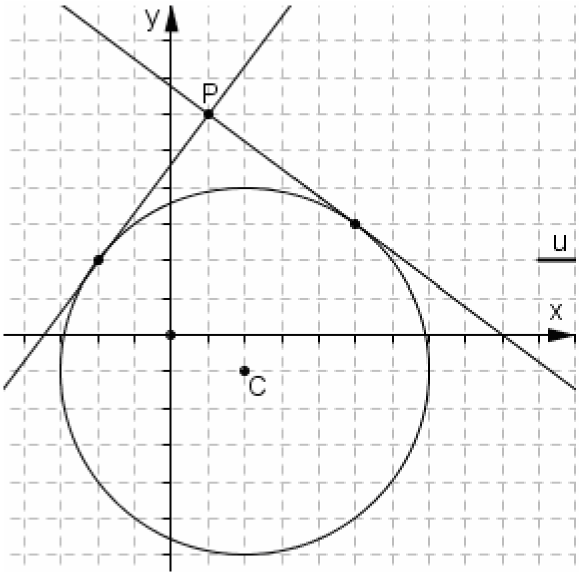
$$t_2:\ y-6=\frac{4}{3}(x-1);\quad y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}+6;\quad \boxed{y=\frac{4}{3}x+\frac{14}{3}}$$

♫ Il **metodo geometrico ("METODO DELLA DISTANZA")**
consiste nello scrivere l'equazione della generica retta per P: $y-6=m(x-1)$
e nell'imporre la condizione che tale retta abbia distanza, dal centro della circonferenza (le cui coordinate sono immediatamente ricavabili dall'equazione), uguale al raggio della circonferenza stessa (anch'esso ricavabile dall'equazione).

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

$$C\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)=(2,-1)$$

$$r=\sqrt{4+1+20}=5$$



Distanza della retta
$y-6=m(x-1)$
ossia
$y=mx-m+6$
o anche
$mx-y-m+6=0$
dal centro $(2,-1)$:

$$d=\frac{|m\cdot 2-(-1)-m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2m+1-m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$d=5$$

$$\frac{|m+7|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

$$|m+7|=5\sqrt{m^2+1}$$

$$m^2+14m+49=25m^2+25$$

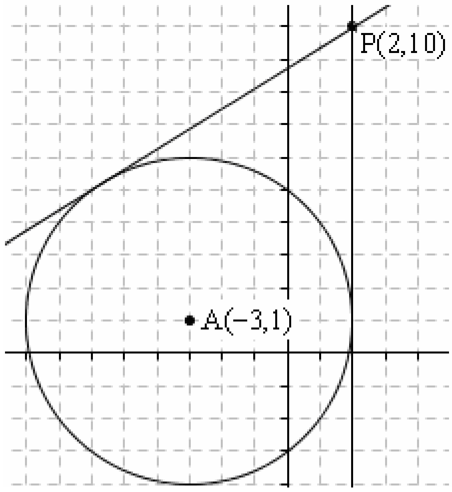
$$-24m^2+14m+24=0$$

$$12m^2-7m-12=0$$

$$m_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+576}}{24}=\left\langle\begin{array}{l}-3/4\\ 4/3\end{array}\right.$$

valori uguali a quelli determinati col metodo precedente!

7) *Condurre dal punto* $P(2,10)$ *le tangenti alla circonferenza di centro* $A(-3,1)$ *e raggio* 5.



L'interesse di questo problema sta nel fatto che il punto è esterno,
quindi le tangenti sono due,
ma scrivendo l'equazione della generica retta per P

$$y-10=m(x-2)$$

e poi applicando
il metodo del delta o il metodo della distanza,
di tangente se ne trova una sola.

E per forza!
La seconda tangente è, in questo caso, una retta parallela all'asse y,
quindi non rappresentabile sotto la forma

$$y-y_0=m(x-x_0)\,.$$

La tangente mancante, dunque,
non verrà determinata col calcolo,
ma semplicemente dall'osservazione del disegno.

♪ Metodo del Δ:

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-1)^2=25\\ y-10=m(x-2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+6x+9+y^2-2y+1=25\\ y-10=mx-2m\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+6x-2y-15=0\\ y=mx-2m+10\end{cases}$$

$$x^2+(mx-2m+10)^2+6x-2(mx-2m+10)-15=0$$

$$x^2+m^2x^2+4m^2+100-4m^2x\underline{+20mx}\underline{\underline{-40m}}+6x\underline{-2mx}\underline{\underline{+4m}}-20-15=0$$

$$x^2+m^2x^2-4m^2x+18mx+6x+4m^2-36m+65=0$$

$$(1+m^2)x^2-2(2m^2-9m-3)x+(4m^2-36m+65)=0$$

$$\boxed{\frac{\Delta}{4}=0}$$

$$(2m^2-9m-3)^2-(1+m^2)(4m^2-36m+65)=0$$

$$\cancel{4m^4}\ \cancel{+81m^2}+9\cancel{-36m^3}\ \cancel{-12m^2}\ \underline{\underline{+54m}}\ \cancel{-4m^2}\ \underline{\underline{+36m}}-65\cancel{-4m^4}\cancel{+36m^3}\ \cancel{-65m^2}=0$$

$$90m-56=0$$

$$m=\frac{56}{90}=\frac{28}{45}$$

Una tangente ha dunque equazione $y-10=\frac{28}{45}(x-2)\to\boxed{y=\frac{28}{45}x+\frac{394}{45}}$;

