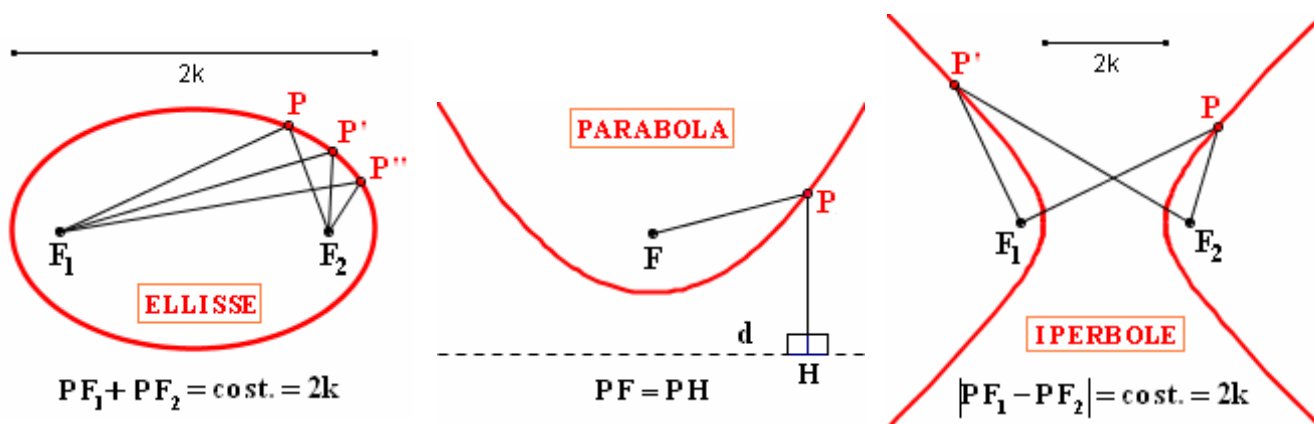


33. LE CONICHE, IN GENERALE, NEL PIANO CARTESIANO

Si dicono “coniche” tre particolari curve
- o meglio: *tipologie* di curve -
chiamate, rispettivamente, *ellisse*, *parabola* e *iperbole*.

Eccone le definizioni.



Si dice “ellisse”
il luogo
dei punti del piano
per i quali è costante
la somma delle distanze
da due punti fissi,
detti “fuochi”

Si dice “parabola”
il luogo dei punti del piano,
equidistanti
da un punto fisso F
(detto “fuoco”)
e da una retta fissa d
(detta “direttrice”)

Si dice “iperbole”
il luogo
dei punti del piano
per i quali è costante
la differenza delle distanze
da due punti fissi,
detti “fuochi”

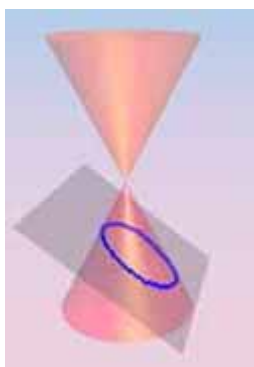
Ma cosa possono avere in comune
tre curve apparentemente così diverse fra loro?
E perché mai vengono chiamate “coniche”?

Bene:

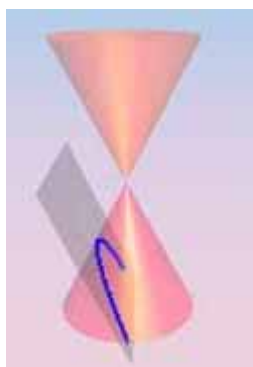
sezionando con un piano una doppia superficie conica
(illimitata da entrambe le parti)

si può ottenere,

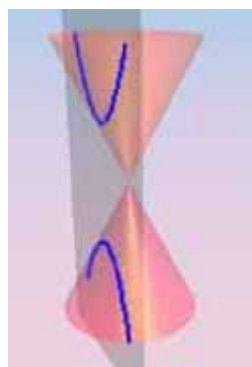
a seconda dell'inclinazione del piano secante rispetto all'asse del cono:



una curva
chiusa...



oppure una curva
aperta,
ad un solo ramo ...



oppure una curva
aperta,
a due rami

Figure
tratte
dal sito
btc.montana.edu/ceres/
(Montana State
University)

Si può ora dimostrare che queste tre tipologie di curve, definite “tridimensionalmente”,
corrispondono proprio alle tre definizioni di “ellisse”, “parabola” e “iperbole” viste all’inizio,
definizioni le quali erano basate esclusivamente su considerazioni di “geometria piana” !!!

**Ad esempio, per quanto riguarda l'ellisse,
vale il seguente teorema (Dandelin, 1822):**

Quando l'intersezione fra una superficie conica e un piano
è una linea chiusa,
questa linea può essere pensata
come il luogo dei punti P del piano secante per i quali si ha
 $PF_1 + PF_2 = \text{costante}$,
dove:

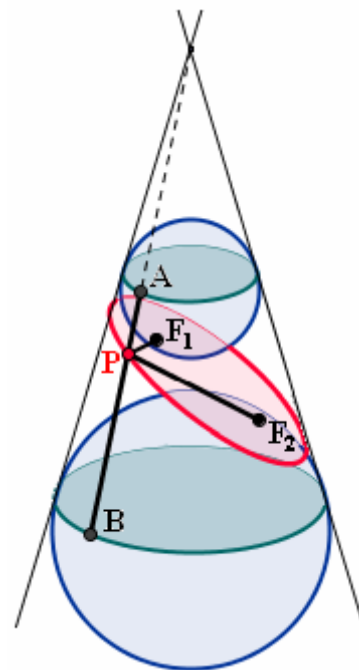
F_1, F_2 sono i punti di contatto fra il piano secante e le due sfere della figura
(ciascuna delle quali è tangente al piano secante e alla superficie conica)
mentre la costante è la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze lungo le quali le sfere toccano la superficie conica.

