5. L’ “antiderivata” o “primitiva” di una funzione assegnata: insomma, l’ “integrale indefinito”

Si dice “**integrale indefinito**” di una funzione $f(x)$,
la famiglia di tutte e sole quelle funzioni la cui derivata è uguale a $f(x)$.
Se una funzione $F(x)$ è tale che $F'(x) = f(x)$,
allora si dice che $F(x)$ è una “**antiderivata**”, o una “**primitiva**”, della $f(x)$.
Il termine più usato è “primitiva”.

Poiché:

- se due funzioni differiscono per una costante additiva, allora hanno la stessa derivata;
- e, viceversa, se due funzioni hanno la stessa derivata,
  allora differiscono per una costante additiva (conseguenza del Teorema di Lagrange),

se ne deduce che,
data una funzione $f(x)$, se essa ammette una primitiva $F(x)$, ne ammetterà infinite:
si tratterà di tutte e sole le funzioni che si possono scrivere sotto la forma $\boxed{F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}}$.

Il simbolo di integrale indefinito è il seguente: $\boxed{\int f(x)dx}$

(leggi: “integrale di $f(x)$ in dx”: “in” è un modo di leggere l’operatore di moltiplicazione “per”).

Tale simbolo è stato scelto per via del legame che il teorema di Torricelli-Barrow stabilisce
fra il problema del “calcolo dell’*area sotto una curva*” (integrale DEFINITO)
e la ricerca dell’ “*antiderivata*” di una funzione (integrale INDEFINITO, appunto).

Poiché, dunque, **il simbolo di integrale indefinito indica la FAMIGLIA di tutte le primitive della funzione** $f(x)$ (o, se si preferisce: indica la GENERICA primitiva della $f(x)$),
esso contiene implicitamente una costante additiva arbitraria:

ad esempio $\int (x^2+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x + \boldsymbol{C}$, $\qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + \boldsymbol{C}$

Ricordiamo che **la derivata è un “operatore lineare”**,
nel senso che la derivata di una combinazione lineare di funzioni
è uguale alla combinazione lineare delle derivate (s’intende, con gli stessi coefficienti):

$$\boxed{D[h\alpha(x)+k\beta(x)] = hD\alpha(x)+kD\beta(x) = h\alpha'(x)+k\beta'(x)}\ .$$

Ne consegue perciò che anche l’integrale indefinito è un operatore lineare:

$$\boxed{\int [hf(x)+kg(x)]dx = h\int f(x)dx + k\int g(x)dx}$$

Esempio: $\int (5x+3\cos x)dx = 5\int x\,dx + 3\int \cos x\,dx = 5\cdot\frac{1}{2}x^2 + 3\,\mathrm{sen}\,x + C$

- ❑ Così come esistono delle ben precise “formule di derivazione”,
  similmente è possibile scrivere tutta una serie di “formule di integrazione indefinita”
  (quando non ci sia possibilità di equivoco scriveremo semplicemente: “integrazione”)
  ed elaborare, per i casi più complessi, delle “tecniche di integrazione indefinita”
  (integrazione “per parti”, integrazione “col circolo vizioso apparente”, ecc.)
  Mentre però **la derivazione è una procedura del tutto meccanica**,
  l’integrazione è, in una certa misura, un’ “arte”,
  che richiede intuito, e capacità di collegare e reinterpretare procedure e formule diverse.
- ❑ Si può dimostrare che **una funzione, che sia continua su di un intervallo, è sempre ivi integrabile**;
  tuttavia, il problema di risalire all’espressione analitica dell’integrale può essere anche molto difficile.
  Aggiungo che **per alcune funzioni costruite componendo funzioni elementari**,
  ad esempio la fondamentale e^{-x^2}, importantissima in Teoria degli Errori, **è stato dimostrato**
  che l’integrale indefinito, pur esistente data la continuità della funzione integranda,
  non ammette una espressione analitica costituita da composizioni di funzioni elementari.
- ❑ Le tecniche di “integrazione indefinita”, o “antiderivazione”, sono nella maggior parte dei casi utilizzate
  per poi procedere al calcolo di un “integrale definito”, ovvero dell’ “area sotto una curva”;
  la loro importanza è perciò alquanto diminuita da quando, tramite i computer, possiamo utilizzare
  opportuni algoritmi di “integrazione numerica” per approssimare, con la precisione desiderata,
  l’integrale definito di una funzione assegnata, senza aver bisogno di calcolarne l’antiderivata.

Nel seguito impareremo le formule e le tecniche fondamentali di integrazione indefinita.