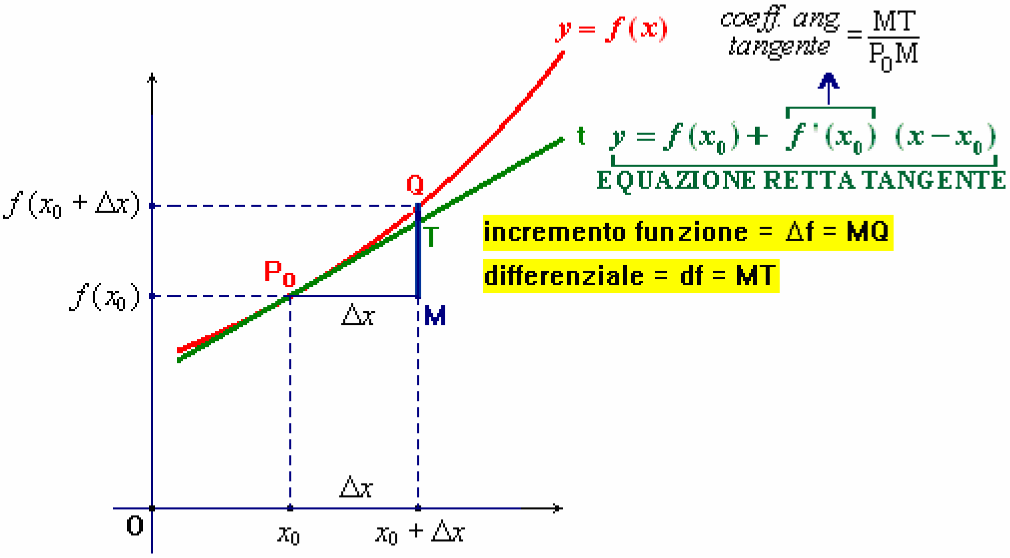
12. Il DIFFERENZIALE, questo sconosciuto



Nella figura è rappresentata una funzione $y = f(x)$ derivabile in un'ascissa x_0.

Il grafico della f è dunque dotato di retta tangente, non verticale, nel punto $P_0\left(x_0, f(x_0)\right)$;
tale tangente t ha, com'è noto, equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ o anche $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

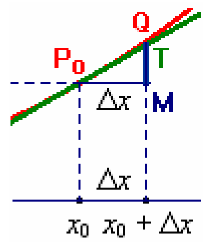
A partire dal valore x_0, diamo alla variabile indipendente un incremento Δx:
passiamo cioè da x_0 al nuovo valore $x_0 + \Delta x$.
Che incremento subisce, in corrispondenza, la nostra funzione?

Dall'ordinata $f(x_0)$ si va alla nuova ordinata $f(x_0 + \Delta x)$ (l'ordinata del punto Q),
quindi l'incremento subito dalla funzione è

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Nella figura, tale incremento Δf è rappresentato dalla misura (con segno) del segmento orientato MQ.

Pensiamo ora a cosa succederebbe prendendo Δx molto, ma molto piccolo.
Con Δx piccolissimo, il grafico della f è vicinissimo a quello della tangente *t*:
dunque il segmento orientato che nella figura è indicato con MQ
tende ad identificarsi col segmento orientato MT, la cui misura con segno è



$$\boxed{MT} = y_T - y_M =$$
$$= \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right] - f(x_0) =$$
$$= f'(x_0)(x - x_0) = \boxed{f'(x_0)\Delta x}\ \text{(\textit{vedi anche} NOTA)}$$

NOTA:
il coeff. ang. *m*
della retta tangente
è uguale alla derivata;
ma

$$m = \frac{diff.\ ordinate}{diff.\ ascisse} = \frac{MT}{P_0M}$$

da cui

$$MT = m \cdot P_0M = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Pertanto, se siamo interessati all'incremento

$$\boxed{\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = MQ}$$

che la funzione subisce, quando diamo alla x
un PICCOLO incremento, facendola passare da x_0 a $x_0 + \Delta x$,
potremo egregiamente approssimare Δf con la quantità $f'(x_0)\Delta x$.

Riassumendo:

$$\text{MQ} \underset{\substack{circa\\uguale\ a}}{\approx} \text{MT}, \text{ se } \Delta x \text{ è piccolo}$$

cioè: $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$, se Δx è piccolo.

Insomma, **l'incremento $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ subito da una funzione, in corrispondenza di un PICCOLO incremento Δx della variabile indipendente, è ben approssimato dalla quantità $f'(x_0)\Delta x$, che è "l'incremento della y, misurato *non* sul grafico della funzione, *bensì* sulla retta tangente"**

In Matematica e nelle sue applicazioni (ad esempio alla Fisica),
è assai frequente che interessi valutare
il *piccolo* incremento Δf subito da una determinata funzione f,
quando si dà alla variabile indipendente un *piccolo* incremento Δx,
che la porti dal valore x al valore $x+\Delta x$.

Abbiamo scoperto che tale incremento è egregiamente approssimato
dalla semplice e "maneggevole" quantità
$f'(x)\Delta x$ (se, beninteso, Δx è molto piccolo!)
E abbiamo anche visto che questa quantità $f'(x)\Delta x$ corrisponde
all' "incremento della y, misurato *non* sul grafico della funzione, *bensì* sulla retta tangente".

Alla quantità $f'(x)\Delta x$ si dà un nome particolare:
la si chiama il DIFFERENZIALE della funzione *f*,
e la si indica con df o anche con dy.

$$\underbrace{df}_{\text{OPPURE: } dy} = f'(x)\Delta x = \text{differenziale della funzione } f = \substack{\text{quantità che bene approssima l'incremento della } f,\\ \text{per un piccolo incremento della } x}$$

Il differenziale è dunque il prodotto della derivata, per l'incremento della variabile indipendente.

Osserviamo che:

a) il differenziale è una quantità che dipende da DUE variabili: x e Δx;
tuttavia, se pensiamo x fissato, a questo punto il differenziale dipenderà soltanto da Δx.

b) E' vero: il differenziale è utile, per approssimare l'incremento della funzione,
soltanto quando Δx è molto piccolo;
d'altra parte, il differenziale è una quantità che resta definita anche quando Δx non è piccolo.

c) Il significato geometrico del differenziale è importantissimo per comprendere bene.
Ribadiamolo ancora una volta:
**differenziale = incremento della y, misurato *non* sul grafico della funzione,
bensì sulla retta tangente.**

VEDIAMO UN ESEMPIETTO

Il differenziale della funzione $y = x^3$ è
$dy = 3x^2\Delta x$ [si può pure scrivere: $d\left(x^3\right) = 3x^2\Delta x$].
Ciò significa che, per un piccolo incremento di x, la quantità $dy = 3x^2\Delta x$
fornisce un'ottima approssimazione dell'incremento subito dalla funzione $y = x^3$.

Poniamo che si voglia valutare l'incremento subito dalla funzione $y = x^3$
nel passaggio da $x = 2$ a $x = 2{,}001$ $(\Delta x = 0{,}001)$.
Bene, si potrà dire che tale incremento è molto vicino a $3\cdot 2^2\cdot 0{,}001 = 0{,}012$.
In effetti, andando a calcolare il VERO incremento della funzione, si trova $(2{,}001)^3 - 2^3 = 0{,}012006$.