DIMOSTRAZIONE

(senza approfondire i dettagli ...)

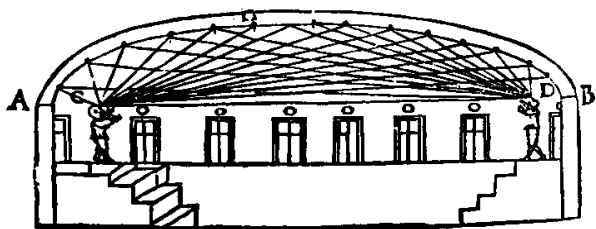
P, il generico punto della linea di cui ci stiamo occupando, è tale che $PF_1 = PA$ e $PF_2 = PB$
(tangenti alla sfera da uno stesso punto esterno!), per cui

$PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB = \text{costante}$
(costante perché AB ha sempre la stessa lunghezza:
la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze, è sempre la medesima,
dovunque venga misurata).



Le coniche abbondano di sorprendenti e meravigliose PROPRIETA'

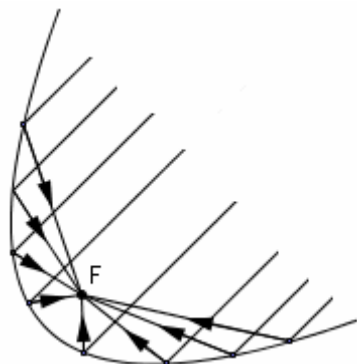
Citiamone una riguardante l'**ellisse**: si può dimostrare che
**se un raggio - ad esempio di luce - uscente da un fuoco impatta sulla curva,
il raggio riflesso passerà per l'altro fuoco!**



La volta di questa camera è un ellissoide di rotazione.
Se una persona bisbiglia piano piano
con la bocca in corrispondenza di uno dei fuochi,
un amico con l'orecchio nell'altro fuoco
potrà udire chiaramente ogni sua parola,
mentre tutti gli altri presenti nella stanza
non sentiranno nulla.

Una variante consiste
nel piazzare due fiammiferi nei due fuochi:
fregando uno di essi per accenderlo, ecco che
si accenderà istantaneamente pure quell'altro.

Anche la **parabola** gode di una proprietà notevole per quanto riguarda la riflessione.
**Un raggio che viaggia parallelamente all'asse di simmetria della parabola,
quando impatta sulla curva, viene riflesso nel fuoco.**



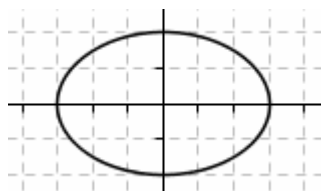
Questo fatto ha un'applicazione notevolissima in tecnologia:
le antenne paraboliche sono infatti caratterizzate
da una forma a paraboloide di rotazione;
le onde elettromagnetiche
provenienti da lontano
vengono concentrate nel fuoco,
dove è collocato il dispositivo di ricezione.

Le coniche sono le curve “associate a relazioni algebriche di secondo grado”.

E' possibile dimostrare che un'equazione della forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,
ossia **un'equazione di secondo grado in due variabili**, rappresenta sempre, nel piano cartesiano,
una conica (eventualmente degenera),
e precisamente:

- una conica di tipo **ellittico** se $b^2 - 4ac < 0$
- una conica di tipo **parabolico** se $b^2 - 4ac = 0$
- una conica di tipo **iperbolico** se $b^2 - 4ac > 0$

Esempi:



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

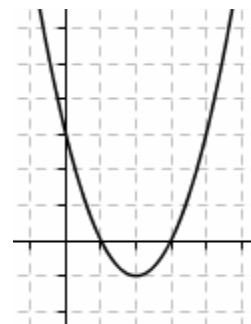
Ellisse,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle x .

Forma implicita dell'equazione :

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

$$a = 4, b = 0, c = 9, d = 0, e = 0, f = -36$$

$$b^2 - 4ac = -144 < 0 \rightarrow \text{tipo ellittico}$$



$$y = x^2 - 4x + 3$$

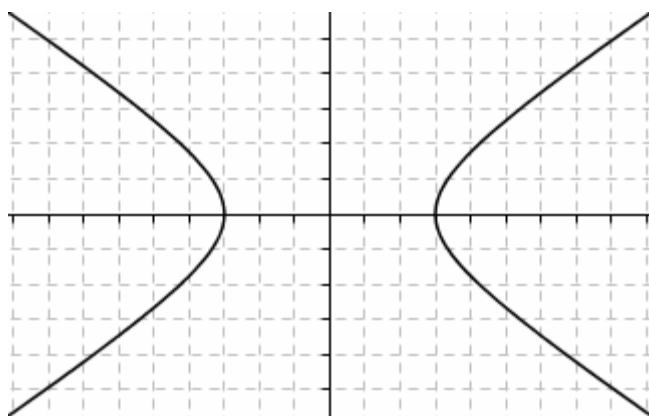
Parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse y .

