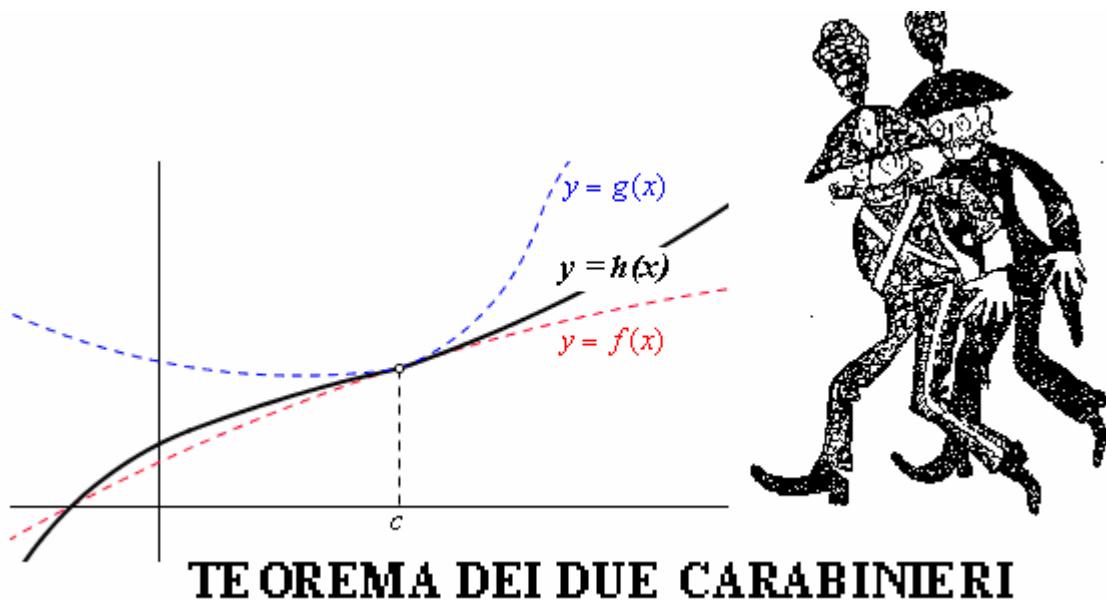


I LIMITI

1. UNA RAPIDA INTRODUZIONE pag. 1
2. UNA RASSEGNA DI ESEMPI 2
3. QUANDO IL LIMITE E' ... BANALE: LA "CONTINUITÀ" 10
4. IL LIMITE DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO: RICAPITOLIAMO 11
5. PSEUDO-UGUAGLIANZE E FORME DI INDECISIONE
(DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO) 15
6. ESERCIZI SUI LIMITI DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO 20
ESERCIZI DA SVOLGERE 22
7. LA DEFINIZIONE RIGOROSA DI LIMITE 24
8. PUNTUALIZZAZIONI VARIE SULLE DEFINIZIONI DATE 30
9. TEOREMI SUI LIMITI 34
10. FUNZIONI CONTINUE 46
11. LIMITI DI FUNZIONI ALGEBRICHE (= POLINOMI, RAPPORTI DI POLINOMI) 54
12. LIMITI DI FUNZIONI TRASCENDENTI, LIMITI "NOTEVOLI" 64
13. UNA RACCOLTA CONCLUSIVA DI ESERCIZI 78
14. LE SUCCESSIONI 84



1 I LIMITI

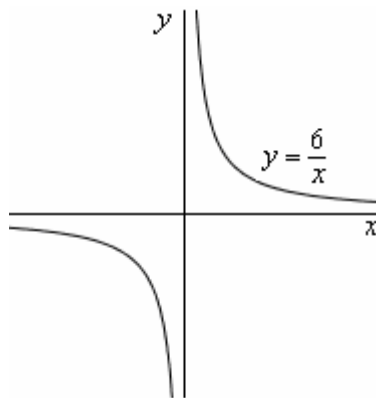
1. UNA RAPIDA INTRODUZIONE

Nella funzione $y = \frac{6}{x}$
 quando x diventa *grande grande*
 ($x = 1000$, $x = 1000000$, ...) la y corrispondente
 diventa *piccola piccola*,
 “si schiaccia a zero”,
 si avvicina “*moltissimo*” a 0.
 Ciò può essere espresso,
 in simboli, con la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$$

che si legge:

“il limite, per x che tende a $+\infty$, della quantità $\frac{6}{x}$, è zero”.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$$

IL SIMBOLO DI LIMITE

lim
 $x \rightarrow$ qui scrivo a cosa tende x
 “per x che tende a ...”
 = qui scrivo l'espressione della funzione
 = qui scrivo a cosa tende y

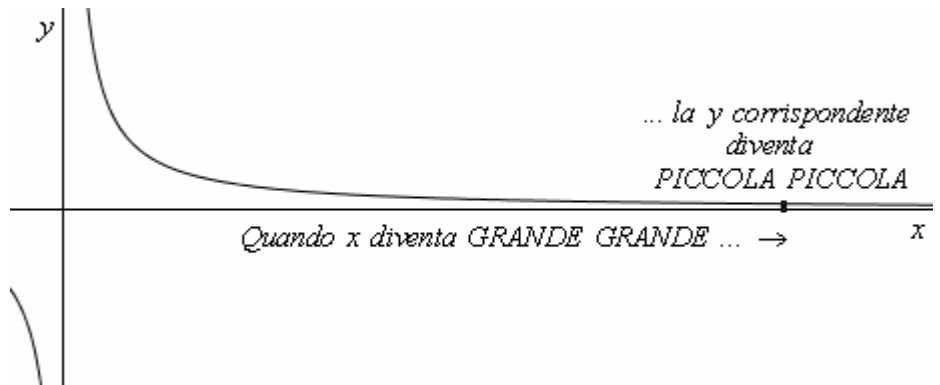
“tende” significa “si avvicina”

Cosa devo guardare, intuitivamente, per determinare un limite?

1) Posso guardare il grafico ...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = ?$$

Faccio tendere x a $+\infty$,
 ossia mi sposto, sull'asse x ,
 molto ma molto a destra ...
 ... e vedo cosa fa la y .
 In questo caso,
 la y corrispondente
 diventa piccola piccola!
 Tende a 0! Il limite è 0.



2) Oppure, anche senza grafico,

faccio assumere alla x valori molto ma molto grandi
 e mi chiedo quali valori assume la y corrispondente.
 Tali valori della y sono piccolissimi!
 Il limite è dunque 0.

$$x = 1000 \rightarrow y = \frac{6}{1000} = 0,006$$

$$x = 1000000 \rightarrow y = \frac{6}{1000000} = 0,000006$$

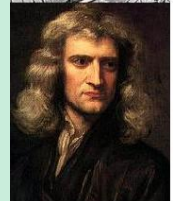
Ma dopo questa brevissima introduzione intuitiva, quei verbi, avverbi e aggettivi che abbiamo utilizzato (“tendere”, “avvicinarsi”, “moltissimo”, “piccola”, “grande” ...) dovranno essere meglio precisati e, soprattutto, inequivocabilmente QUANTIFICATI.

Inoltre le situazioni in cui si può parlare di “limite” sono assai svariate, e quell’ “avvicinarsi”, quel “tendere”, della y ad un certo valore, può realizzarsi in modalità fra loro differenti.

Abbi pazienza, ti sottoporro ora una sequenza di ESEMPI, che saranno un “ANTIPASTO” PREZIOSO, PRIMA DI ARRIVARE ALLA DEFINIZIONE, perché ti faranno entrare a contatto con le curiose problematiche in gioco e ti permetteranno così di capire per qual motivo, nonostante questioni di questo tipo si siano presentate agli studiosi fin dall’antichità classica, una definizione soddisfacente di “limite” sia emersa soltanto nel XIX secolo, a coronamento di un’avventura intellettuale millenaria, appassionante quanto impegnativa.



Archimede



Newton



Weierstrass

2. UNA RASSEGNA DI ESEMPI

Esempio 1

Fra le molte affascinanti formule che la Geometria ci propone, ce n'è anche una che permette, nota la lunghezza ℓ_n del lato del poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r , di ricavare la lunghezza ℓ_{2n} del lato del poligono regolare inscritto, avente numero di lati **doppio**.

Tale formula, ricavabile utilizzando in modo opportuno i teoremi di Pitagora e di Euclide, è la seguente:

$$\ell_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}}$$

Supponiamo che la nostra circonferenza abbia raggio **unitario**: prendiamo, insomma, $r = 1$.

Partiamo dall'**esagono** regolare inscritto: $n = 6$.

E' noto che il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio: si ha dunque $\ell_6 = r = 1$.

Bene! Applicando ora la formula, potremo subito ricavare la misura del lato del **dodecagono** regolare inscritto:

$$\ell_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,517638...$$

E iterando il procedimento, saremo poi in grado di calcolare le lunghezze dei **lati dei poligoni regolari inscritti, aventi 24 lati, 48 lati, 96 lati ...**:

$$\ell_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_{12}^2}} = 0,261052...$$

$$\ell_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_{24}^2}} = 0,130806...$$

$$\ell_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_{48}^2}} = 0,065438...$$

Nella tabella seguente ci siamo serviti della conoscenza di $\ell_6, \ell_{12}, \ell_{24}, \ell_{48}, \ell_{96}, \dots$ per ricavare i **perimetri** dei rispettivi poligoni:

$$(2p)_6 = \ell_6 \cdot 6 = \mathbf{6}, \quad (2p)_{12} = \ell_{12} \cdot 12 = \mathbf{6,211657...}, \quad (2p)_{24} = \ell_{24} \cdot 24 = \mathbf{6,265257...}$$

n	lato	perimetro	n	lato	Perimetro
6	1	6	768	0,008181208...	6,283167784...
12	0,51763809...	6,211657082...	1536	0,004090613...	6,283180926...
24	0,261052384...	6,265257227...	3072	0,002045307...	6,283184212...
48	0,130806258...	6,278700406...	6144	0,001022654...	6,283185033...
96	0,065438166...	6,282063902...	12288	0,000511327...	6,283185237...
192	0,032723463...	6,282904945...	...	...	...
384	0,016362279...	6,283115216...	...	...	...

