L'INTEGRALE INDEFINITO

9. Integrali immediati

Riassumiamo le puntate precedenti: si dice "**INTEGRALE INDEFINITO" di una funzione** $f(x)$, **la famiglia di tutte e sole quelle funzioni la cui derivata è uguale a** $f(x)$. Esse sono dette "le **primitive**" (= "**antiderivate**") di $f(x)$, e **differiscono tutte fra loro per una costante additiva**.
Ad esempio, presa la funzione $f(x) = \cos x$, la famiglia delle sue "primitive", ossia il suo "integrale indefinito", è la famiglia costituita dalle infinite funzioni $\operatorname{sen} x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.
Infatti tutte, e sole, le funzioni della forma $\operatorname{sen} x + c$, hanno per derivata $\cos x$.

Il simbolo di integrale indefinito è il seguente: $\boxed{\int f(x)\,dx}$ (leggi: "integrale di $f(x)$ in dx").

Tale simbolo è stato scelto per via del legame che il **teorema di Torricelli-Barrow** stabilisce fra il problema del "calcolo dell'area sotto una curva" (integrale DEFINITO) e la ricerca dell' "antiderivata" o "primitiva" di una funzione (integrale INDEFINITO, appunto).
Poiché, dunque, il simbolo di integrale indefinito indica la FAMIGLIA di tutte le primitive della funzione $f(x)$ **(o, se si preferisce: indica la GENERICA primitiva della** $f(x)$**), esso contiene *implicitamente* una costante additiva arbitraria.**

Esempi: $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c,\quad \int 4x^3 dx = x^4 + c,\quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$

TAVOLA DEI PRINCIPALI INTEGRALI IMMEDIATI

Formule di derivazione	Formule corrispondenti di integrazione
Per derivare una potenza occorre moltiplicare per l'esponente e abbassare questo di un'unità $Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$
$D[f(x)]^{\alpha} = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$	$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$ Caso particolare importante: $\int f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + c$
$D\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + c$
$D\ln\|f(x)\| = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + c$
$De^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$De^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$
$D\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
$D\operatorname{sen} f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$	$\int [\cos f(x)] \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$
$D\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$
$D\cos f(x) = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$	$\int [\operatorname{sen} f(x)] \cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c$
$D\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + c$
$D\operatorname{arcsen} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$
$D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$
$D\operatorname{arctg} f(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$

OSSERVAZIONI

- La tabella non riporta le formule di derivazione $D\,arc\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $D\,arc\,cotg\,x = -\dfrac{1}{1+x^2}$, con le corrispondenti formule di integrazione, per il fatto che tali formule differiscono solo per un segno dalle analoghe con $arc\,sen\,x$ e $arc\,tg\,x$ e dunque, dovendo calcolare ad esempio $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,
  si potrebbe scrivere indifferentemente $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arc\,sen\,x + c$ oppure $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -arc\cos x + c$,
  ma di norma si preferisce, per consuetudine, utilizzare la funzione $arc\,sen$.
  Idem per la coppia $arc\ tg$, $arc\ cotg$: si privilegia quasi sempre la prima fra le due.

- Non abbiamo riportato neppure le formule $Da^x = a^x \ln a \to \displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
  perché, di fronte ad un'esponenziale in base diversa da e,
  è sempre possibile passare alla base e, tramite l'identità
  $a^x = e^{x \ln a}$.
  Discorso analogo per le formule con la funzione logaritmica in base diversa da e.

Qui di seguito riportiamo **qualche esempio di applicazione** delle formule elencate in tabella.
Nello svolgere gli integrali proposti, abbiamo tenuto conto della **"linearità" dell'integrale indefinito**:

$$\boxed{\int [hf(x) + kg(x)]dx = h\int f(x)dx + k\int g(x)dx}$$

Esempio 1

$$\int \frac{6x^5 - \sqrt[3]{x} + 5x - 2}{x}dx = \int \left(\frac{6x^5}{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= \int \left(6x^4 - \frac{x^{1/3}}{x} + 5 - \frac{2}{x} \right) dx = \int \left(6x^4 - x^{-\frac{2}{3}} + 5 - \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= 6\int x^4 dx - \int x^{-\frac{2}{3}} dx + 5\int dx - 2\int \frac{1}{x}dx = 6\frac{x^5}{5} - \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + 5x - 2\ln|x| + c =$$

$$= \frac{6}{5}x^5 - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 5x - 2\ln|x| + c = \frac{6}{5}x^5 - 3\sqrt[3]{x} + 5x - 2\ln|x| + c$$

UN CONSIGLIO DA AMICO

Specialmente nei primi esercizi, è opportuno fare la verifica,
derivando l'espressione ottenuta,
per controllare se si ottiene effettivamente quella che era la funzione integranda.

E ciò, non soltanto per essere sicuri che il risultato sia esatto,
ma anche per impadronirsi meglio dei meccanismi psicologici dell'integrazione:
essendo l'integrazione indefinita nient'altro che il processo inverso della derivazione,
in qualche modo si impara ad integrare solo se la mente è allenata a
"tornare-indietro-per-vedere-se-è-giusto".