Forma implicita dell'equazione :

$$x^2 - 4x - y + 3 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = 0, d = -4, e = -1, f = 3$$

$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow \text{tipo parabolico}$$



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

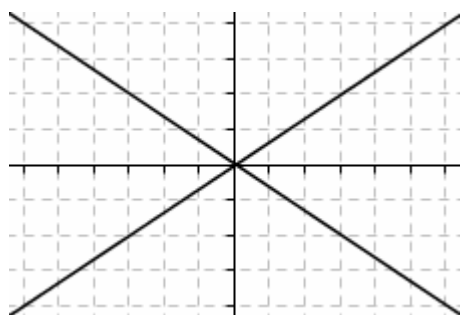
Iperbole,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle x .

Forma implicita dell'equazione :

$$4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$$

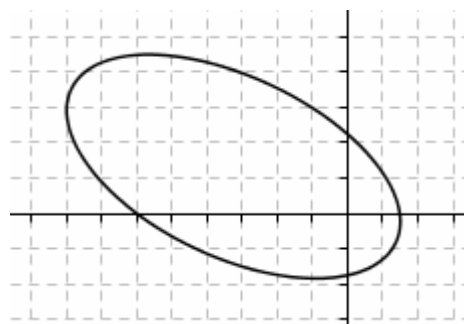
$$a = 4, b = 0, c = -9, d = 0, e = 0, f = -36$$

$$b^2 - 4ac = 144 > 0 \rightarrow \text{tipo iperbolico}$$



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0 \quad (4x^2 - 9y^2 = 0)$$

Iperbole degenera in una coppia di rette



$$\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{y}{8} = 1$$

$$(8x^2 + 12xy + 18y^2 + 36x - 9y - 72 = 0)$$

Ellisse
“traslata
e ruotata”

Le coniche hanno un'importanza straordinaria nel mondo fisico.

Ogniquale volta un corpo celeste orbita intorno ad un altro

(la Luna intorno alla Terra,
i Pianeti intorno al Sole,
le Comete intorno al Sole ...)

la traiettoria dell'orbita sarà sempre una conica !!!

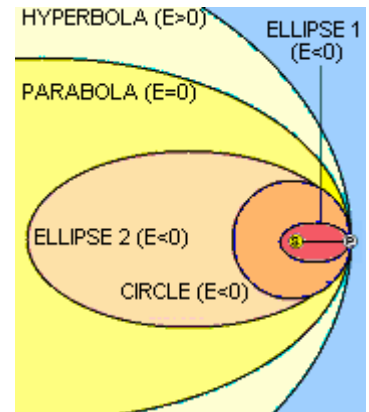
Di norma si tratta di un'ellisse
(ad es., le orbite dei pianeti intorno al sole sono delle ellissi,
di cui il sole occupa sempre uno dei fuochi),
ma nel caso di una cometa potrebbe trattarsi
(se la cometa non è "periodica") anche di un ramo di iperbole:
la cometa passa in prossimità del sole una sola volta,
poi si allontana verso gli spazi stellari
e non si avvicinerà mai più.

**Il tipo di orbita dipende dall' "energia totale"
(cinetica+potenziale) del corpo orbitante:**

$E < 0 \rightarrow$ orbita ellittica

$E = 0 \rightarrow$ orbita parabolica

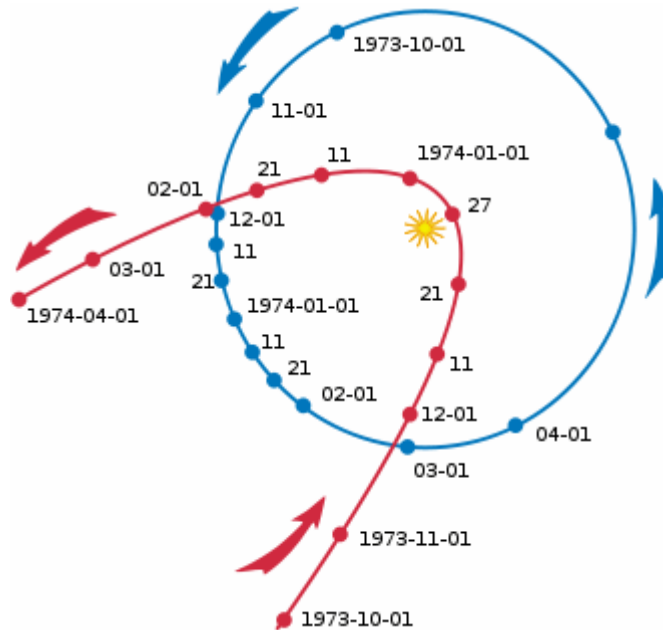
$E > 0 \rightarrow$ orbita iperbolica



La figura sopra riportata
è tratta dal sito
"The Celestial Sphere"
di Vik Dhillon,
Sheffield University, UK

Qui a fianco:
l'orbita
della cometa
Kohoutek
e l'orbita
della Terra.