La tabella mostra che **quando il numero di lati diventa molto alto, il valore del perimetro, pur aumentando sempre, presenta una tendenza a "stabilizzarsi" in prossimità di un valore leggermente superiore a 6,28.**

Ciò è perfettamente comprensibile se pensiamo che, **all'aumentare del numero di lati, il poligono regolare inscritto tende a "riempire" sempre più il cerchio, e quindi il suo perimetro tende ad approssimare sempre più la lunghezza della circonferenza, ossia il numero $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi = 6,283185...$**

Considerata ora la successione

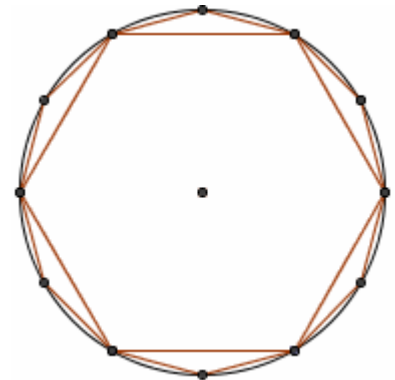
$$\begin{aligned} a_1 &= \text{perimetro dell'esagono regolare inscritto} = 6 \\ a_2 &= \text{perimetro del dodecagono regolare inscritto} = 6,211657082... \\ a_3 &= \text{perimetro del poligono regolare inscritto, con 24 lati} = 6,265257227... \\ a_4 &= \text{perimetro del poligono regolare inscritto, con 48 lati} = 6,278700406... \\ &\dots \end{aligned}$$

se si vuole indicare il fatto che

"il valore della quantità a_k , per valori molto alti di k , è assai prossimo al numero 2π "

si potrà utilizzare la scrittura: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 2\pi$

che si leggerà "il limite, al tendere di k a infinito, di a_k , è 2π "



Esempio 2

Consideriamo la successione il cui termine generale è

$$c_n = \frac{n+1}{n}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

I primi elementi della successione valgono:

$$c_1 = \frac{1+1}{1} = 2; \quad c_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5; \quad c_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} = 1,33333333\dots; \quad \dots$$

Cosa accade al numero c_n quando n diventa molto, ma molto grande?

E' ben facile rispondere: **c_n si avvicina al valore 1.** Infatti

$$c_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

e la quantità $\frac{1}{n}$, al crescere di n , si fa sempre più piccola (= tende a zero), per cui

il numero

$$c_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

assumerà, se n viene preso grandissimo, valori molto, ma molto prossimi a 1.
Possiamo esprimere questo fatto scrivendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

Esempio 3

Consideriamo la funzione $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ dove x indica la misura in radianti di un arco.

Ad esempio, l'arco il cui angolo al centro corrispondente è di 30° misura, in radianti, $\frac{\pi}{6}$;

$$\text{e con } x = \frac{\pi}{6} \text{ si ha } \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi} = \frac{3}{3,1415927\dots} = 0,9549296\dots$$

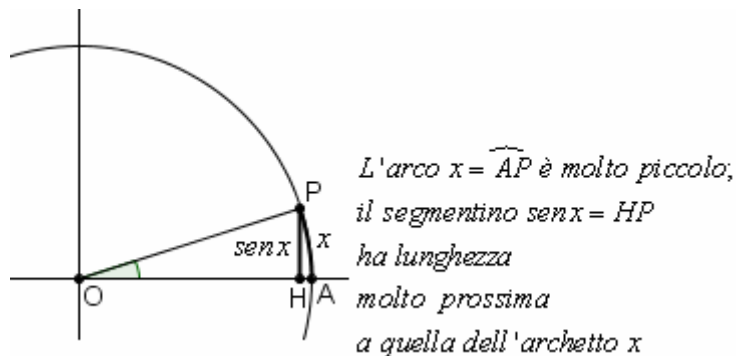
Ancora: l'arco, il cui angolo al centro corrispondente misura 18° (in radianti, $\pi/10$),
ha per seno la metà del lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza goniometrica.
Ma dalla Geometria si conosce che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza
è uguale alla sezione aurea del raggio (che, nel caso della circonferenza goniometrica, è unitario);
e la sezione aurea di un segmento si ottiene moltiplicando il segmento stesso per il fattore $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pertanto con $x = \frac{\pi}{10}$ avremo $\sin x = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, da cui

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\frac{\pi}{10}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\pi}{10}} = \frac{0,3090169\dots}{0,3141592\dots} = 0,9836315\dots$$

Per valori piccoli (= prossimi a 0) dell'arco x ,
il segmentino $\sin x$
quasi si confonde con l'archetto x :
il valore di $\sin x$ è
leggermente inferiore, ma *molto vicino*,
al valore di x .

Pertanto, con x molto piccolo,
il valore del rapporto $\frac{\sin x}{x}$
è molto prossimo a 1.



Ad esempio, con $x = 0,001$ (l'arco x è un millesimo di radiante, ossia: l'arco x , rettificato, dà luogo ad un segmentino che è esattamente la millesima parte del raggio), si ha

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0,001 = 0,00099999983... \quad \text{da cui} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} 0,001}{0,001} = 0,99999983...$$

Il fatto che la funzione $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ assuma valori molto prossimi a 1

quando l'arco x è molto prossimo a 0, si può esprimere attraverso la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

che si legge

“il limite, per x che tende a zero, di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, è uguale a 1”.

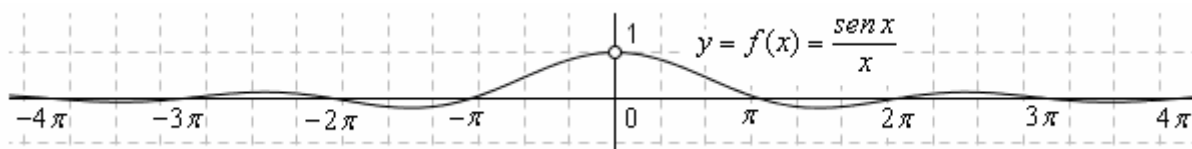
Osserviamo che, mentre gli esempi 1 e 2 riguardavano il limite di una **successione** (= sequenza) **numerica**, qui abbiamo invece considerato il limite di una **funzione di variabile reale**.

Riprenderemo il discorso “successioni” alla fine del capitolo, concentrandoci di qui in avanti sulle funzioni di variabile reale (poco cambia per le successioni, che possono essere considerate funzioni con dominio $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}^$).*

Se tracciamo (vedi figura sottostante) il grafico della funzione $y = f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, avremo che,

quando x si avvicina (stiamo “viaggiando” sull’asse delle ascisse) al valore 0, la y corrispondente si avvicina al valore 1.

Osserviamo che con $x = 0$ la funzione $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è definita.



Ancora con riferimento alla funzione $y = f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, possiamo rilevare,

come ci suggeriscono tanto l’osservazione del grafico quanto semplici considerazioni quantitative, che quando ci spostiamo sull’asse x “molto a destra” (x tendente all’infinito positivo) oppure “molto a sinistra” (x tendente all’infinito negativo), la y corrispondente continua ad andare su e giù intorno all’ordinata 0, avvicinandosi e allontanandosi periodicamente da essa, ma con **oscillazioni smorzate, la cui ampiezza diventa piccola a piacere**. E’ allora del tutto spontaneo utilizzare le scritture

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

Poiché il tendere a 0 della funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, quando x tende all’infinito positivo o negativo,

avviene “per oscillazioni”, NON sarebbe corretto affermare che

“quanto più x è grande in valore assoluto, tanto più il valore di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è prossimo a 0”.

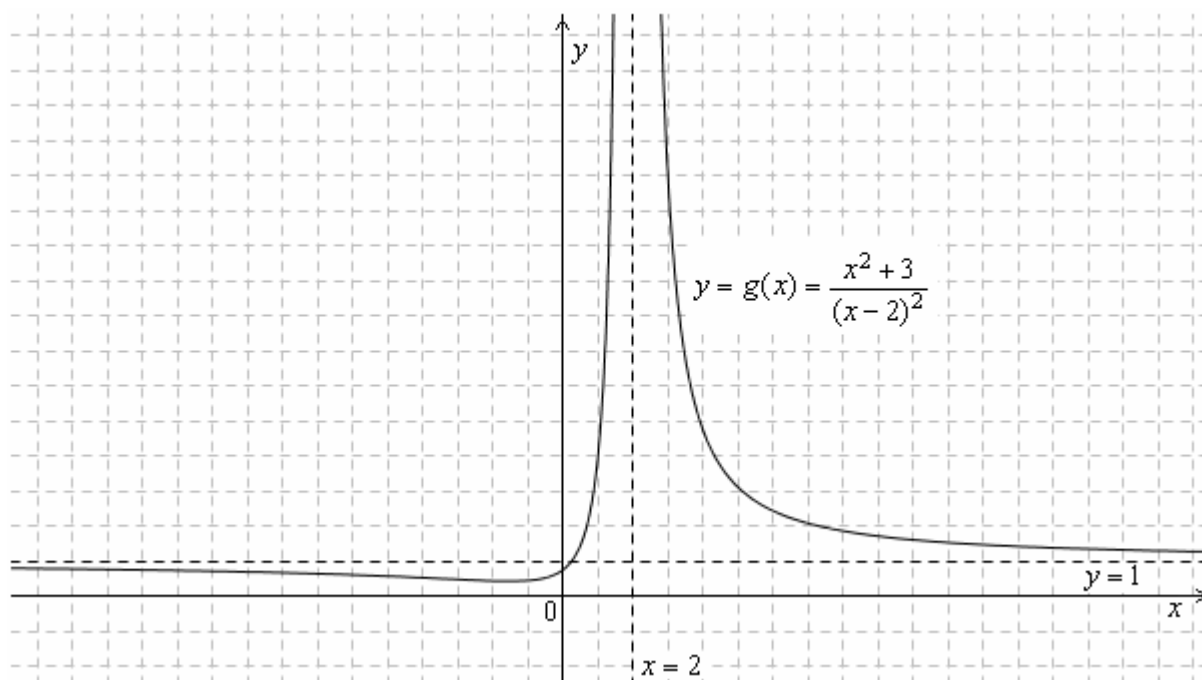
Al crescere di x in valore assoluto, abbiamo una y corrispondente che si avvicina “**GLOBALMENTE**” a 0, ma il suo avvicinarsi a 0 NON ha un carattere “monotonò”.

