3. Osservazioni e proprietà

Osserviamo ancora che
la definizione appena posta di "integrale definito", seppure sia stata introdotta a partire da considerazioni di carattere geometrico, ha significato anche indipendentemente da interpretazioni geometriche.

Non è poi necessario che la funzione $f(x)$ assuma, nell'intervallo [a,b], esclusivamente valori positivi, come abbiamo supposto fin qui per evitare complicazioni. E' comunque ovvio che

se $f(x)$ è negativa sull'intervallo [a,b], negative saranno pure le somme s_n, S_n

e negativo sarà quindi il valore dell'integrale $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Dal punto di vista geometrico, questo numero negativo misurerebbe l' "area con segno" tra la curva e l'asse x, entro il campo di ascisse considerato. Il valore assoluto dell'integrale darebbe il valore dell' "area senza segno".

E se la $f(x)$ assumesse, su [a,b], valori sia positivi che negativi?
Beh, allora in ciascuna somma s_n o S_n avremmo una parte degli addendi positiva e un'altra parte negativa, e il segno dell'integrale dipenderebbe da … ma aiutiamoci con una figura.

Nella figura, per comodità grafica, abbiamo rappresentato una somma integrale "intermedia" anziché (come è più usuale) una somma integrale inferiore o superiore, ma si capisce che il discorso non cambia nella sostanza.

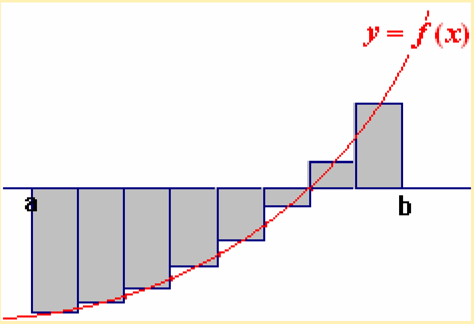

Fig. 5

Insomma, è evidente (e si potrebbe puntualmente dimostrare) che **in situazioni come quella della figura, cioè quando la $f(x)$ non ha segno costante su [a,b],**

l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ avrebbe il significato di

"somma algebrica di aree con segno":

e pertanto avrebbe valore positivo o negativo a seconda che l'estensione complessiva dei pezzi di trapezoide al di *sopra* dell'asse x sia maggiore o, rispettivamente, minore dell'estensione complessiva dei pezzi di trapezoide che stanno *sotto* l'asse x.

Verifica empiricamente questo fatto calcolando, con carta e matita o, ad esempio, col foglio elettronico, l'integrale $\int_0^1 (3x^2-1)\,dx$ *: le approssimazioni trovate avranno, se il numero n delle suddivisioni di* [0,1] *è abbastanza elevato, valori prossimi a 0.*
Ciò significa che la porzione di superficie al di sotto dell'asse x dà all'integrale un contributo negativo uguale e opposto al contributo positivo che proviene dalla porzione al di sopra dell'asse x.
La "somma algebrica delle aree con segno" è pertanto nulla.

OSSERVAZIONE:
l'espressione linguistica "area sotto la curva" può essere ancora utilizzata, per estensione, anche nei casi in cui la curva vada a finire tutta o in parte nel semipiano delle ordinate negative: il significato è allora quello di "area con segno", o di "somma algebrica di aree con segno".

L'interpretazione geometrica permette anche di comprendere molto bene (vedi figura 6a) la **PROPRIETA'** espressa dalla seguente uguaglianza:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \; .$$

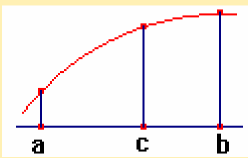

Fig. 6a

Ma il bello è che (figure 6b, 6c)
l' uguaglianza di cui sopra vale QUALUNQUE SIANO LE POSIZIONI RECIPROCHE DEI TRE PUNTI a, b, c,
per il fatto che si pongono le seguenti **CONVENZIONI**:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0} \qquad \boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

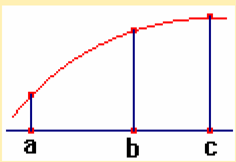

Fig. 6b

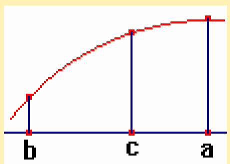

Fig. 6c