

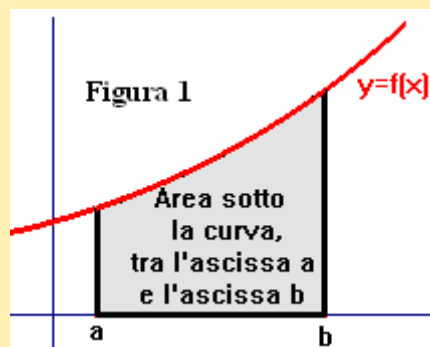
L'INTEGRALE DEFINITO

1. L' "area sotto una curva"

Il calcolo dell' "area sotto una curva", ossia dell'area della regione di piano compresa fra una data curva e l'asse delle ascisse (entro la fascia di piano delimitata da due ascisse fissate), è un problema il cui interesse è enorme non solo in matematica pura, ma anche in svariati campi applicativi.

Ad esempio, in **Fisica**, l' "area sotto una curva" può assumere, di volta in volta, il significato di

- "spazio complessivo percorso in un certo intervallo di tempo" (quando sia nota la legge della *velocità* in funzione del *tempo*);
- "lavoro effettuato da una forza" su di un oggetto che si sposta lungo un certo arco di traiettoria" (quando sia nota, per ogni singola posizione assunta dall'oggetto, la componente della *forza* nella direzione dello *spostamento*);
- ecc. ecc. ecc.



Nel seguito, chiameremo "**trapezoide**" la figura **mistilinea** (quella che è ombreggiata in Figura 1) di cui desideriamo calcolare l'area.

Supponiamo inizialmente, per semplicità, che la funzione $f(x)$ considerata sia monotona crescente (d'ora in poi, nell'aggettivo, ometteremo l'accento, che comunque è da intendersi cada sull'*ultima* "o")

Consideriamo le figure qui a fianco.

L'intervallo $[a,b]$ è stato suddiviso in n parti uguali,

ciascuna di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$,

e gli estremi delle suddivisioni sono stati indicati con x_k :

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1}, \quad x_n = b$$

Il poligono ombreggiato viene detto "**plurirettangolo inscritto**" e la sua area fornisce, evidentemente, un' **approssimazione per difetto** dell'area del trapezoide, approssimazione **tanto più precisa quanto più alto è il numero n delle suddivisioni di $[a,b]$**

(in fig. 2a è $n = 4$,

e l'approssimazione è piuttosto imprecisa;

ma in fig. 2b, con $n = 8$,

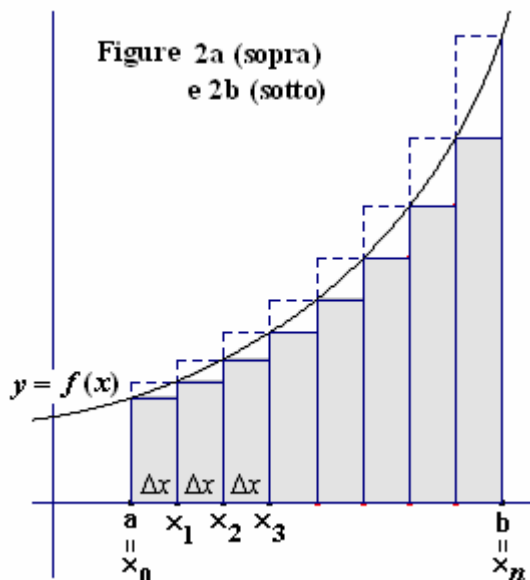
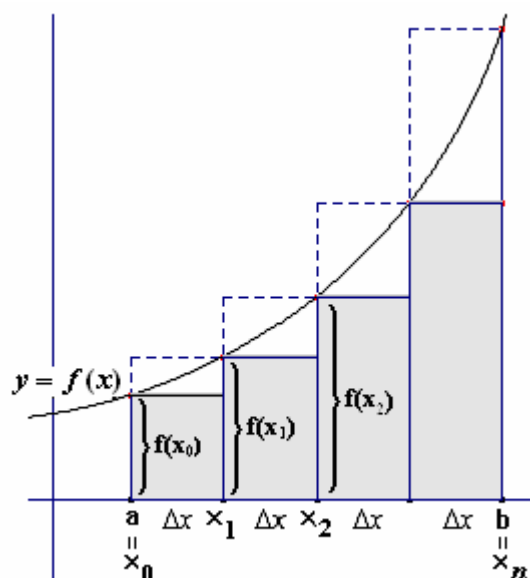
l'approssimazione si fa già più soddisfacente).

Abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Area plurirettangolo inscritto} &= \\ &= \text{approssimazione per difetto dell'area del trapezoide} = \\ &= \text{somma aree rettangoli ombreggiati} = \\ &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x \end{aligned}$$

Le figure mostrano anche il cosiddetto "**plurirettangolo circoscritto**" (dai contorni superiori tratteggiati), la cui area rappresenta un' **approssimazione per eccesso** dell'area cercata, **tanto più precisa quanto più è alto il numero n delle suddivisioni di $[a, b]$.**

$$\begin{aligned} \text{Area plurirettangolo circoscritto} &= \\ &= \text{approssimazione per eccesso dell'area del trapezoide} = \\ &= \text{somma aree rettangoli più alti} = \\ &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x \end{aligned}$$



Poniamoci ora in una situazione più generale.