Osservazioni come questa sono molto importanti:

quando, più avanti, tenteremo di descrivere il concetto di limite in modo generale e preciso, il nostro compito sarà tutt’altro che semplice, in quanto dovremo elaborare una definizione nella quale possano rientrare anche situazioni del tipo di quella appena considerata, in cui la y , pur presentando quella che noi “sentiamo” essere una “tendenza a limite”, non mostra un comportamento “unidirezionale”.

Esempio 4

La figura sottostante mostra il diagramma della funzione $y = g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x - 2)^2}$:



L'osservazione del grafico, accompagnata da considerazioni di carattere quantitativo, ci suggerisce che valgono i limiti seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{(x - 2)^2} = +\infty$$

“il limite di $g(x)$, per x che tende a 2, è $+\infty$ ”, vale a dire:

quando x è vicinissimo a 2, il valore di $g(x)$, ossia della y corrispondente, tende a $+\infty$ nel senso che si fa altissimo, tanto alto da “sfondare”, all’insù, qualunque tetto prefissato.

Un po’ di numeri:

x	$y = g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x - 2)^2}$
2,5	37
2,1	741
2,05	2881
2,03	7912,...
2,0001	700040001

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{(x - 2)^2} = 1$$

“il limite di $g(x)$, per x che tende a $+\infty$, è 1”, vale a dire:

quando x diventa grandissimo (ci stiamo spostando, sull’asse delle ascisse, molto a destra), allora la y corrispondente si avvicina moltissimo a 1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{(x - 2)^2} = 1$$

“il limite di $g(x)$, per x che tende a $-\infty$, è 1”, vale a dire:

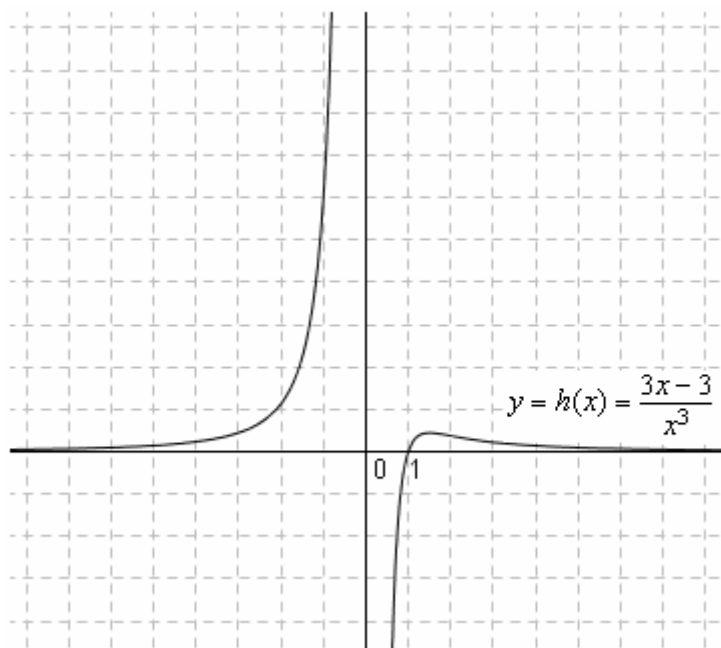
quando x diventa negativo ma molto grande in valore assoluto (ci stiamo spostando, sull’asse delle ascisse, molto a sinistra), allora la y corrispondente si avvicina moltissimo a 1.

Esempio 5

Consideriamo la funzione

$$y = h(x) = \frac{3x-3}{x^3}$$

e tracciamone il diagramma.



L'osservazione del grafico (accompagnata da considerazioni numeriche) ci suggerisce che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-3}{x^3} = -\infty$$

dove scrivere $x \rightarrow 0^+$ significa che si pensa a x tendente a 0 “da destra”, “per valori positivi”



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x-3}{x^3} = +\infty$$

dove scrivere $x \rightarrow 0^-$ significa che si pensa a x tendente a 0 “da sinistra”, “per valori negativi”



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{x^3} = 0^+$$

dove scrivere che il limite è 0^+ significa indicare che la funzione (= la y) tende a 0 “dall'alto”



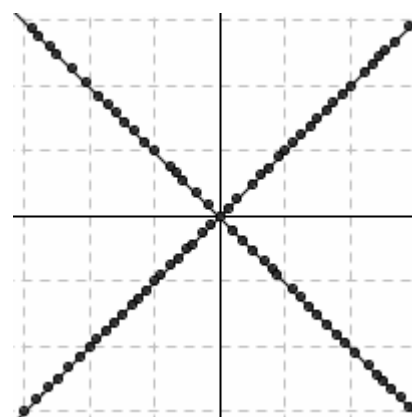
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-3}{x^3} = 0^+$$

Esempio 6

E' veramente bizzarra la funzione definita nel modo seguente:

$$L(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è razionale } (x \in \mathbb{Q}) \\ -x & \text{se } x \text{ è irrazionale } (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Poiché qualsiasi intervallo della “number line” contiene sia infiniti numeri razionali, che infiniti numeri irrazionali, il grafico della $L(x)$, che è distribuito su due rette, si presenta tutto “frammentato”:
se facciamo variare x sull'asse delle ascisse, assisteremo ad un frenetico “saltellare” della y corrispondente, da una retta all'altra.



Cosa possiamo affermare riguardo al comportamento della funzione, per x che tende a 0?

Facendo tendere x a 0, i “saltelli” della y sono sempre più minuscoli come “ampiezza”:

la y saltella entro una fascia di ordinate sempre più ristretta, intorno all'ordinata 0.

Anche in questo caso particolarmente strambo, appare dunque ragionevole accettare come corretta la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = 0$$

Quando dunque ci decideremo, al termine di questa esplorazione preliminare, a dare una definizione generale, precisa e rigorosa, del concetto di “limite”, dovremo fare in modo che tale definizione non escluda le situazioni come quella appena proposta.

Esempio 7

$$y = m(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Il dominio di questa funzione è $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

I valori dell'ordinata y non possono sconfinare all'esterno dell'intervallo $[-1, 1]$.

Per disegnare il grafico della funzione è utile cercarne le intersezioni con l'asse delle ascisse, ossia risolvere l'equazione $y = 0$.

$$y = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0; \quad \frac{\pi}{x} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{1}{x} = k \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad x = \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{Z}^*); \quad x = \pm 1, x = \pm \frac{1}{2}, x = \pm \frac{1}{3}, x = \pm \frac{1}{4} \dots$$

Quindi la y si annulla infinite volte, e anzi si annulla infinite volte nell'intervallo fra l'ascissa -1 e l'ascissa 1 . Le ascisse in corrispondenza delle quali la y si annulla ... si “addensano” intorno all'ascissa 0 .

Seguiamo ora il variare della y , quando x varia da 1 fino a 0 .

□ Se facciamo variare x da 1 a $1/2$,

la quantità $\frac{\pi}{x}$ varierà da $\frac{\pi}{1} = \pi$ a $\frac{\pi}{1/2} = 2\pi$

e perciò, nel frattempo, $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ dovrà assumere una volta il valore -1 .

□ Se facciamo variare x da $1/2$ a $1/3$,

la quantità $\frac{\pi}{x}$ varierà da $\frac{\pi}{1/2} = 2\pi$ a $\frac{\pi}{1/3} = 3\pi$

e perciò, nel frattempo, $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ dovrà assumere una volta il valore $+1$.

□ Se facciamo variare x da $1/3$ a $1/4$,

la quantità $\frac{\pi}{x}$ varierà da $\frac{\pi}{1/3} = 3\pi$ a $\frac{\pi}{1/4} = 4\pi$

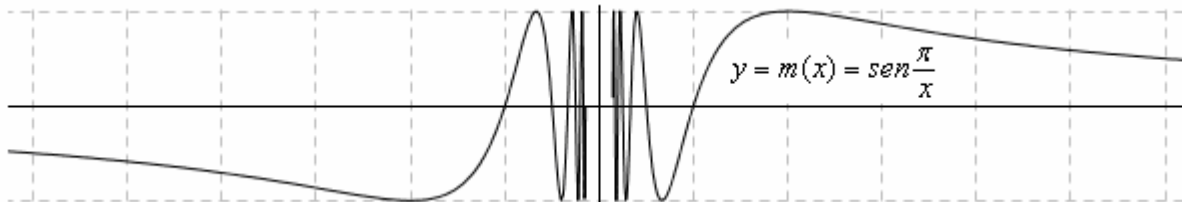
e perciò, nel frattempo, $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ dovrà assumere una volta il valore -1

□ ... e così via ...

Insomma,

facendo decrescere x a partire dal valore $x = 1$, la y corrispondente assumerà, successivamente, i valori:
 $0, -1, 0, +1, 0, -1, 0, +1, \dots$

Il grafico sarà perciò il seguente (è chiaro che il prossimità dell'ascissa 0 possiamo solo immaginarcelo!):



Di fronte ora alla scrittura

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \dots$$

come riempiamo i puntini?

Poiché, al tendere di x a 0 , la y corrispondente continua ad oscillare (con “frequenza” delle oscillazioni sempre più frenetica)

percorrendo ad ogni oscillazione tutta la banda di ordinate tra -1 e 1 , essa non si approssima a nessuna specifica ordinata:

appare ragionevole convenire che il limite proposto NON ESISTE.

Esempio 8

$$y = n(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Per tracciare il grafico di questa funzione, si può pensare di partire dai grafici di $y = x$ e di $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

Preso un valore di x , l'ordinata corrispondente si otterrà moltiplicando le due ordinate x e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

Ma come si modifica l'ordinata x ,

allorquando viene moltiplicata alternativamente per i valori $0, -1, 0, +1, 0, -1, 0, +1, \dots$, nonché per tutti i valori intermedi tra -1 e $+1$?

Facile:

- quando l'ordinata x viene moltiplicata per $+1$, resta invariata
- quando viene moltiplicata per un numero compreso fra 0 e 1 , diminuisce
- quando viene moltiplicata per 0 , diventa uguale a 0
- quando viene moltiplicata per -1 , cambia di segno diventando $-x$
- quando viene moltiplicata per un numero compreso fra 0 e -1 , cambia di segno e diminuisce in valore assoluto.