L'altra tangente equazione *che si trae direttamente dalla figura*: $\boxed{x=2}$

♫ In ALTERNATIVA, metodo della distanza:
imponiamo che sia uguale a 5 la distanza della retta $y-10=m(x-2)$ dal punto $A(-3,1)$

$$y-10=m(x-2)$$

$$y-10=mx-2m$$

$$mx-y-2m+10=0$$

$$\frac{|m\cdot(-3)-1-2m+10|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

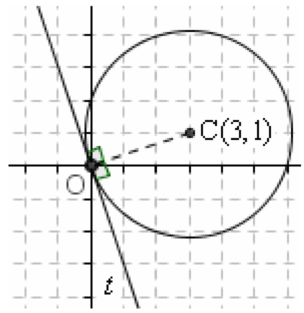
$$\frac{|-3m-1-2m+10|}{\sqrt{m^2+1}}=5;\quad \frac{|-5m+9|}{\sqrt{m^2+1}}=5;\quad |-5m+9|=5\sqrt{m^2+1};$$

$$\cancel{25m^2}-90m+81=\cancel{25m^2}+25;\quad -90m=-56;\quad m=\frac{56}{90}=\frac{28}{45}$$ ... *stesse conclusioni di prima.*

8) *Scrivere l'equazione della retta tangente nell'origine alla circonferenza* $x^2+y^2-6x-2y=0$

La differenza fra questo problema e i due precedenti sta nel fatto che QUESTA VOLTA IL PUNTO APPARTIENE ALLA CIRCONFERENZA.

Oltre al *metodo del delta* e al *metodo della distanza*, abbiamo allora a disposizione anche un terzo e comodissimo metodo, che potremmo chiamare "**METODO DELLA PERPENDICOLARITA'** ": la tangente cercata è semplicemente la retta, passante per l'origine, e ivi perpendicolare al raggio che ha un estremo nell'origine.



Determiniamo dunque il coefficiente angolare della retta CO:

$$m_{CO}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_C-y_O}{x_C-x_O}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

dopodiché sarà $m_t=-3$ da cui:

$\boxed{t:\ y=-3x}$

9) Scrivi le equazioni delle circonferenze, col centro sull'asse *y*, tangenti alle due rette $r_1: y=-2x-4;\quad r_2: y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

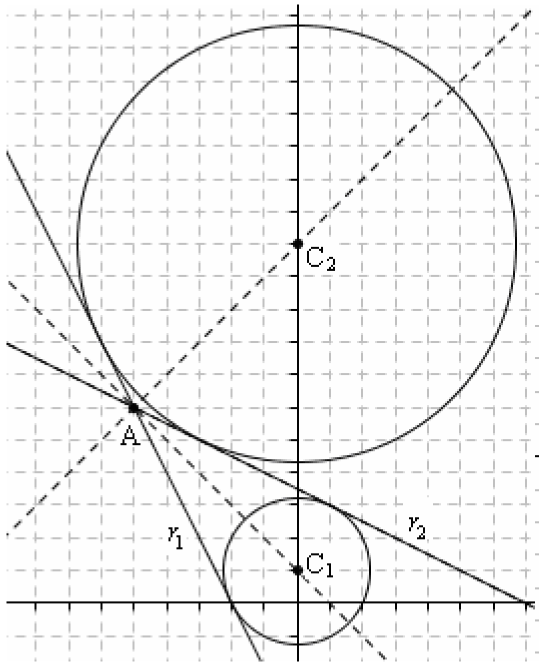
♪ METODO GEOMETRICO

Facendo la figura si vede che il problema ha 2 soluzioni.

In ciascuno dei due casi, il centro può essere determinato come intersezione fra l'asse *y* e una delle bisettrici (tratteggiate) degli angoli formati dalle rette r_1, r_2.

Il raggio sarà poi la distanza fra il centro così trovato e r_1 o, indifferentemente, r_2.

Noti il centro e il raggio si scriverà l'equazione richiesta. Fai tu tutti i calcoli.



♫ Il METODO ALGEBRICO è più pesante. Vediamolo.