Questa cometa
percorre
un tragitto
ellittico
facendo
un giro
completo
ogni circa
75.000 anni.



La cometa di Hale-Bopp
fotografata
da Philipp Salzgeber
il 29 marzo 1997

**Il fatto che l'attrazione gravitazionale generi traiettorie
a forma di conica, è legato alla proprietà
della forza F di attrazione gravitazionale
di essere inversamente proporzionale al quadrato
della distanza d delle due masse m_1, m_2 che si attraggono:**

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad (G = \text{"costante di gravitazione universale"})$$

Se la forza responsabile del moto ha questa espressione,
si può far vedere che le possibili traiettorie del moto
sono esclusivamente le curve associate ad equazioni
di 2° grado, ossia, come abbiamo visto, le coniche.

**Se lanciamo un oggetto
verso l'alto
(non verticalmente)
la forza di gravità
lo porterà a muoversi
lungo un arco di parabola.**



L'EQUAZIONE GENERALE DI UNA CONICA NEL PIANO CARTESIANO

Una trattazione più avanzata delle coniche mostrerebbe che:

- **l'equazione di una qualsivoglia conica nel piano cartesiano può essere sempre portata sotto la forma:**

$$(1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

- **e, viceversa, un'equazione della forma (1) rappresenta sempre, a seconda dei casi:**

- una conica non degenerare
- una conica degenerare (in un punto, oppure in una coppia di rette, distinte o coincidenti)
- il luogo vuoto

♪ C'E' IL TERMINE RETTANGOLARE? ALLORA LA CONICA E' RUOTATA!!!

Se è presente il "TERMINE RETTANGOLARE" (= quello con xy)

ciò indica che la conica è "RUOTATA" rispetto agli assi,

nel senso che gli assi di simmetria della conica NON sono paralleli agli assi del riferimento cartesiano.

♪ MA TU CHE TIPO SEI?

Esistono metodi per riconoscere, a partire dai 6 coefficienti, di che tipo è la conica (ellisse, parabola, o iperbole), e se è degenerare o no.

Ci accontentiamo qui di affermare che **una conica risulta di tipo:**

ellittico se	$b^2 - 4ac < 0$
parabolico se	$b^2 - 4ac = 0$
iperbolico se	$b^2 - 4ac > 0$

ESERCIZI

Fra le coniche seguenti, riconosci quelle di tipo ellittico, parabolico, iperbolico:

- 1) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 5x - y + 2 = 0$
- 2) $9x^2 - 6xy + y^2 - 5x - 4 = 0$
- 3) $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = 0$
- 4) $9x^2 + 9y^2 = 1$
- 5) $y^2 - x + 3y - 5 = 0$
- 6) $x^2 + y^2 = x + y - 4xy$

Stabilisci per quali valori del parametro k la conica in esame è di tipo ellittico, parabolico, iperbolico:

- 7) $x^2 - 2kxy + y^2 = 0$
- 8) $kx^2 + y^2 - kx + 1 = 0$
- 9) $kx^2 + xy - y^2 + x + 2y + 3 = 0$

RISPOSTE

- 1) I 2) P 3) I 4) E 5) P 6) I

7) Ellittico per $-1 < k < 1$; parabolico per $k = \pm 1$; iperbolico per $k < -1 \vee k > 1$.

8) Ellittico per $k > 0$; parabolico per $k = 0$; iperbolico per $k < 0$.

9) Ellittico per $k < -\frac{1}{4}$; parabolico per $k = -\frac{1}{4}$; iperbolico per $k > -\frac{1}{4}$.

CONICHE “DEGENERI”

♪ Sappiamo che la parabola è definita come il luogo dei punti del piano, aventi la proprietà di essere equidistanti da un punto fissato (“fuoco”) e da una retta fissata (“direttrice”). Ora, se il fuoco appartenesse alla direttrice, cosa succederebbe? La parabola diventerebbe un insieme di punti molto particolare ... che ne dici?

♪ Cosa accade ad una iperbole se modifichiamo la sua equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

facendola diventare $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k$ con $k > 0$ preso molto piccolo, sempre più piccolo?

E se addirittura pensassimo all'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$?

Riflessioni di questo tipo ci portano a considerare i “casi limite”, i “casi estremi” di coniche ... ossia le cosiddette “coniche *degeneri*”.

□ Ad esempio, una parabola col fuoco appartenente alla direttrice degenera in una coppia di rette coincidenti passanti per il fuoco e perpendicolari alla direttrice (il perché si parli di una “coppia di rette coincidenti” e non di una singola retta si comprende bene se si costruisce, mentalmente o col disegno, una specie di “cartone animato” in cui il fuoco si avvicina progressivamente sempre più alla direttrice (provaci!), oppure se si pensa che le coniche di tipo parabolico sono rappresentate, in coordinate, da quelle equazioni di 2° grado in 2 variabili $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ nelle quali è $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, e un'equazione riconducibile alla forma $(px + qy + r)^2 = 0$, che rappresenta evidentemente una “retta contata 2 volte”, ha proprio questa proprietà.

□ L'equazione (prendiamo un caso specifico per semplicità) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$,

si può riscrivere come $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) = 0$ e rappresenta quindi una coppia di rette ...

se si pensa al “cartone animato” dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k$ con $k > 0$ sempre più piccolo, si capisce

che è logico pensare alla $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$ come all'equazione di una “iperbole degenera nei suoi asintoti”.