... Oppure, si può pensare a come si modifica l'ordinata $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$, allorquando viene moltiplicata per x :

- quando l'ordinata originaria è uguale a 1 , dopo la moltiplicazione diventa uguale a x ;
- quando l'ordinata originaria è uguale a 0 , dopo la moltiplicazione resta uguale a 0 ;
- quando l'ordinata originaria è compresa fra 0 e 1 , dopo la moltiplicazione risulta compresa fra 0 e x ;
- quando l'ordinata originaria è uguale a -1 , dopo la moltiplicazione diventa uguale a $-x$;
- quando l'ordinata originaria è compresa fra 0 e -1 , dopo la moltiplicazione risulta compresa fra 0 e $-x$.

Possiamo anche considerare il fatto che

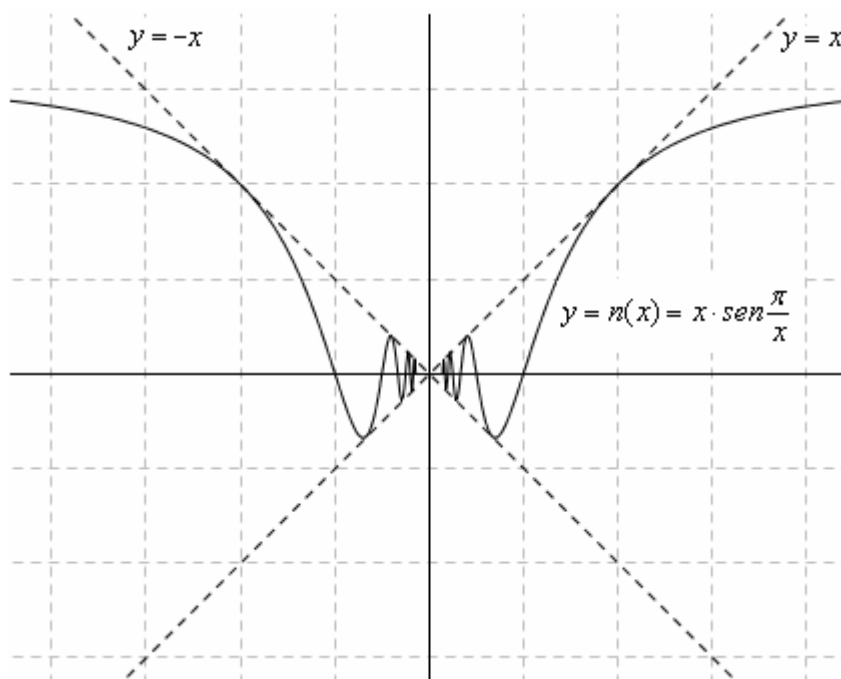
$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{con } x > 0: -x \leq x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq x \\ \text{con } x < 0: -x \geq x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \geq x \end{cases}$$

o in alternativa:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq 1 \Rightarrow \left| \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right| \leq 1 \Rightarrow |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right| \leq |x| \Rightarrow \left| x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right| \leq |x|$$

Il grafico sarà perciò quello qui sotto raffigurato

(è chiaro che in prossimità dell'origine possiamo solo immaginarcelo con gli occhi della mente ...):



Di fronte ora alla scrittura

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \dots$$

è del tutto spontaneo convenire che il limite valga 0 .

Infatti si osserva che

*al tendere di x a 0 ,
la y corrispondente
continua ad oscillare
(con “frequenza” crescente),
ma le oscillazioni hanno
ampiezza sempre più piccola,
cosicché finiscono per circoscriversi
in fasce di ordinate
sempre più ristrette,
in prossimità dell'ordinata 0 .*

Esempio 9a

$y = \text{"parte intera di } x" = \text{int}(x) = [x] = E(x)$

Questa funzione è definita come segue:

$E(x) = \text{il massimo intero relativo che non supera } x$

Esempi:

$$E(7,59) = 7; \quad E(16/3) = 5; \quad E(\sqrt{3}) = 1;$$

$$E(\pi) = 3; \quad E(5) = 5;$$

$$E(-0,2) = -1; \quad E(-\pi) = -4;$$

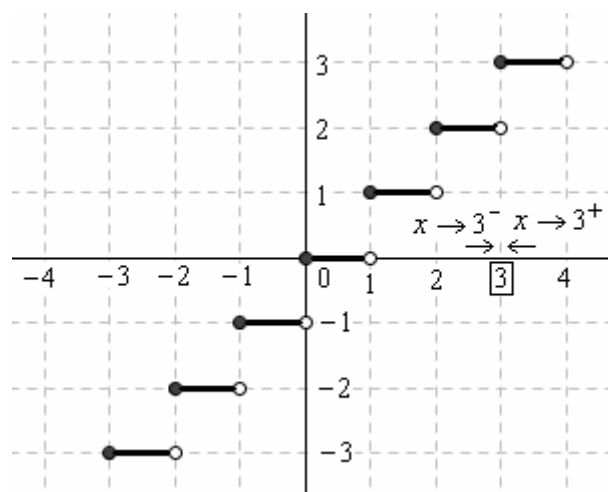
$$E(-\sqrt{3}) = -2; \quad E(-7) = -7$$

Quando facciamo tendere l'ascissa x ad un valore intero, tanto per fare un esempio a 3, dobbiamo distinguere fra

“**limite sinistro**” ($x \rightarrow 3^-$, x tende a 3 mantenendosi < 3)

e “**limite destro**” ($x \rightarrow 3^+$, x tende a 3 mantenendosi > 3)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} E(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} E(x) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} E(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} E(x) = 3$$

Esempio 9b

$y = \text{"mantissa di } x" = m(x)$

è definita come segue:

$$m(x) = x - E(x)$$

Esempi:

$$m(7,59) = 0,59;$$

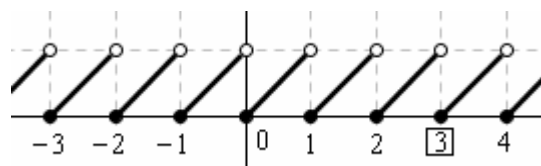
$$m(16/3) = m(3,33333...) = 0,33333...;$$

$$m(\sqrt{3}) = 0,7320508...; \quad m(\pi) = 0,1415927...;$$

$$m(5) = 0;$$

$$m(-0,2) = -0,8; \quad m(-\pi) = 0,8584072...;$$

$$m(-\sqrt{3}) = 0,2679491...; \quad m(-7) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} m(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} m(x) = 0$$

Esempio 9c

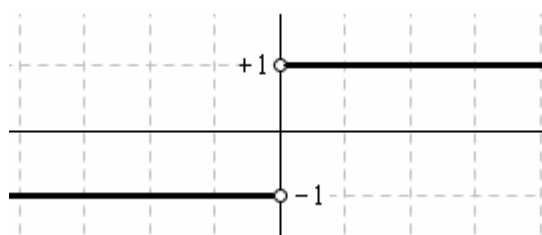
$y = \text{"signum } x"$

è definita come segue:

$$\text{signum}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ \text{non esiste con } x = 0 \end{cases}$$

Si può anche scrivere, equivalentemente:

$$\text{signum}(x) = \frac{|x|}{x}$$



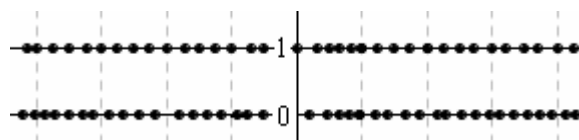
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{signum}(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{signum}(x) = 1$$

Esempio 10**La funzione di Dirichlet**

è definita come segue:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale } (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale } (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} D(x) = \text{NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} D(x) = \text{NON ESISTE}$$

3. QUANDO IL LIMITE E' ... BANALE: LA "CONTINUITA'"

Nel caso di una funzione reale di variabile reale, quando si fa tendere x ad un valore finito x_0 appartenente al dominio D della funzione, il caso di gran lunga più frequente è che la y tenda ad un altro valore finito, quello che si ottiene, banalmente, assegnando a x il valore x_0 , ossia ponendo $x = x_0$ nell'espressione della funzione e svolgendo i calcoli. Si dice allora che la funzione in esame è "continua in x_0 ":

$$y = f(x) \text{ continua in } x_0 \in D \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Lo ribadiamo: la continuità, per le funzioni di uso comune, è la "regola", la discontinuità è l'eccezione.

Ad esempio, una funzione polinomiale è continua in ogni punto x_0 del suo dominio (che è poi tutto $\mathbb{R}$).

Nella figura qui a destra è rappresentata la funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

che ha appunto questa proprietà:

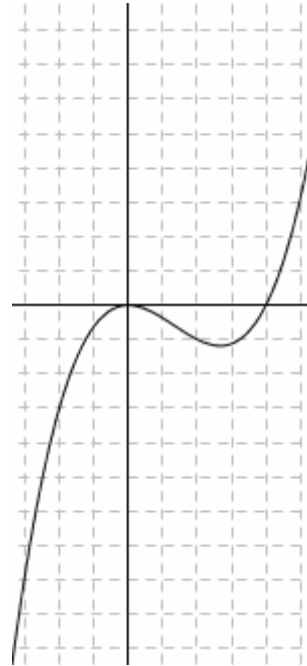
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(2) = \frac{1}{8} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(1) = \frac{1}{8} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(0) = \frac{1}{8} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) = f(-3) = \frac{1}{8} \cdot (-27) - \frac{1}{2} \cdot 9 = \\ &= -\frac{27}{8} - \frac{9}{2} = \frac{-27 - 36}{8} = -\frac{63}{8} \end{aligned}$$

ecc. ecc. ecc.



Continuità su di un intervallo =
= continuità in ogni punto di quell'intervallo.

La continuità di una funzione su tutto un intervallo può essere descritta, in modo poco "matematico" ma molto intuitivo, come "la possibilità di disegnare il grafico senza mai distaccare la matita dal foglio"

A volte si parla di "continuità a sinistra" o "a destra" in un punto x_0 :

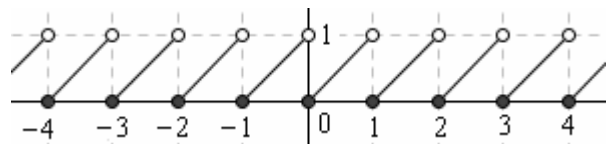
$$y = f(x) \text{ continua a sinistra in } x_0 \in D \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$y = f(x) \text{ continua a destra in } x_0 \in D \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Ad esempio, la funzione "mantissa" $y = m(x)$ è continua a destra, ma è discontinua a sinistra, in corrispondenza di ogni valore x_0 intero.