Verifica di $\displaystyle\int \frac{6x^5 - \sqrt[3]{x} + 5x - 2}{x}dx = \int \left(6x^4 - x^{-\frac{2}{3}} + 5 - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{6}{5}x^5 - 3\sqrt[3]{x} + 5x - 2\ln|x| + c$:

$$D\left(\frac{6}{5}x^5 - 3\sqrt[3]{x} + 5x - 2\ln|x| + c \right) = \frac{6}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5}x^4 - \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}x^{\frac{1}{3}-1} + 5 - 2 \cdot \frac{1}{x} = 6x^4 - x^{-\frac{2}{3}} + 5 - \frac{2}{x}$$

OK!!!!!!!!

Esempio 2 $\int (1+x+x^2-7x^3+e^x)\,dx = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-7\frac{x^4}{4}+e^x+c$

Esempio 3 $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$

Esempio 4 $\int (sen\,x - cos\,x)\,dx = -cos\,x - sen\,x + c$

Esempio 5 $\boxed{\int sen^3 x\,dx}$

OCCHIO! ATTENZIONE! Questo esercizio non è immediato!

Sarebbe **sbagliato** scrivere $\int sen^3 x\;dx = \frac{sen^4 x}{4}+c$!

Infatti l'integrale proposto non è della forma $\int x^{\alpha}\,dx$,

ma si presenta invece come $\int [\,f(x)]^{\alpha}\,dx$.

Sennonché, quando la base della potenza è una funzione, la formula di riferimento è

$$\int [\,f(x)]^{\alpha}\cdot f\,'(x)\,dx = \frac{[\,f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$$

che richiede la presenza, come fattore moltiplicativo, della DERIVATA
della funzione che è alla base della potenza … ma un tale fattore nel nostro esempio non c'è.
L'esercizio proposto è dunque abbastanza problematico.
Lo si può risolvere solo con una certa dose di inventiva: vedi qui sotto.

$$\int sen^3 x\,dx = \int sen^2 x\cdot sen\,x\,dx = \int (1-cos^2 x)\cdot sen\,x\,dx = \int (sen\,x - cos^2 x\,sen\,x)\,dx =$$

$$= \int sen\,x\,dx + \int \underbrace{(cos^2 x)\cdot(-sen\,x)}_{[\,f(x)]^2\cdot f\,'(x)}\,dx = -cos\,x + \frac{cos^3 x}{3}+c$$

Esempio 6 $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \underbrace{\ln x\cdot\frac{1}{x}}_{f(x)\cdot f\,'(x)}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}+c = \frac{\ln^2 x}{2}+c$

Esempio 7 $\int \underbrace{\frac{2x+3}{x^2+3x-4}}_{\frac{f\,'(x)}{f(x)}}\,dx = \ln\left|x^2+3x-4\right|+c$

Esempio 8 $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{\frac{f\,'(x)}{f(x)}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c$

Esempio 9 $\int \cos 3x\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot 3\cos 3x\;dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3\cos 3x}_{f\,'(x)\cdot cos\,f(x)}\,dx = \frac{1}{3}\,sen\,3x+c$

Con semplici passaggi analoghi a quelli dell'Esempio 9,
è possibile ricavare le seguenti **formule** di frequente applicazione:

$\boxed{\int cos\,mx\,dx = \frac{sen\,mx}{m}+c}$ $\boxed{\int sen\,mx\,dx = -\frac{cos\,mx}{m}+c}$ $\boxed{\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}+c}$

Esempio 10 $\int \underbrace{e^{sen\,x}\cdot cos\,x}_{e^{f(x)}\cdot f'(x)}\,dx = e^{sen\,x}+c$ **Verifica**: $D\left(e^{sen\,x}+c\right)=e^{sen\,x}\cdot cos\,x,\ OK!!!$

Esempio 11 $\int x\cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\cdot e^{-x^2}}_{e^{f(x)}\cdot f'(x)}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$

Esempio 12 $\boxed{\int e^{-x^2}\,dx}$

STOP!!!

E' stato dimostrato che questo integrale non può essere espresso in termini di funzioni elementari.

La funzione la cui derivata è e^{-x^2} esiste (anzi, ne esistono infinite, che differiscono fra loro per una costante), ma non si tratta di una funzione che si possa scrivere combinando fra loro le "classiche" funzioni algebriche, goniometriche, esponenziali, logaritmiche ecc.