Si scrive l'equazione della generica circonferenza che ha per centro un punto $C(0,k)$ sull'asse *y* e raggio indicato con *r*:

$$(x-0)^2+(y-k)^2=r^2.$$

Tale equazione contiene due parametri *k*, *r*.

Si tratta ora di determinare tali due parametri in modo che la circonferenza sia tangente a entrambe le rette r_1, r_2.

Condizione di tangenza con

$$r_1:\ \begin{cases} x^2+(y-k)^2=r^2 \\ y=-2x-4 \end{cases}$$

$$x^2+(-2x-4-k)^2=r^2$$

$$5x^2+4(4+k)x+(16+8k+k^2-r^2)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0\quad 4(4+k)^2-5(16+8k+k^2-r^2)=0$$

$$-k^2-8k-16+5r^2=0$$

$$r_2:\ \begin{cases} x^2+(y-k)^2=r^2 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$x^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-k\right)^2=r^2$$

$$5x^2-2(7-2k)x+(49-28k+4k^2-4r^2)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0\quad (7-2k)^2-5(49-28k+4k^2-4r^2)=0$$

$$-16k^2+112k-196+20r^2=0$$

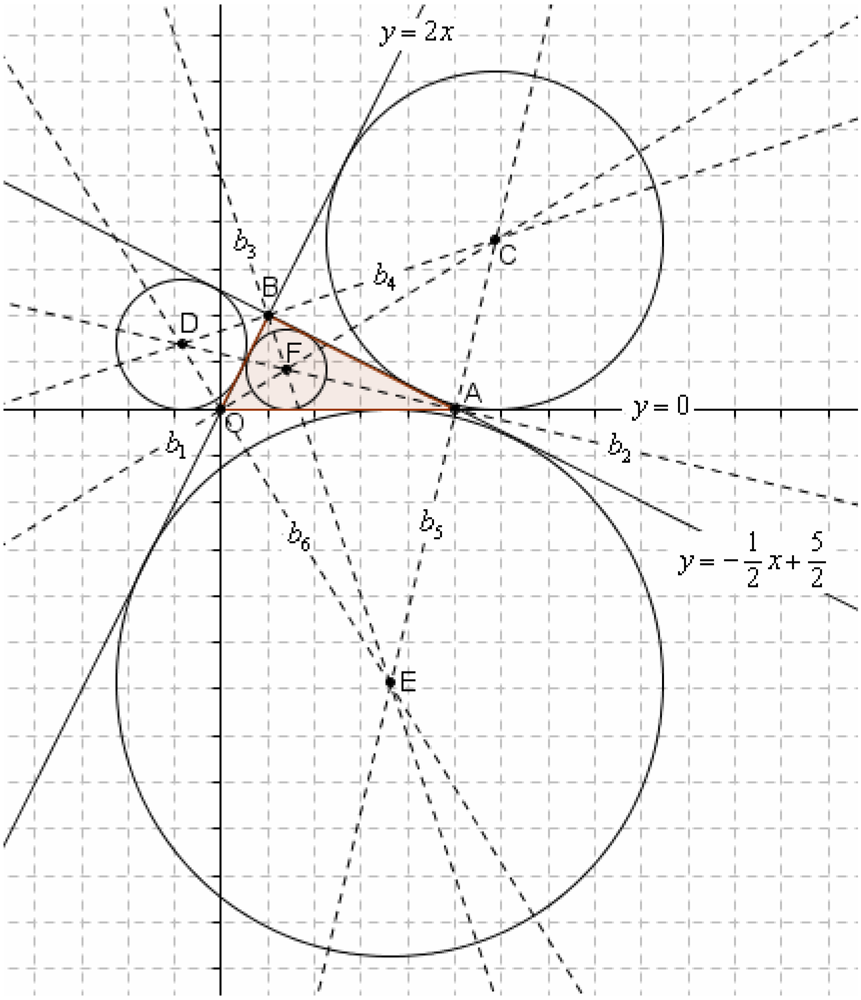
$$\begin{cases} -k^2-8k-16+5r^2=0 \\ -16k^2+112k-196+20r^2=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} 4k^2+32k+64-20r^2=0 & (1^a\ eq.)\cdot(-4) \\ -16k^2+112k-196+20r^2=0 \end{cases}$$

$$(1)+(2)\quad -12k^2+144k-132=0;\quad k^2-12k+11=0;\quad (k-1)(k-11)=0;\quad k=1\vee k=11$$

$$\begin{cases} k=1 \\ -1-8-16+5r^2=0;\ \ r^2=25;\ \ r=\sqrt{5} \end{cases}\quad\vee\quad \begin{cases} k=11 \\ -121-88-16+5r^2=0;\ \ r^2=45;\ \ r=\sqrt{45}=3\sqrt{5} \end{cases}$$

10) *Scrivi le equazioni delle circonferenze tangenti alle tre rette* $y=0,\ \ y=2x,\ \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Il metodo geometrico è di gran lunga il più efficace.
Si tratta di trovare i centri intersecando le bisettrici di opportuni angoli, poi …
Procediamo.