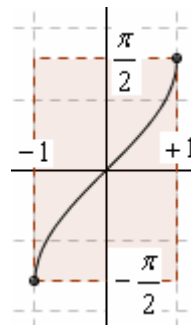
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} m(x) = 0 = f(3);$$

$$\text{invece } \lim_{x \rightarrow 3^-} m(x) = 1 \neq f(3)$$



Ancora: la funzione $y = \arcsin x$ è continua su tutto il suo dominio $D = [-1, +1]$.

In corrispondenza delle due estremità del dominio, è più corretto parlare di continuità "unilaterale":
continuità a destra, in $x = -1$;
continuità a sinistra, in $x = +1$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin x &= -\frac{\pi}{2} = \\ &= \arcsin(-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x &= \frac{\pi}{2} = \\ &= \arcsin(+1) \end{aligned}$$

4. IL LIMITE DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO: RICAPITOLIAMO

A) LIMITE FINITO PER x CHE TENDE A UN'ASCISSA FINITA

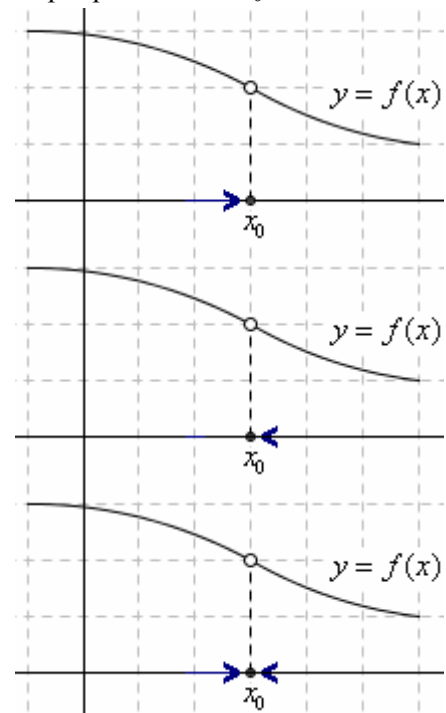
Consideriamo una funzione $y = f(x)$, e sia x_0 un'ascissa fissata.

“Far tendere x a x_0 ” significa far assumere a x valori sempre più vicini a x_0 .

Possiamo far tendere x a x_0
 “da sinistra”...
 (scriveremo $x \rightarrow x_0^-$)

... oppure “da destra” ...
 (scriveremo $x \rightarrow x_0^+$)

... o, ancora, quando non abbia importanza
 distinguere il caso $x > x_0$ dal caso $x < x_0$,
 “bilateralmente”
 (scriveremo $x \rightarrow x_0$)



Mentre si sta facendo tendere x a x_0 , interessa stabilire
 “a cosa tende (= si avvicina) il valore corrispondente di y ”.

Se accade che, quando x è molto prossima a x_0 , l'ordinata corrispondente è molto prossima ad un certo valore ℓ
 (come nel caso dell'ultima figura, nella quale, per x prossimo a 3, $y = f(x)$ è prossima a 2),
 allora si scriverà $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ che si legge: “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$, è ℓ ”

Quando noi pensiamo al $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,

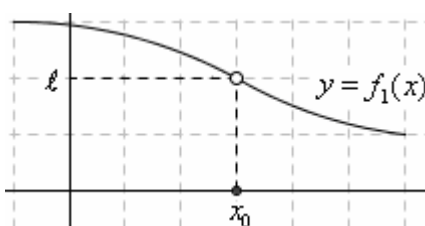
NON CI INTERESSA MINIMAMENTE COSA ACCADE PER x UGUALE A x_0 ;

anzi, con $x = x_0$ la funzione potrebbe anche non esistere
 (è questo il caso illustrato in figura, dove il pallino vuoto, il “buco”,
 evidenzia proprio la non esistenza della funzione con $x = x_0$).

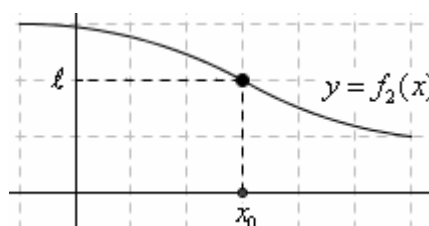
Noi vogliamo stabilire a quale valore si avvicina la y , quando x SI AVVICINA a x_0 .

E' in esame dunque il comportamento della funzione **IN PROSSIMITA' DI** x_0 , ma **NON IN** x_0 .

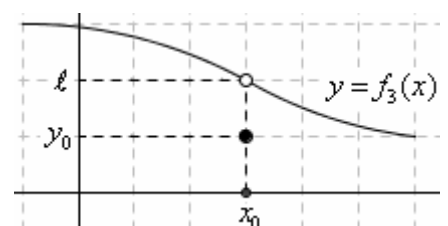
Per questa ragione, TUTTE E TRE le funzioni seguenti
 sono perfettamente equivalenti dal punto di vista del limite per $x \rightarrow x_0$,
 in quanto esse differiscono solamente per il comportamento IN x_0 ,
 che ai fini della determinazione del limite E' IRRILEVANTE.



$f_1(x_0)$ NON ESISTE
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \ell$



$\exists f_2(x_0) = \ell$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \ell$



$\exists f_3(x_0) = y_0 \neq \ell$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_3(x) = \ell$

Non possiamo tuttavia a questo punto pretendere di aver DEFINITO in modo *rigoroso* cosa si intenda per “limite”. Con quali parole, infatti, abbiamo cercato di descrivere questo concetto? Rileggiamole:

«Se accade che, quando x è molto prossima a x_0 , l'ordinata corrispondente è molto prossima a un dato valore ℓ , allora si scriverà $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ che si legge: “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$, è ℓ ”»

Ma adesso riflettiamo...

cosa significa esattamente “ x MOLTO PROSSIMA a x_0 ”, “ y MOLTO PROSSIMA a ℓ ”?

In che senso va inteso l'avverbio “MOLTO”? Insomma: MOLTO ... QUANTO?

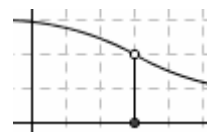
IL NOSTRO PRIMO TENTATIVO DI DEFINIZIONE, DIFETTA CLAMOROSAMENTE IN PRECISIONE!

POTREMMO ritenere di colmare l'ambiguità esprimendoci nel modo seguente:

«Se accade che, *quanto più* x si approssima a x_0 , *tanto più* l'ordinata corrispondente si approssima a ℓ , allora si scriverà $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ e si leggerà: “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$, è ℓ ”».

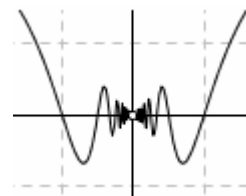
TUTTAVIA,

questa descrizione potrebbe essere adeguata per la funzione rappresentata nella figura qui a fianco ...



... ma escluderebbe quei casi in cui l'avvicinamento di y a ℓ è “globale” ma non “unidirezionale”,

come nel caso, che abbiamo già incontrato, della funzione $y = f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$,



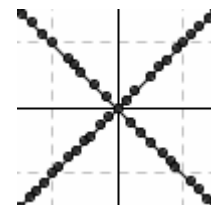
per la quale abbiamo convenuto che sia ragionevole poter scrivere $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

anche se l'avvicinamento della y all'ordinata 0 non ha carattere “monotono”, ma oscillante



... ed escluderebbe anche il caso, ancora più anomalo, della

$$L(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è razionale } (x \in \mathbb{Q}) \\ -x & \text{se } x \text{ è irrazionale } (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$



per la quale abbiamo accettato la correttezza della scrittura $\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = 0$

pur in presenza di un avvicinamento della y all'ordinata 0 non “monotono”, bensì “saltellante”

Il problema di definire rigorosamente il “limite” è tutt'altro che semplice.

Lo affronteremo nel capitolo seguente (considerando, inoltre, anche i casi in cui sia coinvolto l' “infinito”).

UNA DEFINIZIONE DI LIMITE, PER ESSERE SODDISFACENTE, DOVRÀ

- ♪ tradurre in modo non ambiguo e rigorosamente quantitativo e idee di una x “molto prossima a x_0 ”, cui corrisponde una y “molto prossima a ℓ ;
- ♪ richiedere *non soltanto* che la y si avvicini “indefinitamente” a ℓ (cioè: penetri in un intorno arbitrariamente piccolo di ℓ), ma richiedere contemporaneamente che, purché la x sia “sufficientemente vicina” a x_0 , la y corrispondente *non fuoriesca più da tale intorno*.

Come vedremo,

SI RIUSCIRÀ AD ELABORARE UNA DEFINIZIONE CORRETTA A PATTO DI **RIBALTARE L'ORDINE** IN CUI VENGONO PRESI IN CONSIDERAZIONE x_0 E ℓ :

infatti, spontaneamente si è portati a pensare

PRIMA alla x che si avvicina a x_0 , POI alla y corrispondente che si avvicina a ℓ ;

UNA DEFINIZIONE MATEMATICAMENTE INECCEPIBILE PARTIRÀ INVECE DA ℓ , PARLANDO DI UNA y CHE SI MANTIENE VICINA A ℓ TANTO QUANTO LO SI DESIDERA, A PATTO DI PRENDERE x SUFFICIENTEMENTE VICINA A x_0 .

B) LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE A UN' ASCISSA FINITA

Nel caso della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ rappresentata qui a fianco,

diciamo che, al tendere di x a 0, la $f(x)$ tende a $+\infty$,

perché constatiamo che, quando x tende a 0,

la y corrispondente assume valori altissimi, arbitrariamente alti,
più alti di 1.000.000, più alti di 1.000.000.000.000.000, insomma:
più alti di qualsiasi "tetto" prefissato.

