## 13. Approfondimenti: Pierino e il differenziale

**Prof**. : Ti vedo perplesso, Pierino.

**Pierino**: Sì, in effetti sono un po' confuso, per via dei simboli utilizzati.
Abbiamo detto che il differenziale di una funzione, ossia la quantità $f'(x)\Delta x$
(differenziale = prodotto della derivata per l'incremento della variabile indipendente), viene indicato con $dy$.
Quella "*d*" sta dunque per "differenziale"?

**Prof** : Certo.

**Pierino**: Ma a me quella "*d*" fa anche venire in mente la questione delle "differenze infinitesime" !
Abbiamo sempre detto che, in matematica, il simbolo principe per indicare differenza è $\Delta$;
tuttavia,se si pensa a una differenza "piccolissima", "tendente a zero", "infinitesimale",
al posto del simbolo $\Delta$ si va preferibilmente a sostituire il simbolo $d$.
Ad esempio, se penso a un punto in movimento, e lo osservo in due istanti di tempo successivi $t_1, t_2$,
quando ha velocità rispettivamente $v_1, v_2$, potrò dire che nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1 = \Delta t$
la variazione di velocità è stata $v_2 - v_1 = \Delta v$;
ma se i due istanti di tempo li penso estremamente ravvicinati, preferirò parlare
di un intervallino di tempo $dt$ nel quale è intervenuta una piccolissima variazione di velocità $dv$.

**Prof** : Parole sante.

**Pierino**: Dunque, se trovo da qualche parte il simbolo $dy$,
dovrò presumere che indichi ***il differenziale*** della *y*, oppure ***un incremento infinitesimo*** della $y$ ?
Perché fra l'altro, se leggo $dy$ come differenziale, allora $dy$ sarà
un "incremento, calcolato non sul grafico della funzione bensì sulla retta tangente" (segmento MT della figura),
mentre se leggo $dy$ come incremento (infinitesimo) della funzione,
allora $dy$ mi indicherà il VERO incremento, quello indicato dal segmento MQ della figura.

**Prof** : in effetti, potrebbe esserci una certa ambiguità.
D'altra parte, abbiamo sottolineato che il differenziale si rivela utile, quando l'incremento della *x* è piccolo.
In tali condizioni, MT ed MQ sono "pressappoco uguali"
e interpretare $dy$ come indicatore dell'incremento sulla retta tangente oppure sul grafico
diventa tendenzialmente irrilevante.
Certo, il discorso diventerebbe più delicato se queste questioni dovessero entrare
nella dimostrazione di un teorema … in tal caso, il "pressappoco" andrebbe valutato attentamente,
e sarebbero necessarie di volta in volta considerazioni più "fini".
Tuttavia, almeno per una prima "presa di confidenza" coi simboli, potremo dire che:

a) il fatto se la scrittura $dy$ vada letta come "differenziale della funzione $y$"
oppure come "incremento infinitesimo della variabile dipendente $y$", si desume dal contesto;

b) le due possibili interpretazioni finiscono per rivelarsi sostanzialmente equivalenti perché il differenziale
è di norma coinvolto in situazioni in cui, essendo piccolissimo l'incremento della variabile indipendente,
tendono a identificarsi l'incremento VERO della variabile dipendente (MQ),
e il valore APPROSSIMATO (MT) di tale incremento,
che si ottiene sostituendo al grafico della funzione, il grafico della retta tangente.

**Pierino**: Bene.
Però, se il differenziale trova la sua ragion d'essere soprattutto quando l'incremento $\Delta x$ è piccolo piccolo,
perché non indicare anche quest'ultimo incremento con $dx$ anziché con $\Delta x$ ?