D'altronde, come abbiamo visto, le coniche dei tre tipi (ellissi-parabole-iperboli) si possono anche definire partendo dalla situazione geometrica tridimensionale di una superficie conica illimitata a due falde, intersecata da un piano il quale, rispetto all'asse del cono, potrà avere inclinazione diversa.

Ora, se il piano secante passasse proprio per il vertice comune delle due superfici coniche, ecco le “coniche degeneri” dei tre tipi.

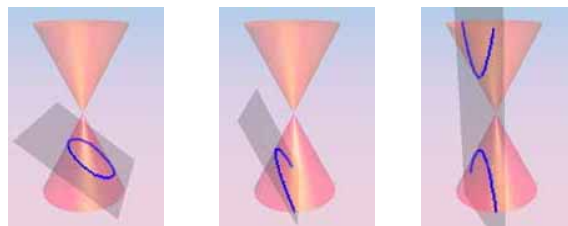


Figure tratte dal sito btc.montana.edu/ceres/
(Montana State University)

Quest'ultima è in realtà la *definizione* che la comunità matematica assegna alla locuzione “coniche degeneri”. Dunque una conica degenera può consistere

- in un singolo punto (conica degenera di tipo *ellittico*)
- in una coppia di rette coincidenti (conica degenera di tipo *parabolico*)
- oppure in una coppia di rette incidenti (conica degenera di tipo *iperbolico*).

Si potrebbe poi dimostrare che una conica di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ è degenera se, e soltanto se, la sua equazione si può portare sotto la forma $(px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0$, e si potrebbe anche individuare la condizione alla quale i 6 coefficienti dell'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ soddisfano, nel caso in cui la conica sia degenera.

Ma tali approfondimenti non rientrano nei limiti di questo corso.

UNA CONICA E' INDIVIDUATA DA 5 PUNTI

Una conica è univocamente determinata quando se ne conoscono 5 punti!

Ci possiamo rendere conto del *perché* i punti debbano essere proprio 5

se pensiamo che, essendo l'equazione generale di una conica della forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, i parametri in gioco sarebbero *apparentemente* 6, ma questa 6-upla è in realtà una sestupla "omogenea", nella quale cioè i numeri in gioco sono determinati "a meno di una costante di proporzionalità" e quindi per rappresentare una conica assegnata uno di essi, ad esempio il primo, potrebbe benissimo essere scelto a piacere (ad esempio, essere scelto =1) dopodiché resterebbero da stabilire i valori dei rimanenti, cioè appunto di 5 numeri.

Spieghiamoci meglio. Consideriamo, ad esempio, l'equazione $x^2 + 2xy - 3y^2 - 4x + 5y + 6 = 0$.

Essa rappresenterà una determinata conica (eventualmente degenerare, o vuota).

Bene! Che dire ora dell'equazione $2x^2 + 4xy - 6y^2 - 8x + 10y + 12 = 0$

ottenuta dalla precedente moltiplicandone tutti i coefficienti a, b, c, d, e, f per 2?

E' ovvio che questa seconda equazione, essendo verificata esattamente dalle medesime coppie (x, y)

che verificano la precedente, rappresenterà *la stessa identica conica di prima*.

Raddoppiando i coefficienti, la conica è rimasta tale e quale ...

Insomma, se per rappresentare una conica va bene un'equazione con certi coefficienti a, b, c, d, e, f , allora prendendo invece come coefficienti ka, kb, kc, kd, ke, kf , con k numero reale non nullo arbitrario, la conica rappresentata è sempre la stessa, non muta.

Ma allora a partire dalla forma generale $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

per cercare quei valori dei parametri che individuano una data conica assegnata,

noi non dobbiamo andare alla caccia di 6 numeri, ma di 5 solamente, in quanto 1 di essi si può fissare a piacere, e saranno poi *gli altri 5* a dover essere determinati.

Dunque per individuare l'equazione di una conica servono 5 condizioni,

e la conoscenza del passaggio per 5 punti ci fornisce proprio 5 condizioni.

Facciamo un *esempio*.

Se ci è richiesto di determinare la conica passante per i punti $(0, -4); (1, 0); (1, 1); (-5, 1); (2, -6)$, noi potremo:

I) partire dalla rappresentazione $x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, nella quale abbiamo scelto $a = 1$,

$$\text{e porre le 5 condizioni di appartenenza: } \begin{cases} (0, -4) & \begin{cases} 16c - 4e + f = 0 \\ 1 + d + f = 0 \end{cases} \\ (1, 1) & 1 + b + c + d + e + f = 0 \\ (-5, 1) & 25 - 5b + c - 5d + e + f = 0 \\ (2, -6) & 4 - 12b + 36c + 2d - 6e + f = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, che ha 5 equazioni e 5 incognite, si trova $a = 1; b = 1; c = 0; d = 3; e = -1; f = -4$ da cui l'equazione $x^2 + xy + 3x - y - 4 = 0$

II) oppure partire dalla rappresentazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

$$\text{e, ponendo le 5 condizioni di appartenenza, pervenire al sistema } \begin{cases} (0, -4) & \begin{cases} 16c - 4e + f = 0 \\ a + d + f = 0 \end{cases} \\ (1, 1) & a + b + c + d + e + f = 0 \\ (-5, 1) & 25a - 5b + c - 5d + e + f = 0 \\ (2, -6) & 4a - 12b + 36c + 2d - 6e + f = 0 \end{cases}$$

nel quale le incognite sono 6, ma le equazioni sono solo 5.