In generale, la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

è utilizzata per indicare che

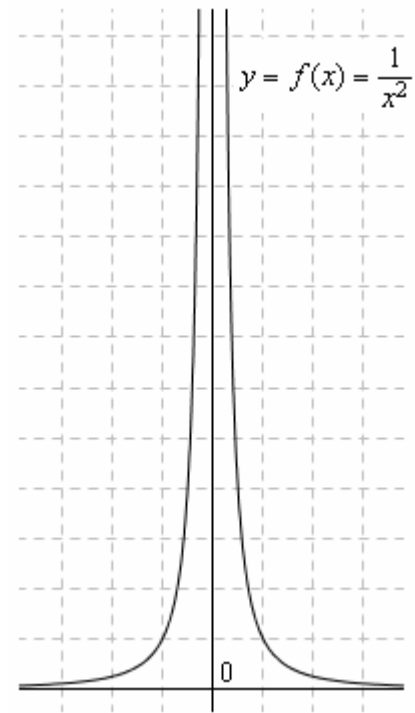
“al tendere di x a x_0 , la y diventa alta, altissima,
fino a portarsi al di sopra di qualsiasi ‘tetto’ prefissato”.

La definizione rigorosa, che formuleremo nel prossimo capitolo,
esprimerà questa condizione

ribaltando l'ordine in cui vengono considerate la x e la y :

la y “si mantiene al di sopra di qualsiasi tetto prefissato”,

purché x venga presa “sufficientemente vicina” a x_0 .



Se voglio che la y stia al di sopra,
tanto per fare un esempio,
del “tetto” 1000.000.000.000
(mille miliardi)

mi basta prendere valori di x
sufficientemente vicini all'ascissa 0:
precisamente, mi basta prendere x
compreso fra
 $-0,000001$ e $0,000001$
(s'intende, x diverso da zero)

x	$y = \frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10000
0,001	1000000
0,0001	100000000
0,00001	10000000000
0,000001	1000000000000
0,0000001	100000000000000

C) LIMITE FINITO PER x CHE TENDE A INFINITO

Nel caso della funzione $y = f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ rappresentata qui sotto,

diciamo che, al tendere di x a $+\infty$, la $f(x)$ tende a 2,

perché constatiamo che, quando x viene presa positiva e molto grande,
la y corrispondente assume valori molto prossimi a 2.

In generale, la scrittura

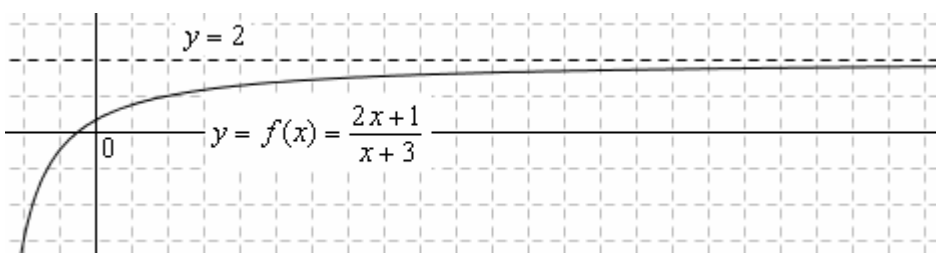
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

è utilizzata per indicare che “al tendere di x a $+\infty$, la y si avvicina all'ordinata ℓ ”.

La definizione rigorosa, che daremo nel prossimo capitolo, esprimerà questa condizione
capovolgendo l'ordine in cui vengono considerate la x e la y :

la y “si mantiene vicina tanto quanto noi vogliamo all'ordinata ℓ ”,

purché x venga presa “sufficientemente vicina” a $+\infty$, cioè “sufficientemente grande”.



x	$y = \frac{2x+1}{x+3}$
1	0,75
10	1,615384...
100	1,951456...
1000	1,995014...
10000	1,999500...

D) LIMITE INFINITO PER x CHE TENDE A INFINITO

Nel caso della funzione $y = f(x) = \frac{x^2}{x+5}$

rappresentata qui a fianco, diciamo che,
 al tendere di x a $+\infty$, la $f(x)$ tende a $+\infty$,
 perché constatiamo che,
 quando x viene presa positiva e molto grande,
 la y corrispondente diventa altissima,
 così da oltrepassare, verso l'alto,
 qualunque barriera prefissata.

In generale, la scrittura

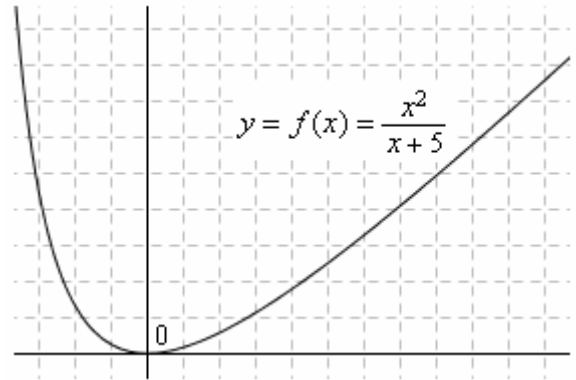
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

è utilizzata per indicare che

“per x grandissima, la y assume valori grandissimi”

La definizione rigorosa, che daremo nel prossimo capitolo,
 esprimerà questa condizione

ribaltando l'ordine in cui vengono pensate la x e la y :
 la y si mantiene maggiore di qualsiasi numero prefissato,
 purché x venga presa “sufficientemente grande”.



5. PSEUDO-UGUAGLIANZE E FORME DI INDECISIONE (DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO)

Supponiamo di avere una funzione che sia a sua volta il quoziente fra due funzioni:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)};$$

supponiamo inoltre che, al tendere di x a c

(dove c potrà essere un'ascissa finita x_0 , oppure uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞),

- il numeratore $f(x)$ tenda ad un valore finito e non nullo (ad esempio, tenda a 4)
- e il denominatore $g(x)$ tenda a $+\infty$.

Come si comporterà la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende a c ?

Dunque, ragioniamo. La nostra frazione è $\frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}}$.

Il numeratore assume valori molto vicini a 4 ... il denominatore invece assume valori grandissimi ...

Ma allora, se il denominatore è grandissimo

(mentre il numeratore non lo è, perché i suoi valori si mantengono prossimi a 4) ...

vorrà dire che la frazione assumerà valori **piccolissimi**!

Avremo dunque $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}} = 0$ (più precisamente, per ovvi motivi di segno, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}} = 0^+$)

Il tutto si potrebbe riassumere per mezzo della PSEUDO-UGUAGLIANZA

$$\boxed{\frac{4}{\infty} = 0} \quad \left(\frac{4}{+\infty} = 0^+ \right)$$

Supponiamo ora che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0^+$. Quanto varrà il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Si può osservare che, quando un numero vicinissimo a 4 viene diviso per un numero positivo vicinissimo a 0, il risultato della divisione è un numero positivo **grandissimo**.

Ad esempio, dividere per 0,001 equivale a moltiplicare per 1000,

dividere per 0,000001 equivale a moltiplicare per 1000000 ...

Avremo quindi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}} = +\infty$

Il tutto si potrebbe riassumere per mezzo della PSEUDO-UGUAGLIANZA $\boxed{\frac{4}{0} = \infty} \quad \left(\frac{4}{0^+} = +\infty \right)$

IMPORTANTE:

questa scrittura $\frac{4}{0} = \infty$ è solo un modo conciso (e, proprio per la sua concisione, efficace)

di esprimere un ragionamento ben più articolato.

Dunque: noi sappiamo bene che l'operazione $\frac{4}{0}$, presa alla lettera, come quoziente fra il numero 4 e il numero 0, è *impossibile*, priva di risultato, non definita, "illegale".

Ma noi, in questo contesto, NON stiamo pensando a questa operazione!!!

Scrivendo $\frac{4}{0} = \infty$ noi vogliamo solamente affermare che, se abbiamo un rapporto fra due funzioni,

e la funzione a numeratore tende a 4, mentre la funzione a denominatore tende a 0

(sottinteso: per x che tende ad un certo valore c), allora il rapporto fra le due funzioni tende a ∞ . Insomma:

la scrittura $\frac{4}{0} = \infty$ sostituisce l'ingombrante annotazione $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 4 \wedge \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Supponiamo invece di avere due funzioni $f(x)$, $g(x)$ che, al tendere di x a x_0 , tendano entrambe a infinito:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Quanto varrà il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Riflettiamo. Noi stiamo studiando il comportamento della frazione $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Il tendere all'infinito del numeratore “vorrebbe” far impennare la frazione verso l'infinito ...

ma il tendere all'infinito del denominatore, per contro, “vorrebbe” schiacciare la frazione verso lo zero!

Ci troviamo di fronte a una “forma conflittuale”, o, come generalmente si dice, a una

“FORMA DI INDECISIONE”

Fra le due funzioni che stanno a numeratore e a denominatore, vincerà il “tiro alla fune” quella che tende all'infinito più rapidamente.

Il valore del limite dipenderà quindi

dalle **particolari** funzioni considerate:

a volte potrà “vincere” il numeratore f ,

e allora il rapporto f/g tenderà all'infinito;

altre volte potrà invece vincere il denominatore g ,

e in questo caso il rapporto f/g tenderà a zero;

in certi casi, poi, capita che le due funzioni f , g

“trovano un equilibrio”:

il limite del rapporto f/g sarà allora un certo numero finito e $\neq 0$.

Può anche accadere (situazione ben rara negli esercizi),

che il limite del rapporto f/g non esista.

“Forma di **indecisione**” vuol dire che,
a priori, non si può stabilire
 se esista il limite, e quanto esso valga,
applicando una regola generale
o un teorema generale;
 l'indecisione si scioglierà invece
 tramite procedimenti che dipendono
 dalle *specifiche* funzioni coinvolte.

Alcuni testi scrivono
 “forma **indeterminata**”
 anziché “forma di indecisione”;
 ... forse sarebbe meglio parlare di
 “forma **inizialmente indeterminata**”!

Ad esempio, chiediamoci quanto vale il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+15}{x^2-4}$.

Al tendere di x a $+\infty$, sia il numeratore che il denominatore tendono a $+\infty$; si ha dunque una

F.I. (Forma di Indecisione) del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Fra il numeratore $7x+15$ e il denominatore x^2-4 , quale tenderà all'infinito più rapidamente?