Esempio 13 $\int \frac{1}{1+3x^2}dx = \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}}_{\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}\,x\right)+c$

Esempio 14 $\int \frac{1}{4+9x^2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{9}{4}x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx = \frac{1}{6}arctg\frac{3}{2}x+c$

Esempio 15 $\int \frac{x}{4+9x^2}dx \overset{NOTA\,1}{=} \frac{1}{18}\int \frac{18x}{4+9x^2}dx = \frac{1}{18}\ln\left|4+9x^2\right| \overset{NOTA\,2}{=} \frac{1}{18}\ln(4+9x^2)$

NOTA 1: la derivata del denominatore è $18x$;
cercheremo perciò di far comparire $18x$ a numeratore,
onde ricondurci alla situazione $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$

NOTA 2: possiamo sciogliere le stanghette di valore assoluto perché è $4+9x^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Esempio 16 $\int \frac{x^2}{4+9x^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{9x^2}{4+9x^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{9x^2+4-4}{4+9x^2}dx =$

$= \frac{1}{9}\int\left(1-\frac{4}{4+9x^2}\right)dx = \frac{1}{9}\int dx - \frac{4}{9}\int \frac{1}{4+9x^2}dx \overset{NOTA\,3}{=} \frac{1}{9}x-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{6}\,arctg\frac{3}{2}x+c =$

$= \frac{1}{9}x-\frac{2}{27}arctg\frac{3}{2}x+c$ NOTA 3: approfittando di un risultato già acquisito (Esempio 14)

Esempio 17 $\int \frac{1}{9x^2-6x+1}dx =$

$= \int \frac{1}{(3x-1)^2}dx = \int (3x-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3(3x-1)^{-2}}_{f'(x)\cdot[f(x)]^\alpha}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{3(3x-1)}+c$

Esempio 18 $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \underbrace{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}\,dx = \ln\left|\ln x\right|+c$ **Verifica**:
$D\left(\ln\left|\ln x\right|+c\right) = \frac{1}{\ln x}\cdot D(\ln x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x},\ OK!!!$

Esempio 19 $\int (3x+sen\,4x)\,dx = 3\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{cos\,4x}{4}+c = \frac{3x^2}{2}-\frac{cos\,4x}{4}+c$

10. ESERCIZI sugli integrali immediati (o quasi)

1) $\int e^{-x}dx$

2) $\int \frac{1}{x^2}dx$

3) $\int \left(2+e^x\right)^2 dx$

4) $\int \sqrt[7]{x^6}\,dx$

5) $\int e^{3x+4}dx$

6) $\int \frac{2}{x+1}dx$

7) $\int \frac{2}{2x+1}dx$

8) $\int \frac{3-2x-x^2}{x^2}dx$

9) $\int \left(1-\cos 3x\right)dx$

10) $\int \frac{1+x^2}{x}dx$

11) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$

12) $\int x\left(1+x^2\right)^{10}dx$

13) $\int 6x\sqrt{1+x^2}\,dx$

14) $\int \left(4\,sen\,x-\cos 4x\right)dx$

15) $\int sen\,x\cos x\,dx$

16a) $\int sen^2\,x\,dx$ Suggerimento: $sen^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ 16b) $\int \cos^2 x\,dx$

17) $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$

18) $\int \frac{x}{1+4x^2}dx$

19) $\int \frac{x^2}{1+4x^2}dx$ Suggerimento: $\frac{x^2}{1+4x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2}{1+4x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1+4x^2-1}{1+4x^2}=\ldots$

20) $\int \frac{1+4x^2}{x^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

22) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

23) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

24) $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$

25) $\int \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$

26) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1} dx$

27) $\int \frac{1}{16 + x^2} dx$ Suggerimento: $\frac{1}{16+x^2} = \frac{\frac{1}{16}}{1+\frac{x^2}{16}} = \ldots$

28) $\int \sqrt{10-3x}\, dx$

29) $\int \frac{x-1}{x^2-2x-3} dx$

30) $\int \frac{1}{(5x+3)^4} dx$

31) $\int \frac{dx}{1+(1-x)^2}$

32) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

33) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ Suggerimento: $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-2x+x^2\right)}} = \ldots$

RISPOSTE

1) $-e^{-x}+c$ 2) $-\frac{1}{x}+c$ 3) $4x+4e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+c$ 4) $\frac{7}{13}x\sqrt[7]{x^6}+c$ 5) $\frac{1}{3}e^{3x+4}+c$

6) $2\ln|x+1|+c$ 7) $\ln|2x+1|+c$ 8) $-\frac{3}{x}-2\ln|x|-x+c$ 9) $x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+c$

10) $\ln|x|+\frac{1}{2}x^2+c$ 11) $\ln\sqrt{1+x^2}+c$ 12) $\frac{1}{22}\left(1+x^2\right)^{11}+c$ 13) $2\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}+c$

14) $-4\cos x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x+c$ 15) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+c$ 16a) $\frac{x-\operatorname{sen} x\cos x}{2}+c$ 16b) $\frac{x+\operatorname{sen} x\cos x}{2}+c$

17) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x+c$ 18) $\frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right)+c$ 19) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x+c$ 20) $-\frac{1}{x}+4x+c$

21) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} 2x+c$ 22) $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+c$ 23) $\frac{1}{3}\ln^3 x+c$ 24) $\frac{1}{2}\ln^2 2x+c$ 25) $\frac{2}{3}\operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x}+c$

26) $\ln(\operatorname{sen} x+1)+c$ 27) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}$ 28) $-\frac{2}{9}(10-3x)\sqrt{10-3x}$ 29) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-3\right|+c$

30) $-\frac{1}{15(5x+3)^3}$ 31) $-\operatorname{arctg}(1-x)+c$ 32) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}+c$ 33) $-\operatorname{arcsen}(1-x)+c$