Sappiamo che, in generale, sistemi siffatti sono "indeterminati con 1 grado di libertà",

ossia tali che 5 fra le incognite possano essere espresse in funzione dell'incognita rimanente.

Risolvendo, se per esempio decidiamo di esprimere le incognite b, c, d, e, f in funzione di a , otteniamo

$$a \text{ qualsiasi}; b = a; c = 0; d = 3a; e = -a; f = -4a$$

che conferma le nostre considerazioni precedenti: se si sceglie $a = 1$, ne risulta la stessa equazione di prima.

ESERCIZI

Scrivi l'equazione della conica passante per i 5 punti seguenti:

1) $(0, 0); (0, 2); (1, 3); (2, 1); (1, -1)$ 2) $(0, 1); (0, 2); (-1, 4); (1, 1); (1, -1)$ 3) $(0, 0); (1, 1); (1, 0); (0, 2); (-2, 1)$

RISPOSTE

1) $7x^2 + 2y^2 - 13x - 4y = 0$ 2) $3x^2 + 6xy + 2y^2 - 9x - 6y + 4 = 0$ 3) $x^2 + 2xy + 2y^2 - x - 4y = 0$

ESERCIZI CON TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

1) (Esercizio svolto)

Considera l'ellisse di equazione $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

e scrivi l'equazione

- della sua curva immagine
- poi della sua curva controimmagine

attraverso la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - y \end{cases}$

CURVA IMMAGINE

Bisogna

- I) invertire le equazioni della trasformazione: $\begin{cases} y = x' - 2 \\ x = y' + y = y' + x' - 2 = x' + y' - 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = x' + y' - 2 \\ y = x' - 2 \end{cases}$

- II) poi sostituire nell'equazione della curva $\frac{(x' + y' - 2)^2}{4} + \frac{(x' - 2)^2}{3} = 1$

- III) e infine sopprimere gli apici $E': \frac{(x + y - 2)^2}{4} + \frac{(x - 2)^2}{3} = 1$

Ecco che abbiamo determinato l'equazione della curva immagine.

Volendo (è naturale) possiamo svolgere i calcoli e portarla sotto altra forma:

$$\frac{x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y}{4} + \frac{x^2 - 4x + 4}{3} = 1 \dots \boxed{7x^2 + 3y^2 + 6xy - 28x - 12y + 16 = 0}$$

CURVA CONTROIMMAGINE

Il procedimento è più rapido:

basta sostituire, nell'equazione della curva data, al posto di x e di y , i secondi membri delle equazioni della trasformazione.

Dunque è sufficiente scrivere

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{(y+2)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{3} = 1}$$

e la curva nel riquadro è immediatamente la controimmagine richiesta.

Sottoponi la conica assegnata alla trasformazione data, per trovare l'equazione della curva immagine.

Osserva che la curva originaria e la trasformata sono, in tutti i casi, della stessa tipologia.

- 2) $xy = -\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$ (rotazione di 45° in senso orario)
- 3) $x^2 + 3y^2 = 4$ $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ (affinità)
- 4) $x^2 + y^2 = 1$ $\begin{cases} x' = 3x + 1 \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$ (omotetia)
- 5) $y = x^2 + x$ $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$ (affinità)

6) E' data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Si fissano due numeri non nulli a, b .

Verifica che

□ sottoponendo la circonferenza alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = ax \\ y' = y \end{cases}$ (dilatazione orizzontale)

si ottiene l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$

□ sottoponendola alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = by \end{cases}$ (dilatazione verticale)

si ottiene l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

□ sottoponendola alla $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ (dilatazione) si ottiene l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

7) Quale trasformazione fa passare dall'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$?

8) Scrivi l'equazione dell'ellisse E di fuochi $F_1(-3, -3)$, $F_2(3, 3)$ e costante (= somma costante) $2k = 10\sqrt{2}$

e verifica che se la si sottopone alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x = \frac{x' + y'}{2} \\ y = \frac{-x' + y'}{2} \end{cases}$

si ottiene come curva immagine l'ellisse E' : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

9) Sottoponendo la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 alla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y - 3 \end{cases}$ si ottiene un'ellisse: determinane l'equazione e calcolane l'eccentricità.

10) Anche la curva CONTROLLO immagine della circonferenza di centro l'origine e raggio 2,

rispetto alla trasformazione $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y - 3 \end{cases}$, è un'ellisse.

Che equazione ha questa ellisse? Quanto vale la sua eccentricità?

11) L'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ viene traslata di 5 unità verso destra e di 3 unità verso il basso.

Qual è l'equazione della curva ottenuta?

12) Che equazione ha l'immagine dell'ellisse $\frac{(x+7)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ attraverso la traslazione di vettore $\vec{v}(1, 2)$?