Beh, $7x+15$ ha coefficienti più "robusti" ... mentre x^2-4 ha grado più elevato.

Ma noi dobbiamo pensare che $x \rightarrow +\infty$,

quindi è il **grado** che finisce per caratterizzare la rapidità con cui l'espressione tende all'infinito.

Ad esempio, con $x=1000$, abbiamo $7x+15=7015$ ma è $x^2-4=1000000-4=999996$!!!

Dunque, per via del grado maggiore, è più rapido il tendere all'infinito del denominatore:

e questo denominatore "vincente" riesce perciò a schiacciare il valore la frazione verso lo 0.

In definitiva avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+15}{x^2-4} = 0.$$

Per convincerci ancora di più di questo fatto,

raccogliamo, sia a numeratore che a denominatore, x elevato all'esponente più alto: avremo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+15}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(7 + \frac{15}{x} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + \frac{15}{x}}{\left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} \quad \text{NOTA } 0^+ \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ 0 \\ \downarrow \\ +\infty \end{array} \end{aligned}$$

In generale, in una F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ del tipo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{B(x)}$

con A, B polinomi di grado diverso,
il limite è

♫ 0 se prevale il grado del Denominatore,
♫ infinito se prevale il grado del Numeratore.

Consideriamo invece il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x-1}{2x^2+5} = ?$

In questa F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, contrariamente al caso precedente, N e D hanno il medesimo grado ...

Procediamo come nel caso precedente e avremo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x-1}{5x^2+3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(6 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(5 + \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

NOTA:

i due termini $\frac{15}{x}$ e $\frac{4}{x^2}$,

avendo il numeratore fisso
e il denominatore tendente a infinito,
tendono a zero

(si dice, con locuzione suggestiva,
che sono **termini "evanescenti"**).

Ma allora, dopo la semplificazione per x
effettuata al passaggio precedente,

il numeratore tende a 7 e il denominatore,
che è il prodotto di un fattore tendente a infinito
per un fattore tendente a 1, tende all'infinito.

Dunque il limite è 0 (0^+ , per ovvi motivi di segno).

*Tutte queste considerazioni di carattere intuitivo
verranno puntualmente legittimate dai Teoremi
che saremo in grado di dimostrare quando,
a partire dal capitolo successivo,
avremo finalmente stabilito
una definizione ben fondata di "limite".*

Di qui si trae, anche se per ora
in modo solamente intuitivo (NOTA), che

in una F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ del tipo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{B(x)}$

con A, B polinomi dello stesso grado,
il valore del limite è sempre uguale

al quoziente fra i coefficienti dei due termini di grado massimo.

NOTA

Ricordiamoci che dobbiamo ancora dare

una definizione rigorosa di "limite",

e che non abbiamo fin qui dimostrato alcun teorema a riguardo

(d'altronde, in assenza di una definizione precisa, non ha

neppure senso cercare eventualmente di dimostrare dei teoremi ...)

Dopo aver accennato al caso $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, prendiamo in esame un'altra situazione interessante: la $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Occhio! NON vogliamo qui riferirci all'**operazione** $0/0$, che come ben sappiamo è non definita, "illegale", in quanto "*indeterminata*".

La scrittura $\left[\frac{0}{0} \right]$ è qui utilizzata per indicare in modo sintetico ed efficace la situazione in cui si cerchi

il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, quando è $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Nella frazione $\frac{f(x)}{g(x)}$ operano due forze contrastanti:

il numeratore, col suo tendere a 0, "vorrebbe" portare verso lo zero il valore della frazione; ma nel contempo il denominatore, col proprio tendere a 0, "lavora" per far impennare la frazione verso l'infinito. In questo "tiro alla fune", vincerà la funzione che tende a 0 più rapidamente.

Se è $f(x)$ a tendere più rapidamente a zero, il limite sarà nullo;

se invece è $g(x)$ che tende a zero più rapidamente, il limite sarà infinito.

In altri casi il limite potrà essere finito e non nullo, oppure ancora non esistere. Insomma,

$$\left[\frac{0}{0} \right] \text{ è una Forma di Indecisione, al pari di } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Come esempio, prendiamo il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

Numeratore e denominatore tendono entrambi a zero; tuttavia, basta fare un disegno della circonferenza goniometrica per rendersi conto che, al tendere a zero dell'archetto x , la quantità $1 - \cos x$ tende a zero con rapidità molto maggiore rispetto a $\sin x$. Pertanto il limite in questione è infinito.

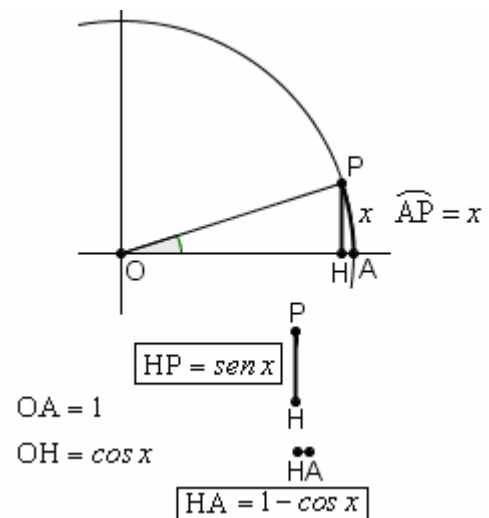
Considerazioni di segno ci portano a stabilire, più in dettaglio, che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = -\infty$$

La conclusione, da noi tratta un po' "alla buona", con l'intuizione geometrica, è confermata da ciò che impareremo a partire dal capitolo successivo.

Possiamo confermare il risultato trovato anche nel modo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin x (1 + \cos x)}^2}{\underbrace{\sin^2 x}_0} = \infty$$



Va detto che, **molto spesso, le Forme di Indecisione del tipo $\left[\frac{0}{0} \right]$, quando x tende a un'ascissa finita,**

vengono risolte attraverso una semplificazione, cui si può pervenire a seguito di una scomposizione, o razionalizzazione, o moltiplicazione di N e D per una stessa espressione.

Consideriamo ad esempio l'esercizio seguente, nel quale la scomposizione del denominatore è stata effettuata tramite la Regola di Ruffini:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(x^3 + x^2 + x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{x^3 + x^2 + x + 4} = \frac{4}{7}$$

Fin qui ci siamo occupati in particolare del QUOZIENTE $f(x)/g(x)$ di due funzioni, in relazione al quale abbiamo brevemente parlato delle FORME DI INDECISIONE seguenti:

$$\frac{\infty}{\infty} = F.I. \quad \frac{0}{0} = F.I.$$

Invece, sempre per quanto riguarda il quoziente $f(x)/g(x)$, NON sono forme di indecisione le situazioni schematizzate dalle seguenti PSEUDO-UGUAGLIANZE:

$$\frac{k}{\infty} = 0 \quad \text{Se il numeratore tende a un valore finito } k, \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad \frac{0}{\infty} = 0$$

mentre il denominatore tende a infinito, allora il limite è 0

Per quanto attiene al PRODOTTO $f(x) \cdot g(x)$, abbiamo le ovvie PSEUDO-UGUAGLIANZE

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0) \quad \infty \cdot \infty = \infty$$

e la FORMA DI INDECISIONE

$$0 \cdot \infty = F.I.$$

Un fattore tende a 0, “cercando” di rendere uguale a 0 anche il prodotto; l'altro fattore “tira dalla parte opposta”, in quanto il suo tendere a infinito “cercherebbe” di far tendere all'infinito pure il prodotto

Va detto comunque che una F.I. $[0 \cdot \infty]$ si può ricondurre a una $[\infty/\infty]$, o a una $[0/0]$, come nell'es. seguente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^x}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{x^2}_{\downarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\underbrace{x^2}_{\downarrow +\infty}}{\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow +\infty}} = 0$$

Il limite di questo esempio è 0 perché L'ESPONENZIALE a denominatore TENDE ALL'INFINITO PIÙ RAPIDAMENTE RISPETTO ALLA FUNZIONE ALGEBRICA a numeratore, come
1) si verifica “sperimentalmente” provando ad assegnare a x valori negativi grandi in valore assoluto (es. $x = -1000, \dots$)
2) e, soprattutto, come dimostreremo rigorosamente più avanti

Infine, per la SOMMA ALGEBRICA $f(x) + g(x)$ sussistono evidentemente le PSEUDO-UGUAGLIANZE

$$+\infty + k = +\infty$$

$$-\infty + k = -\infty$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

e la FORMA DI INDECISIONE

$$(+\infty) + (-\infty) = F.I.; \text{ si può anche esprimere come } (+\infty) - (+\infty)$$

che si riscontra in situazioni molto frequenti e semplici, ad esempio con i polinomi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{2x^3}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{45x^2}_{\downarrow +\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^3}_{\downarrow +\infty} \left(\underbrace{2}_{\downarrow 2} - \underbrace{\frac{45}{x}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

Abbiamo raccolto x elevato all'esponente più alto, ed entro parentesi abbiamo ottenuto $\left(2 - \text{un termine evanescente} \right)$

**Generalizzando questo esempio si trae che
AL TENDERE DELLA VARIABILE A INFINITO
UN POLINOMIO TENDE SEMPRE ALL'INFINITO,
RICALCANDO IL COMPORTAMENTO
DEL SUO TERMINE DI GRADO PIÙ ELEVATO.**

A parte la dimostrazione formale che abbiamo dato, CERCHIAMO DI COMPRENDERE BENE QUESTO FATTO, approfittando sempre dello stesso esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 45x^2)$.

Qui si ha un “conflitto” fra il tendere a $+\infty$ di $2x^3$ e il tendere a $-\infty$ di $-45x^2$, che è sommato algebricamente a $2x^3$. Il termine $-45x^2$, rispetto al termine $2x^3$, è più “forte” in quanto al **coefficiente**, ma inferiore come **grado**; però, **quando x diventa molto grande, il coefficiente “perde di importanza” ed è in definitiva il grado a decidere il conflitto.**

Nel nostro caso, il grado inferiore “penalizza” il termine $-45x^2$, che tende a infinito *meno rapidamente* rispetto a $2x^3$. Ad esempio, se $x = 1000$, è $-45x^2 = -45000000$, ma si ha già $2x^3 = 2000000000$ che prevale nettamente su -45000000 . Il termine “vincente”, quello che tende all'infinito con maggiore rapidità, è quindi $2x^3$. Pertanto, nel “tiro alla fune” (dove $2x^3$ “tira” verso $+\infty$ e $-45x^2$ “tira” verso $-\infty$), trionfa, per via del grado superiore, il termine $2x^3$, e la somma algebrica, in definitiva, tende a $+\infty$.

