2. Sistemazione teorica

Sia $y = f(x)$ una funzione definita su di un intervallo chiuso e limitato [a,b] e ivi **continua**.
Suddividiamo l'intervallo [a,b] in n parti uguali, ciascuna di ampiezza $\Delta x = (b-a)/n$, indicando con x_k gli estremi degli intervallini che costituiscono la suddivisione: $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_{n-1},\ x_n = b$.
Indichiamo poi con m_k e con M_k rispettivamente il **minimo** e il **massimo** fra i valori assunti dalla $f(x)$ su $[x_{k-1},\ x_k]$ (tale minimo e massimo assoluti esistono certamente, per il teorema di Weierstrass).
Consideriamo le somme

$$\boxed{s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots + m_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x}$$

detta **SOMMA INTEGRALE INFERIORE** della $f(x)$ su [a,b], relativa alla suddivisione effettuata

$$\boxed{S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots + M_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x}$$

detta **SOMMA INTEGRALE SUPERIORE** della $f(x)$ su [a,b], relativa alla suddivisione effettuata

Si può dimostrare (sotto l'ipotesi, ribadiamolo, della ***continuità*** della $f(x)$ su [a,b]), che
la successione delle somme integrali inferiori $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n, \ldots$
e la successione delle somme integrali superiori $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n, \ldots$
convergono allo stesso limite.

Tale limite comune vien detto "integrale definito" della $f(x)$ su [a,b] e indicato col simbolo $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$.

E' dunque $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

dove **il simbolo** $\boxed{\int}$ **è stato scelto perché può esser visto come una "S" di "Somma" stilizzata**,

e il prodotto $\boxed{f(x)\,dx}$ ricorda che ciascun addendo delle somme di cui si sta indicando il limite è costituito dal prodotto di un valore della $f(x)$, per un incremento della variabile indipendente (incremento Δx che, al tendere di n all'infinito, diventa un infinitesimale dx).

Alla *dimostrazione di questo teorema*, la cui verità è peraltro facilmente colta dall'intuizione, *siamo costretti purtroppo a rinunciare*.
Infatti il ragionamento dimostrativo richiede di aver acquisito alcune nozioni sulla cosiddetta "*continuità uniforme*", che vanno al di là dei limiti del nostro corso.

Aggiungiamo, sempre senza dimostrazioni, qualcosa in più:

a) I due limiti coincidenti $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ costituiscono anche, rispettivamente, **l'estremo superiore** dell'insieme numerico $\{s_n\}$ e **l'estremo inferiore** dell'insieme numerico $\{S_n\}$

b) Allo stesso limite comune al quale convergono le successioni
s_n (delle "somme integrali inferiori") ed S_n (delle "somme integrali superiori"),
risulta tendere anche qualunque successione di "**somme integrali intermedie**"
$T_n = f(\bar{x}_1)\Delta x + f(\bar{x}_2)\Delta x + \ldots + f(\bar{x}_n)\Delta x$
costruita prendendo, in ciascun intervallino $[x_{k-1},\ x_k]$, un arbitrario punto $\bar{x}_k$

c) Con qualche adattamento e puntualizzazione, si potrebbe elaborare **una teoria più generale**, affrancata dal vincolo che le suddivisioni di [a,b] debbano essere costituite da sottointervalli di uguale ampiezza.

d) Nella trattazione, ci siamo concessi una licenza, un atteggiamento non rigoroso che ora vogliamo correggere. Abbiamo parlato fin dall'inizio di "area del trapezoide", *senza averla prima definita*.
Diciamo ora, più correttamente, che l' "area (con segno) del trapezoide" è, ***per definizione***, appunto il valore comune dei limiti $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$; il numero, insomma, che abbiamo indicato con $\int_a^b f(x)dx$.