13) Verifica che se l'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti di equazione $xy = 1$

viene sottoposta alla trasformazione t di equazioni $\begin{cases} x' = \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}y \\ y' = -\frac{b}{2}x + \frac{b}{2}y \end{cases}$

allora si muterà nell'iperbole canonica di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

RISPOSTE

2) $x^2 - y^2 = -1$ 3) $x^2 + y^2 - xy = 4$ 4) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 5) $x^2 + y^2 + 2xy + 9y + 9 = 0$

7) $\begin{cases} x' = x/a \\ y' = y/b \end{cases}$ 8) $E: 41x^2 - 18xy + 41y^2 = 1600$ 9) $\frac{x^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

10) $4x^2 + 9(y-1)^2 = 4$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 11) $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1$ 12) $\frac{(x+6)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

UN MODO ALTERNATIVO (E UNIFICANTE) DI DEFINIRE LE CONICHE IN GEOMETRIA PIANA

Fissati su di un piano un punto F (fuoco) e una retta d (direttrice), se si considera il luogo dei punti del piano per i quali risulta $PF/PH = e$, dove H è la proiezione di P su d , mentre e è una costante positiva, si ottiene:

- **UN'ELLISSE** se si prende $0 < e < 1$
- **UNA PARABOLA** se si prende $e = 1$
- **UN'IPERBOLE** se si prende $e > 1$

Il valore della costante e risulta poi coincidere:

- nel caso dell'ellisse, col rapporto (semidistanza focale)/(semiasse maggiore)
- nel caso dell'iperbole, col rapporto (semidistanza focale)/(semidistanza dei vertici)

cioè risulta coincidere con quel numero che viene abitualmente chiamato "eccentricità", e che

- nel caso dell'ellisse, è tanto più grande quanto più l'ellisse è "bislunga",
- nel caso dell'iperbole, è tanto più grande quanto più la "forbice" degli asintoti è aperta.

E' anche possibile provare che

□ l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

ha due direttrici, di equazioni $x = \pm \frac{a^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

□ l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $b > a$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c = \sqrt{b^2 - a^2}$,

ha due direttrici, di equazioni $y = \pm \frac{b^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

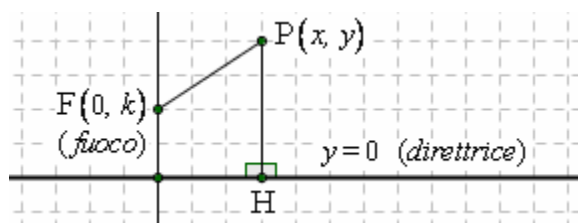
□ l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

ha due direttrici, di equazioni $x = \pm \frac{a^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

□ l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, per cui sappiamo che la semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

ha due direttrici, di equazioni $y = \pm \frac{b^2}{c}$, ed eccentricità $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

Per **DIMOSTRARE** quanto enunciato nel riquadro a inizio pagina, assegneremo a F le coordinate $(0, k)$ (supponendo $k > 0$) e prenderemo come direttrice l'asse x , di equazione $y = 0$. Dunque:



Luogo dei punti $P(x, y)$ tali che $\frac{PF}{PH} = e$:

$$\frac{\sqrt{x^2 + (y-k)^2}}{|y|} = e$$

$$\sqrt{x^2 + (y-k)^2} = e|y|$$

$$x^2 + (y-k)^2 = e^2 y^2; \quad x^2 + y^2 - 2ky + k^2 = e^2 y^2; \quad x^2 + y^2 - e^2 y^2 - 2ky = -k^2$$

$$\boxed{x^2 + (1-e^2)y^2 - 2ky = -k^2}$$

A questo punto, dividiamo per la quantità $1 - e^2$; ciò richiede di supporre $1 - e^2 \neq 0$ ossia $e \neq 1$. Il caso $e = 1$ è quindi per ora "accantonato", e verrà studiato in un secondo tempo.

$$\frac{x^2}{1-e^2} + y^2 - \frac{2k}{1-e^2}y = -\frac{k^2}{1-e^2}$$

A 1° membro, addizioniamo e sottraiamo, per “completare il quadrato”, la quantità $\frac{k^2}{(1-e^2)^2}$

$$\frac{x^2}{1-e^2} + \left[y^2 - \frac{2k}{1-e^2}y + \frac{k^2}{(1-e^2)^2} \right] - \frac{k^2}{(1-e^2)^2} = -\frac{k^2}{1-e^2}$$

$$\frac{x^2}{1-e^2} + \left(y - \frac{k}{1-e^2} \right)^2 = \frac{k^2}{(1-e^2)^2} - \frac{k^2}{1-e^2}$$

$$\frac{x^2}{1-e^2} + \left(y - \frac{k}{1-e^2} \right)^2 = \frac{k^2 - k^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{1-e^2} + \left(y - \frac{k}{1-e^2} \right)^2 = \frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2}$$

Dividendo ulteriormente per il 2° membro $\frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2}$, avremo:

$$\frac{\frac{x^2}{1-e^2}}{\frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\left(y - \frac{k}{1-e^2} \right)^2}{\frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2}} = 1; \quad (*) \quad \boxed{\frac{x^2}{\frac{k^2 e^2}{1-e^2}} + \frac{\left(y - \frac{k}{1-e^2} \right)^2}{\frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2}} = 1}$$

Ora occorre distinguere i due casi: $0 < e < 1$; $e > 1$.

