

6. Il “teorema della media del calcolo integrale”

Se una funzione $y = f(x)$ è continua su di un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora esiste certamente, nell'intervallo aperto (a, b) , almeno un'ascissa c tale che

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

Giustificazione con l'intuizione geometrica:

considerata la curva continua $y = f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$, e presa una retta orizzontale, sarà sempre possibile spostare questa verso l'alto o verso il basso in modo da realizzare la situazione in cui l'area del rettangolo compreso fra la retta e l'asse x , sull'intervallo $[a, b]$, sia perfettamente uguale all'area del trapezoide.

L'ordinata costante dei punti di tale retta dovrà evidentemente essere compresa fra il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione su $[a, b]$, quindi la retta sarà obbligata a tagliare la curva in almeno un punto.

L'ascissa di tale punto di intersezione retta-curva è l'ascissa c di cui il teorema afferma l'esistenza.

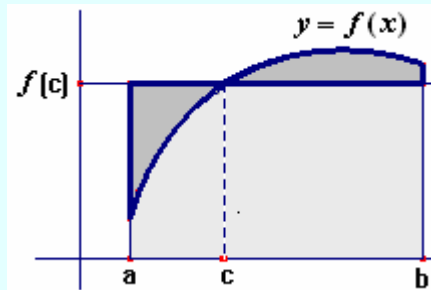


Figura 9

Le due aree più scure sono uguali, quindi sono uguali le aree
1) del trapezoide
2) del rettangolo

Dimostrazione

La funzione $f(x)$, per ipotesi continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, è ivi dotata di minimo assoluto m e di massimo assoluto M (Teorema di Weierstrass).

Se ora noi prendiamo una qualsiasi “somma integrale inferiore”, avremo

$$s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \dots + m_n\Delta x \geq m\Delta x + m\Delta x + \dots + m\Delta x = m(\Delta x + \Delta x + \dots + \Delta x) = m(b-a)$$

e analogamente, presa una qualsivoglia somma integrale superiore, avremo

$$S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \dots + M_n\Delta x \leq M\Delta x + M\Delta x + \dots + M\Delta x = M(\Delta x + \Delta x + \dots + \Delta x) = M(b-a).$$

Poiché dunque per ogni n risulta

$$m(b-a) \leq s_n \leq S_n \leq M(b-a)$$

si avrà

$$m(b-a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq M(b-a)$$

ed essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$

sarà dunque $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

da cui infine $m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$.

Esiste perciò (“teorema dei valori intermedi”) un'ascissa c , con $a < c < b$, tale che

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \quad \text{quindi} \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c), \quad \text{C.V.D.}$$

L'ordinata

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = V_m$$

viene chiamata “**valor medio**” della funzione $f(x)$ su $[a, b]$.