11. Integrazione "PER PARTI"

Capita a volte che la funzione integranda si presenti come il prodotto di due funzioni, tali che nessuna di esse sia la derivata dell'altra, ma tali però che **fra le due, almeno una sia "facilmente integrabile".** In questi casi può talvolta "funzionare" la cosiddetta **regola di integrazione per parti**.

Non vogliamo rappresentarla subito tramite una formula:
infatti, la regola si assimila più facilmente se è descritta a parole.
Anzi, **sarà estremamente conveniente studiarsi la "filastrocca" a memoria**
e ripetersela passo a passo mentre la si applica.

Premesso che
- il fattore "facilmente integrabile" viene chiamato **"fattor differenziale" (fd)**
- mentre l'altro fattore viene detto **"fattor finito" (ff)**,

la regola dice così:

> **"fattor finito per** (moltiplicato)
> **l'integrale** (NOTA 1) **del fattor differenziale,**
> **− (meno)**
> **l'integrale** (NOTA 2) **dell'integral trovato,**
> **per la derivata del fattor finito".**

NOTA 1 qui "integrale" significa "primitiva"

NOTA 2 qui "integrale" significa invece "operatore di integrazione $\int$ "

Va detto che la scelta del fattore da prendersi come "fattor differenziale" è legata non soltanto a questioni di "facile integrabilità", ma anche alla previsione della natura del nuovo integrale cui si perverrà: … sì, perché **quando si integra per parti non si conclude subito l'integrazione, ma la si riconduce al calcolo di un altro integrale**, che sia più semplice di quello assegnato.

Esempio 1

$$\int \underbrace{x}_{ff}\,\underbrace{sen\,x\,dx}_{fd} = \boxed{x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot 1\,dx} = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + sen\,x + c$$

fattor finito $\boxed{x}$ per l'integrale del fattor differenziale $\boxed{-\cos x}$

− (meno)

l'integrale $\boxed{\int}$ dell' integral trovato $\boxed{-\cos x}$ per la derivata del fattor finito $\boxed{1}$

Verifica: $D(-x\cos x + sen\,x + c) = -(1\cdot\cos x - x\,sen\,x) + \cos x = \cancel{-\cos x} + x\,sen\,x + \cancel{\cos x}$ OK!!!

Prima di proseguire con gli esempi, *traduciamo la regola in formula e dimostriamola*.
Indichiamo con:
- $\int \underbrace{a(x)}_{ff}\cdot\underbrace{b(x)\,dx}_{fd}$ l'integrale di partenza
- $B(x)$ quello che la regola chiama l' "integrale" (nel senso di "primitiva") del fattor differenziale

La regola afferma dunque che $\int a(x)\cdot b(x)\,dx = a(x)\cdot B(x) - \int B(x)\cdot a'(x)\,dx$

e dimostrarla significa semplicemente far vedere che $D\left(a(x)\cdot B(x) - \int B(x)\cdot a'(x)\,dx\right) = a(x)\cdot b(x)$

Ora:

$$D\left(a(x)\cdot B(x) - \int B(x)\cdot a'(x)\,dx\right) = \underbrace{a'(x)\cdot B(x) + a(x)\cdot B'(x)}_{\substack{\text{questa è la derivata}\\ \text{del prodotto } a(x)B(x)}} - \underbrace{B(x)\cdot a'(x)}_{\substack{\text{la derivata}\\ \text{di un integrale}\\ \text{è la funzione}\\ \text{integranda}}} =$$

$$= \cancel{a'(x)\cdot B(x)} + a(x)\cdot \underbrace{b(x)}_{\substack{B \text{ indicava}\\ \text{la primitiva}\\ \text{di } b:\\ B'(x)=b(x)}} \cancel{-B(x)\cdot a'(x)} = a(x)\cdot b(x),\ \text{C.V.D.}$$

Esempio 2 $\quad \int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\ln x}_{ff}\,dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

Esempio 3 $\quad$ *Qui si integra per parti una prima e poi una seconda volta!*

$$\int \underbrace{x^2}_{ff}\underbrace{e^x\,dx}_{fd} = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx = x^2e^x - 2\int \underbrace{x}_{ff}\,\underbrace{e^x\,dx}_{fd} =$$
$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x \cdot 1dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

Esempio 4

$$\int \underbrace{x^2}_{ff}\underbrace{\cos 2x\,dx}_{fd} = x^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \cdot 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x - \int \underbrace{x}_{ff}\,\underbrace{\operatorname{sen} 2x\,dx}_{fd} = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x - \left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int -\frac{\cos 2x}{2} \cdot 1\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$$

TIPICI INTEGRALI DA RISOLVERE PER PARTI sono i seguenti:

$$\int \underbrace{x^n}_{ff}\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{fd} \qquad \int \underbrace{x^n}_{ff}\underbrace{\cos x\,dx}_{fd} \qquad \int \underbrace{x^n}_{ff}\underbrace{e^x\,dx}_{fd} \qquad \int \underbrace{x^n}_{fd}\underbrace{\ln x}_{ff}\,dx$$

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,sen} x}_{ff}\,dx \qquad \int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,cos} x}_{ff}\,dx \qquad \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{ff}\,dx$$

Esempio 5

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,sen} x}_{ff}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= x \cdot \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\int -2x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

OSSERVAZIONE DI CARATTERE FORMALE

In $\int \underbrace{x^n}_{fd}\underbrace{\ln x}_{ff}\,dx$, *tanto per fare un esempio, non sarebbe perfettamente corretto dire che il fatt. diff. è* x^n *:*
il "vero" fattor differenziale è, a stretto rigore, $x^n\,dx$.
Il fatto è che il "fattor differenziale" dovrebbe, volendo, poter essere pensato come il "differenziale" (vedi uno dei paragrafi successivi) di una funzione.
Tuttavia, nello scrivere, non siamo stati tanto a sottilizzare, perché banali ragioni di carattere grafico ci avrebbero reso un po' scomoda questa pignoleria.

INTEGRAZIONE COL "CIRCOLO VIZIOSO APPARENTE"

Esempio 6

$$\boxed{\int \underbrace{e^x}_{fd}\underbrace{\cos x}_{ff}\,dx} = \cos x \cdot e^x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)\,dx = e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{fd}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{ff}\,dx = e^x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot e^x - \boxed{\int e^x \cdot \cos x\,dx}$$

Sembra che si sia generato un circolo vizioso; abbiamo infatti ritrovato l'integrale di partenza.
Ma se si scrivono soltanto il primo e l'ultimo anello della catena, si ottiene:

$\boxed{\int e^x \cdot \cos x\,dx} = e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - \boxed{\int e^x \cdot \cos x\,dx}$ da cui è possibile ricavare $\boxed{\int e^x \cdot \cos x\,dx}$:

$$2\boxed{\int e^x \cdot \cos x\,dx} = e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x + c_1$$

$$\boxed{\int e^x \cdot \cos x\,dx} = \frac{e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} + c$$

Gli ESERCIZI sull'integrazione per parti sono a pagina 38.