**Prof** : In effetti, in matematica si finisce per fare proprio così come stai suggerendo tu!
Avevamo posto, inizialmente:
$dy = f'(x)\Delta x$ = differenziale della funzione $f$ =
= quantità che bene approssima l'incremento della $f$, per un piccolo incremento della $x$

Ora diciamo che

si preferisce scrivere il differenziale di una funzione $f$ sotto la forma $dy = f'(x)dx$ anziché $dy = f'(x)\Delta x$

- sia in considerazione del fatto che in un differenziale possiamo pensare $\Delta x$ piccolo o anche non piccolo, ma il differenziale si rivela poi utile, per approssimare l'incremento della funzione, soltanto quando quel $\Delta x$ diventa un infinitesimale $dx$;
- sia per il fatto che, formalmente, se pensiamo alla particolare funzione $y = x$ (la "funzione identica"),
avremo $dy = d(x) = 1 \cdot \Delta x$ e quindi $\underbrace{dx}_{(*)} = \Delta x$ (*) differenziale della funzione identica

**Pierino**:
quindi, adotteremo preferibilmente la scrittura:

$$dy = f'(x)dx$$

al posto della

$$dy = f'(x)\Delta x,$$

e, in tale scrittura $dy = f'(x)dx$, potremo interpretare indifferentemente il simbolo $dx$ come indicante:

- un piccolo incremento di *x*;
- oppure il differenziale (a sua volta) della funzione identica $y = x$.

Ho capito bene?

**Prof** :
Hai capito MOLTO bene.
Ora ti faccio un'anticipazione veloce di una questione un po' delicata.
All'Università ti sarà probabilmente richiesto di tener presente il seguente fatto:

Il differenziale, scritto nella forma $dy = f'(x)dx$,
è formalmente invariante se si passa a considerare la variabile indipendente
come funzione, a sua volta, di un'altra variabile"
(**Principio di Invarianza del Differenziale**).

**Pierino**: ??????

**Prof** :
Sia $f: x \rightarrow y$.
Allora

$$\textit{differenziale di } f = dy = f'(x)dx.$$

Bene.
Se ora pensiamo $x$ non più come variabile indipendente, ma come funzione di un'altra variabile, diciamo $t$, avremo:

$$x = x(t) = \varphi(t)$$

$$t \xrightarrow{\varphi} x \xrightarrow{f} y$$

e quindi avremo una funzione composta:

$$y = y(x) = f\left(\varphi(t)\right) = F(t)$$

Quale sarà il differenziale di questa funzione $y$, che ora è vista come funzione di $t$ anziché di $x$?

Vediamo: $dy = F'(t)dt = f'(x)\cdot\varphi'(t)dt = f'(x)\cdot[\varphi'(t)dt] = f'(x)dx$ in quanto $dx = \varphi'(t)dt$

In definitiva: $dy = f'(x)\cdot dx$ anche se $x$ è, a sua volta, una funzione. Il nostro asserto è dimostrato.

**Pierino**: Cosa mi può dire, per terminare, riguardo alla scrittura $y' = \dfrac{dy}{dx}$?

In questo caso, $dy$ e $dx$ hanno il significato di "piccoli incrementi" e non di differenziali, giusto?

Infatti abbiamo imparato che $\dfrac{dy}{dx}$ sta per "$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x$ (e quindi anche $\Delta y$) è piccolissimo" …

cioè, il simbolo $\dfrac{dy}{dx}$ è un simbolo agile per "vedere" la derivata come limite del rapporto incrementale, al tendere dell'incremento a zero … Dico bene?

**Prof** : $\dfrac{dy}{dx}$, notazione introdotta da LEIBNIZ, ha proprio il significato che hai ricordato tu.
D'altra parte, se anche interpretassimo questo simbolo come rapporto fra due DIFFERENZIALI anziché come rapporto fra due INCREMENTI INFINITESIMI, non sbaglieremmo.
Osserva infatti che si può scrivere, banalmente,

$$f'(x) = \frac{f'(x)dx}{dx} = \frac{dy}{dx}$$ interpretando tutte le $d$ come indicatori di "differenziale".

In questo senso

**si può anche dire, volendo, che la derivata è uguale ad un rapporto di due differenziali**
(il differenziale della funzione che si sta derivando,
fratto il differenziale della variabile rispetto a cui si deriva).