

8. Come si calcola nella pratica un integrale definito

Grazie al Teorema Fondamentale, dovendo calcolare $\int_a^b f(x) dx$, è lecito procedere come segue.

Il nostro obiettivo è di scrivere l'espressione della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$,

della quale ci interesserà poi calcolare il valore $F(b)$.

Poiché il Teorema ci assicura che $F'(x) = f(x)$, ricaveremo dunque l'espressione analitica della $F(x)$ determinando l' "antiderivata" (o "primitiva") della $f(x)$, con la tecnica di "antiderivazione" opportuna.

Tuttavia, sappiamo che tale primitiva è individuata a meno di una costante additiva C .

Supponiamo ora di aver trovato **una qualsiasi fra le infinite primitive** della $f(x)$.

Sia $\varphi(x)$ tale primitiva.

$\varphi(x)$ NON è, a meno di un colpo di fortuna, proprio la funzione integrale $F(x)$ che ci interessa; tuttavia, $F(x)$ differisce da $\varphi(x)$ per una costante additiva e si ha dunque $F(x) = \varphi(x) + C$

Adesso abbiamo **due possibilità**:

a) Possiamo **determinare il valore della costante C** , mediante la condizione $F(a) = 0$.

Avremo: $\varphi(a) + C = 0$ da cui $C = -\varphi(a)$ e quindi $F(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$.

E a questo punto, concluderemo scrivendo: $\int_a^b f(x) dx = F(b) = \varphi(b) - \varphi(a)$

b) Oppure (**più conveniente!**) possiamo tenere presente il risultato definitivo $\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$

e **imboccare** quindi una "scorciatoia":

evitiamo di ricavare *esplicitamente* la funzione integrale $F(x)$,

perché in fondo ci basta quella primitiva $\varphi(x)$ che avevamo trovato "antiderivando" la $f(x)$;

prendiamo dunque la nostra brava primitiva $\varphi(x)$

e calcoliamo la differenza fra i valori che essa assume in b e in a rispettivamente.

Di solito la procedura si espone con una simbologia speciale, molto efficace.

Si scrive:

$$\int_a^b f(x) dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Il simbolo $[\varphi(x)]_a^b$ è semplicemente un comodo "pro memoria".

Serve, molto banalmente, per "inscatolare" la $\varphi(x)$

in modo da averla lì bella comoda,

e contemporaneamente indicare che di questa funzione

si dovranno calcolare i valori in b e in a , per farne la differenza.

RICAPITOLAZIONE

Il **calcolo di un' "area sotto la curva", di un "integrale definito"**, richiede di aprire una "finestra" a sé stante, per la determinazione di una *primitiva* della funzione integranda $f(x)$.

Vale a dire,

il calcolo di un integrale *definito* comporta di effettuare *prima* il calcolo di un integrale *indefinito*.

Riferiamoci ad un esempio: **supponiamo di dover calcolare** $\int_1^2 x^3 dx$.

La procedura consta di **TRE FASI**.

1. **Si determina l'integrale indefinito:** $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ (in questo caso è stato facile, non sempre lo è)

2. **Si prende una qualunque delle infinite primitive trovate**, ad esempio $\frac{1}{4}x^4$.

3. **Si calcola la differenza dei due valori che la primitiva considerata assume, in corrispondenza del secondo estremo di integrazione e del primo, nell'ordine.**

Si scrive cioè $\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

Ecco fatto!

L' "area sotto la curva" vale, nel nostro esempio, $15/4 = 0.375$

ALTRI ESEMPI

$$\square \text{ Calcolare } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\square \text{ Calcolare } \int_{10}^{20} \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_{10}^{20} = \ln 20 - \ln 10 = \ln \frac{20}{10} = \ln 2 \approx 0.693$$

$$\square \text{ Calcolare } \int_{-1}^1 (x^2 - x) \, dx$$

$$\int (x^2 - x) \, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 - x) \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3}$$

ESERCIZI

Determina il valore degli integrali indicati:

$$1) \int_0^2 (4x - 3) \, dx$$

$$2) \int_0^1 e^x \, dx$$

$$3) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$4) \int_1^2 (1+x^2) \, dx$$

$$5) \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} \right) \, dx$$

RISPOSTE

$$1) 2 \quad 2) e-1 \approx 1.718 \quad 3) \frac{\pi}{4} \approx 0.785 \quad 4) \frac{10}{3} \quad 5) 1 + \ln 4 \approx 2,386$$