14. Integrazione per SOSTITUZIONE (vale a dire, “tramite una posizione”, “tramite un cambiamento di variabile”)

La tecnica di integrazione per sostituzione
consiste in una serie di passaggi “meccanici”, “formali”,
la cui correttezza ai fini della determinazione della famiglia delle primitive
si può constatare dagli esempi,
e si potrebbe dimostrare in termini generali.

Serviamoci dapprima di un caso particolare per illustrare il procedimento.

$$\boxed{\mathrm{I}=\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}}$$

Poniamo $\boxed{\sqrt{x+1}=y}$.

Avremo $\boxed{x+1=y^2}$

da cui $\boxed{x=y^2-1}$.

Differenziando ora i due membri dell’ultima equazione ottenuta, otteniamo

$$\boxed{dx=2y\cdot dy}$$

e **sostituendo** nell’integrale proposto:

$$\mathrm{I}=\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}=\int \frac{2\cancel{y}\,dy}{(y^2-1-3)\,\cancel{y}}=\int \frac{2\,dy}{\underbrace{y^2-4}_{(y+2)(y-2)}}$$

da risolversi “spezzando” la frazione:

$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{A}{y+2}+\frac{B}{y-2}$$

$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{A(y-2)+B(y+2)}{(y+2)(y-2)}$$

$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{Ay-2A+By+2B}{(y+2)(y-2)}$$

$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{(A+B)y+(-2A+2B)}{(y+2)(y-2)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ -2A+2B=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ -A+B=1\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}(1)+(2)\\(1)-(2)\end{array}\begin{cases}2B=1\rightarrow B=1/2\\ 2A=-1\rightarrow A=-1/2\end{cases}$$

$$\frac{2}{y^2-4}=\frac{-\frac{1}{2}}{y+2}+\frac{\frac{1}{2}}{y-2}$$

$$\mathrm{I}=\int \frac{2}{y^2-4}dy=$$

$$=\int \frac{-\frac{1}{2}}{y+2}dy+\int \frac{\frac{1}{2}}{y-2}dy=-\frac{1}{2}\ln|y+2|+\frac{1}{2}\ln|y-2|+c=-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+1}+2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+1}-2\right|+c$$

La procedura di integrazione per sostituzione si può descrivere come segue:

I. **individuo, nella funzione integranda, l'espressione da sostituire e pongo** $\alpha(x) = y$;
II. **isolo x, invertendo**: $x = \alpha^{-1}(y) = \beta(y)$;
III. **differenzio**: $dx = \beta'(y)\,dy$;
IV. **sostituisco nell'integrale**: al posto di x, ci metto $\beta(y)$, e al posto di dx metterò $\beta'(y)\,dy$;
V. **integro nella variabile y e infine risostituisco**, al posto di y, l'espressione $\alpha(x)$.

A volte, il metodo viene applicato saltando, in pratica, il punto I):
si pone subito $x = \beta(y)$ o $x = \beta(t)$ … essendo β una funzione scelta, ovviamente, in modo che l'integrale in y così ottenuto sia poi risolubile.

Un esempio di questa variante del metodo di sostituzione è l'integrale notevole seguente.

UN INTEGRALE NOTEVOLE RISOLTO PER SOSTITUZIONE

$$\boxed{\mathrm{I} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,, \quad a > 0}$$

$x = a\,sen\,t$
$dx = a\cos t\,dt$

$$\mathrm{I} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 sen^2 t} \cdot a\cos t\,dt = a\int \sqrt{a^2(1 - sen^2 t)} \cdot \cos t\,dt =$$

$$= a\int a\sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\,dt \overset{\text{NOTA}}{=} a^2\int \cos t \cdot \cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen\,2t\right) + c = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{\cancel{4}_2} \cdot \cancel{2}\,sen\,t\cos t\right) + c = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}sen\,t\cos t\right) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + sen\,t\cos t) + c$$

Per sapere ora cosa va sostituito al posto di t,
occorre risolvere la $x = a\,sen\,t$ rispetto a t:

$$x = a\,sen\,t; \quad sen\,t = \frac{x}{a}; \quad t = arc\,sen\frac{x}{a} \quad \text{da cui} \quad \cos t = \sqrt{1 - sen^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

In definitiva:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}(t + sen\,t\cos t) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(arc\,sen\frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}arc\,sen\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

NOTA

A dire il vero, sarebbe $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$.
Ma ai nostri scopi possiamo omettere il valore assoluto:
infatti il nostro obiettivo è di effettuare passaggi formali che ci portino ad una primitiva,
ad una funzione la cui derivata sia uguale alla funzione integranda iniziale:
tanto vale allora proseguire i calcoli sotto le ipotesi più favorevoli
(in questo caso, ad esempio, supponendo $\cos x \ge 0$),
salvo poi verificare se la funzione ottenuta farà effettivamente da primitiva
alla funzione integranda proposta,
su tutto l'insieme di definizione di questa.
Anche più avanti nel procedimento di determinazione del presente integrale,
ci concediamo altre licenze dello stesso tipo, che il lettore attento non mancherà di notare.