Non supporremo più che la funzione sia necessariamente monotona su $[a,b]$; ci limiteremo a supporla continua su $[a,b]$.

In questo caso, le altezze dei singoli rettangoli costituenti i due plurirettangoli inscritto e circoscritto non saranno più, in generale, i valori assunti dalla funzione alle estremità dell'intervallino $[x_{k-1}, x_k]$, ma saranno, rispettivamente, il minimo m_k e il massimo M_k della $f(x)$ su $[x_{k-1}, x_k]$.

(Osserviamo per inciso che una funzione continua su di un intervallo chiuso e limitato ammette ivi sempre minimo assoluto e massimo assoluto: teorema di **Weierstrass**).

Avremo allora

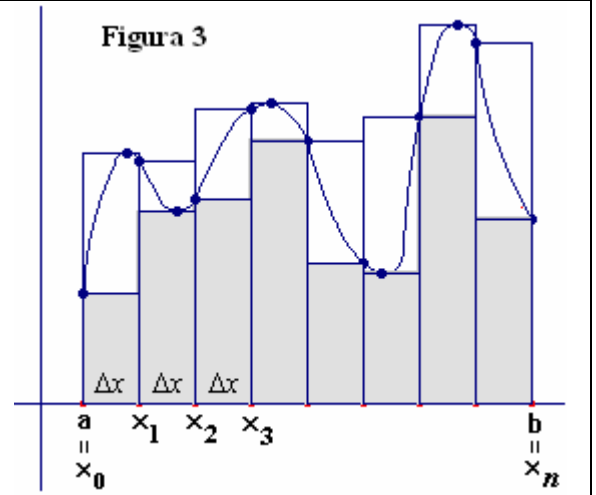
Area plurirettangolo inscritto =
= approssimazione per difetto dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli ombreggiati =

$$= m_1\Delta x + m_2\Delta x + \dots + m_n\Delta x$$

Area plurirettangolo circoscritto =
= approssimazione per eccesso dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli più alti =

$$= M_1\Delta x + M_2\Delta x + \dots + M_n\Delta x$$

Si capisce che **facendo crescere n** (numero delle suddivisioni di $[a,b]$ in sottointervalli), **potremmo ottenere approssimazioni, rispettivamente per difetto e per eccesso, tanto precise quanto lo desideriamo, dell'area del trapezoide.**



Di fronte ad una funzione continua su di un intervallo (non importa se sia o non sia monotona) per calcolare l' "area sotto la curva" **potremmo anche procedere nel modo seguente:**

Effettuiamo la solita suddivisione di $[a,b]$ in n sottointervallini uguali, ciascuno di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$,

e andiamo a considerare, su ciascun intervallino $[x_{k-1}, x_k]$,

un'ascissa qualsiasi \bar{x}_k (leggi: " x segnato k ")

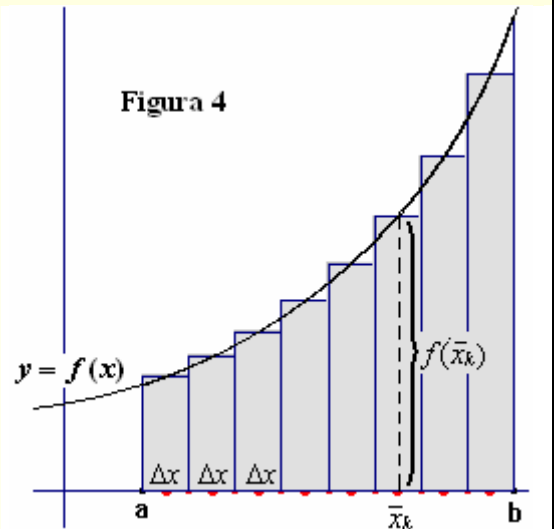
(in Fig. 4 abbiamo preso \bar{x}_k nel punto medio dell'intervallino, ma non dev'essere obbligatoriamente proprio così).

Se ora calcoliamo la somma delle aree dei rettangoli di base Δx e altezza $f(\bar{x}_k)$, ossia se calcoliamo

Area plurirettangolo "intermedio" =
= approssimazione dell'area del trapezoide =
= $f(\bar{x}_1)\Delta x + f(\bar{x}_2)\Delta x + \dots + f(\bar{x}_n)\Delta x$,

si capisce che,

facendo crescere il numero n di suddivisioni di $[a, b]$, potremmo approssimare l'area del trapezoide con la precisione desiderata.



Esercitazione

Facendo i calcoli "a mano", senza calcolatrice, determina un'approssimazione per difetto e una per eccesso dell'area sotto la curva $y = x^3$, sull'intervallo $[1, 2]$, tali che differiscano tra loro meno di 0,01.

Per inciso, posso dirti che l'area in questione vale **ESATTAMENTE** $15/4 = 3,75$.

Come ho fatto a determinarne il valore "esatto che più esatto non si può" ?

Ti piacerebbe saperlo, vero?

EH, EH!!! Non devi far altro che proseguire la lettura!