Equazioni di b_1 e b_6, bisettrici degli angoli formati dalle rette $y=0$ e $y=2x$ $(2x-y=0)$:

$$\frac{|y|}{\sqrt{0+1}}=\frac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}};\quad |y|=\frac{|2x-y|}{\sqrt{5}};\quad |y|\sqrt{5}=|2x-y|;\quad y\sqrt{5}=\pm(2x-y)$$

I) $y\sqrt{5}=2x-y;\quad y\sqrt{5}+y=2x;\quad y\left(\sqrt{5}+1\right)=2x;\quad y=\frac{2x}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1}x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x\ \ (b_1)$

II) $y\sqrt{5}=-2x+y;\quad y\sqrt{5}-y=-2x;\quad y\left(\sqrt{5}-1\right)=-2x;\quad y=-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=-\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}x=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\ \ (b_6)$

Equazioni di b_2 e b_5, bisettrici degli angoli formati da $y=0$ e $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ $(x+2y-5=0)$:

$$\frac{|y|}{\sqrt{0+1}}=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{1+4}};\quad |y|=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{5}};\quad |y|\sqrt{5}=|x+2y-5|;\quad y\sqrt{5}=\pm(x+2y-5)$$

I) $y\sqrt{5}=x+2y-5;\quad y\sqrt{5}-2y=x-5;\quad y\left(\sqrt{5}-2\right)=x-5;$

$$y=\frac{x-5}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(x-5)\left(\sqrt{5}+2\right)}{5-4}=\left(\sqrt{5}+2\right)x-5\left(\sqrt{5}+2\right)\ \ (b_5)$$

II) $y\sqrt{5}=-x-2y+5;\quad y\sqrt{5}+2y=-x+5;\quad y\left(\sqrt{5}+2\right)=-x+5;$

$$y=\frac{-x+5}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{(-x+5)\left(\sqrt{5}-2\right)}{5-4}=-\left(\sqrt{5}-2\right)x+5\left(\sqrt{5}-2\right)\ \ (b_2)$$

Equazioni di b_3 e b_4, bisettrici degli angoli formati da $y=2x$ $(2x-y=0)$ e $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ $(x+2y-5=0)$:

$$\frac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|x+2y-5|}{\sqrt{1+4}};\quad \frac{|2x-y|}{\cancel{\sqrt{5}}}=\frac{|x+2y-5|}{\cancel{\sqrt{5}}};\quad 2x-y=\pm(x+2y-5)$$

I) $2x-y=x+2y-5;\ -3y=-x-5;\ 3y=x+5;\ y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ (b_4)

II) $2x-y=-x-2y+5;\ y=-3x+5$ (b_3)

$$b_1\cap b_2\ \text{(F)}:\ \begin{cases} y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x \\ y=-\left(\sqrt{5}-2\right)x+5\left(\sqrt{5}-2\right)\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}x=-\left(\sqrt{5}-2\right)x+5\left(\sqrt{5}-2\right)$$

$$x\sqrt{5}-x=-2x\sqrt{5}+4x+10\sqrt{5}-20;$$

$$3x\sqrt{5}-5x=10\sqrt{5}-20;$$

$$\left(3\sqrt{5}-5\right)x=10\left(\sqrt{5}-2\right);$$

$$x=\frac{10\left(\sqrt{5}-2\right)}{3\sqrt{5}-5}\cdot\frac{3\sqrt{5}+5}{3\sqrt{5}+5}=\frac{10\left(15+5\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10\right)}{45-25}=\frac{10\left(5-\sqrt{5}\right)}{20}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x=\frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}-5-5+\sqrt{5}}{4}=\frac{6\sqrt{5}-10}{4}=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\end{cases}$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$$

Raggio della circonferenza di centro $\mathrm{F}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$: $r=d(\mathrm{F},\ y=0)=|y_\mathrm{F}|=\left|\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right|=\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$

$\boxed{\text{Equazione della circonferenza di centro F}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)\text{: e raggio} =\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$:

$$\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2$$

$$x^2-\left(5-\sqrt{5}\right)x+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2+y^2-\left(3\sqrt{5}-5\right)y+\cancel{\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2}=\cancel{\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2-\left(5-\sqrt{5}\right)x-\left(3\sqrt{5}-5\right)y+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2=0}$$

o anche

$$\boxed{4x^2+4y^2-4\left(5-\sqrt{5}\right)x-4\left(3\sqrt{5}-5\right)y+\left(5-\sqrt{5}\right)^2=0}$$

Abbiamo proposto questo esercizio come esempio di problema
con calcoli più complicati del solito;
prosegui ora tu, se lo desideri, con le equazioni delle altre tre circonferenze.