IL CASO $0 < e < 1$

Con $0 < e < 1$ avremo $0 < e^2 < 1$, $1 - e^2 > 0$ e quindi $\frac{k^2 e^2}{1-e^2} > 0$; potremo perciò porre, nella (*), $\boxed{\frac{k^2 e^2}{1-e^2} = a^2}$.

Inoltre, essendo $\frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2} > 0$, potremo pure porre $\boxed{\frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2} = b^2}$.

La nostra equazione (*) assumerà allora la forma: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{k}{1-e^2} \right)^2}{b^2} = 1}$

e questa forma rivela trattarsi di un'ellisse di semiassi $\boxed{a = \frac{ke}{\sqrt{1-e^2}}; b = \frac{ke}{1-e^2}}$

Osserviamo che in un'ellisse l'“eccentricità” è definita come il rapporto semidistanza focale /semiasse maggiore; ora, essendo $0 < e < 1$, è anche $0 < 1 - e^2 < 1$

da cui $\underbrace{\sqrt{1-e^2} > 1-e^2}_{\text{NOTA 1}} \rightarrow \underbrace{\frac{ke}{\sqrt{1-e^2}} < \frac{ke}{1-e^2}}_{\text{NOTA 2}}$, ossia $a < b$

NOTA 1 Se $0 < p < 1$, allora è $\sqrt{p} > p$
 NOTA 2 Se $p, q, r > 0$ e $p > q$, allora $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ e $\frac{r}{p} < \frac{r}{q}$

Insomma, dei due semiassi a, b , il maggiore risulta essere b : i fuochi sono perciò “in verticale”.

Nell'ellisse coi fuochi in verticale, sappiamo che si ha $c^2 = b^2 - a^2$ (c semidistanza focale) e dunque

$$c^2 = b^2 - a^2 = \frac{k^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{k^2 e^2}{1-e^2} = \frac{k^2 e^2 - k^2 e^2 (1-e^2)}{(1-e^2)^2} = \frac{k^2 e^4}{(1-e^2)^2} \rightarrow \boxed{c = \frac{ke^2}{1-e^2}}$$

da cui $\boxed{\text{eccentricità}} = \frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse maggiore}} = \frac{c}{b} = \frac{\frac{ke^2}{1-e^2}}{\frac{ke}{1-e^2}} = e$ quindi l'eccentricità dell'ellisse considerata coincide col parametro e da noi fissato all'inizio

IL CASO $e > 1$

Con $e > 1$ avremo $1 - e^2 < 0$ e quindi $\frac{k^2 e^2}{1 - e^2} < 0$; potremo perciò porre, nella (*),

$$\frac{k^2 e^2}{1 - e^2} = -a^2 \rightarrow \frac{k^2 e^2}{e^2 - 1} = a^2 \quad \boxed{a = \frac{ke}{\sqrt{e^2 - 1}}}$$

Inoltre, essendo $\frac{k^2 e^2}{(1 - e^2)^2} > 0$, potremo pure porre $\frac{k^2 e^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{k^2 e^2}{(e^2 - 1)^2} = b^2 \quad \boxed{b = \frac{ke}{e^2 - 1}}$.

La nostra equazione (*) assumerà allora la forma: $\frac{x^2}{-a^2} + \frac{\left(y - \frac{k}{1 - e^2}\right)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(y - \frac{k}{1 - e^2}\right)^2}{b^2} = -1}$

e questa forma rivela trattarsi di un' **iperbole** (coi fuochi "in verticale").

Nell'iperbole si ha, come è noto, $c^2 = a^2 + b^2$ (c semidistanza focale), da cui

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{k^2 e^2}{e^2 - 1} + \frac{k^2 e^2}{(e^2 - 1)^2} = \frac{k^2 e^2 (e^2 - 1) + k^2 e^2}{(e^2 - 1)^2} = \frac{k^2 e^4}{(e^2 - 1)^2} \rightarrow \boxed{c = \frac{ke^2}{e^2 - 1}}$$

Nell'iperbole da noi ottenuta, la semidistanza fra i vertici è b , per cui potremo scrivere:

$$\boxed{\text{eccentricità}} \equiv \frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semidistanza vertici}} = \frac{c}{b} = \frac{\frac{ke^2}{e^2 - 1}}{\frac{ke}{e^2 - 1}} \equiv e \quad \text{quindi l'eccentricità dell'iperbole considerata coincide col parametro } e \text{ da noi fissato all'inizio}$$

E "recuperiamo" ora anche IL CASO $e = 1$

Andiamo infine a "recuperare" il caso $e = 1$,

che avevamo accantonato nel momento in cui avevamo deciso di dividere per la quantità $1 - e^2$.

Occorrerà ripartire quindi dal passaggio precedente a questa divisione, ossia da

$$\boxed{x^2 + (1 - e^2)y^2 - 2ky = -k^2}$$

Questa equazione, con $e = 1$, diventa:

$$x^2 - 2ky = -k^2; \quad 2ky = x^2 + k^2; \quad y = \frac{1}{2k}x^2 + \frac{k}{2}$$

La curva rappresentata è dunque in questo caso una **parabola**.

L'eccentricità in una parabola è sempre 1,

quindi anche in questo caso possiamo dire che l'eccentricità della conica ottenuta coincide col valore del parametro e che ci è servito per definirla.