D'ora in poi, **ove sia richiesto il LIMITE DI UN POLINOMIO AL TENDERE DELLA VARIABILE A $\pm\infty$** , non staremo più a raccogliere x elevato all'esponente massimo; applicheremo invece la regola stabilita, vale a dire **concluderemo immediatamente che IL LIMITE È INFINITO, e PER TROVARE IL SEGNO di questo infinito GUARDEREMO COME SI COMPORTA IL TERMINE “CARATTERIZZANTE” = DI GRADO MASSIMO.**

6. ESERCIZI SUI LIMITI DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO

A dire il vero, qualcuno potrebbe sostenere che assegnare esercizi, a questo livello, sia prematuro.

Eh sì, perché noi fino ad ora abbiamo dato una presentazione dell'argomento "limiti" *puramente intuitiva*, ma **NON** abbiamo ancora fissato definizioni precise, e non abbiamo ancora dimostrato alcun teorema.

Purtuttavia, prima di affrontare i paragrafi successivi, che saranno dedicati proprio a questa definizione e a questi teoremi, sembra opportuno, dal punto di vista didattico, fare un po' di "pratica" per vedere se i concetti espressi nel precedente approccio intuitivo sono stati compresi.

Ti propongo allora una rassegna di esercizi, nei quali ragionerai un po' "alla buona" basandoti su quanto detto fin qui e facendo considerazioni di puro "buon senso"; vedrai che riuscirai comunque a determinare i risultati corretti, anche se, in effetti, saranno solo i paragrafi seguenti a giustificare in modo razionalmente impeccabile procedimenti e conclusioni.

Facciamo qualche esempio.

ESEMPIO 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x-2} = ?$

Quando faccio tendere x a 2, cioè quando faccio assumere a x valori prossimi a 2,

♪ il valore del numeratore $x-5$ si avvicinerà a $2-5 = -3$

♪ mentre il denominatore $x-2$ si avvicinerà a $2-2 = 0$.

Dal punto di vista pratico, "operativo", possiamo illustrare tutto ciò con degli "ovali" o dei "rettangolini" (oppure servendoci di opportune parentesi) e delle "freccette", nel modo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{-3}{\uparrow} \boxed{x-5}}{\underset{0}{\downarrow} \boxed{x-2}} = ? \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{-3}{\uparrow} \boxed{x-5}}{\underset{0}{\downarrow} \boxed{x-2}} = ? \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{-3}{\uparrow} \overbrace{x-5}^{\quad}}{\underset{0}{\downarrow} \overbrace{x-2}^{\quad}} = ?$$

Ma allora, il valore della frazione, *a cosa* si avvicinerà?

Un numero vicinissimo a -3 , diviso per un numero vicinissimo a 0 , dà un numero grandissimo:

$$\frac{-3}{0} = \infty \quad \text{nel senso di} \quad \frac{\text{un numero vicinissimo a } -3}{\text{un numero vicinissimo a } 0} = \text{un numero grandissimo (in valore assoluto)}.$$

Avremo dunque

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x-2} = \infty \quad \left(\frac{-3}{0} = \infty \right)$$

ma ATTENZIONE: NON sarebbe corretto, vedendo a numeratore quel segno " $-$ ", dire che il limite è $-\infty$.

Infatti, il denominatore $x-2$, che si avvicina a 0 , può tendere a 0 :

♪ per valori positivi (se facciamo assumere a x valori prossimi a 2 ma maggiori di 2, ad esempio: $x = 2,01$; $x = 2,0000001$; ... insomma: se facciamo tendere a x a 2 "da destra")



♪ oppure per valori negativi (se facciamo assumere a x valori prossimi a 2 ma minori di 2, ad esempio: $x = 1,99$; $x = 1,9999999$; ... insomma: se facciamo tendere a x a 2 "da sinistra")



E' perciò ESATTO scrivere $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{-3}{\uparrow} \boxed{x-5}}{\underset{0}{\downarrow} \boxed{x-2}} = \infty$

ma,
SE VOGLIAMO ESSERE
PIÙ PRECISI,
DOVREMO DISTINGUERE
I DUE CASI
del limite destro
($x \rightarrow 2^+$)
e del limite sinistro
($x \rightarrow 2^-$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overset{-3}{\uparrow} \boxed{x-5}}{\underset{0^+}{\downarrow} \boxed{x-2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\overset{-3}{\uparrow} \boxed{x-5}}{\underset{0^-}{\downarrow} \boxed{x-2}} = -\infty$$

Osserviamo che, nel primo caso, avremmo avuto, più precisamente, $\overset{-3^+}{\uparrow} \boxed{x-5}$
e nel secondo caso invece $\overset{-3^-}{\uparrow} \boxed{x-5}$

ma sarebbe stato DEL TUTTO INUTILE fare la distinzione, in quanto, comunque, *tanto* un numero leggermente maggiore di -3 *quanto* un numero leggermente minore di -3 sono *negativi*!

ESEMPIO 2) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+9}}{x+3} = ?$

Avremo: $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+9}}{x+3} = -1$

$\begin{array}{c} \sqrt{4}=2 \\ \uparrow \\ \boxed{\sqrt{x+9}} \\ \downarrow \\ \boxed{x+3} \\ -2 \end{array}$

Si è trattato di un caso banale, non si è presentata nessuna delle situazioni speciali trattate nel paragrafo dedicato alle “pseudo-uguaglianze”.

ESEMPIO 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+7}{x^2-1} = ?$

Sia il numeratore che il denominatore tendono all'infinito: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\boxed{3x+7}}{\boxed{x^2-1}} = ?$

$\begin{array}{c} +\infty \\ \uparrow \\ \boxed{3x+7} \\ \downarrow \\ \boxed{x^2-1} \\ +\infty \end{array}$

E quindi siamo di fronte a una forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

IMPORTANTE

Noi **nei risultati alla fine della rassegna,**
qualora l'esercizio porti ad una Forma di Indeterminazione,

- scriveremo innanzitutto che si è trovata, appunto, una forma indeterminata (F.I.),
- poi ne scriveremo anche il “tipo” (in questo caso, $[\infty/\infty]$)
- e infine riporteremo pure il valore corretto del limite,

dalla individuazione del quale, tuttavia, LO STUDENTE È PER ORA “ESENTATO”
 in quanto, in generale, essa presuppone conoscenze che verranno dai PARAGRAFI SUCCESSIVI.

E' pur vero che almeno in alcune di questi situazioni *si potrebbe fin d'ora,*
 ragionando come si crede opportuno,
 o basandosi su tecniche esposte alle pagine precedenti,
tentare di stabilire quanto valga il limite in questione.

Nel nostro specifico ultimo esempio, per il fatto che il Denominatore ha grado maggiore del Numeratore, si capisce che D tenderà all'infinito più rapidamente rispetto ad N e che quindi il limite sarà 0:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\boxed{3x+7}}{\boxed{x^2-1}} = 0$$

$\begin{array}{c} +\infty \\ \uparrow \\ \boxed{3x+7} \\ \downarrow \\ \boxed{x^2-1} \\ +\infty \end{array}$
 PIU'
 RAPIDA-
 MENTE

... oppure si potrebbe procedere per raccoglimenti,
 come in un caso dello stesso tipo esaminato qualche pagina addietro:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\boxed{3x+7}}{\boxed{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(3 + \frac{\boxed{7}}{\boxed{x}} \right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{\boxed{1}}{\boxed{x^2}} \right)} = 0$$

$\begin{array}{c} +\infty \\ \uparrow \\ \boxed{3x+7} \\ \downarrow \\ \boxed{x^2-1} \\ +\infty \end{array}$

In altre situazioni la determinazione del limite è assai più problematica.

ESERCIZI

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)$ 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-2)$
- 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+2)$ 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-5x)$ 10) $\lim_{x \rightarrow 3} (8+6x-x^3)$ 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8+6x-x^3)$ 12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+5}{\sqrt{x}}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-3)^2}$ 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-3)^2}$ 16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-3)^2}$ 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-3)^2}$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+8}{x-4}$ 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+8}{x-4}$ 20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+8}{x-4}$ 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+8}{x-4}$ 22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+8}{x^2-4}$
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+5x+6}{x+1}$ 24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+1}$ 25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+1}$ 26) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+5x+6}{x+1}$
- 27) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+6x+5}{x+1}$ 28) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-5}{x+1}$ 29) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-5}{x+1}$ 30) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2-1}{x^2+x}$
- 31) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+x-10}{x^2-4}$ 32) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+x}{x^2-4}$ 33) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-10}{x^2-4}$ 34) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-10}{x^2-4}$ 35) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x^3-10}$
- 36) $\lim_{x \rightarrow 5} (x^3-x^2)$ 37) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3-x^2)$ 38) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3-x^2)$ 39) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3-x^2)$ 40) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} \right)$
- 41) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot 10^x$ 42) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot 10^{-x}$ 43) $\lim_{x \rightarrow 2} x \cdot 10^{-x}$ 44) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(3^x-5)$ 45) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x+1} \cdot 3^x$
- 46) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^3}$ 47) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^3}$ 48) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^3}$ 49) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2}$ 50) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2}$
- 51) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-2x}$ 52) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-2x}$ 53) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{x^2}$ 54) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{x^2}$ 55) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{x^3}$ 56) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{x^3}$
- 57) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4-x^3+4}{2x^4+x}$ 58) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^4-x^3+4}{2x^4+x}$ 59) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^4-x^3+4}{2x^4+x}$ 60) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{2x-3}{4x+1}$ 61) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{4x+1}$
- 62) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-4}{x^3+1}$ 63) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{x^3+1}$ 64) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-4}{x^3+1}$ 65) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+1}$ 66) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x+2}{x^3+1}$
- 67) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4}$ 68) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-4}$ 69) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$ 70) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+6}{x+3}}$ 71) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x+6}{x+3}}$
- 72) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^x}$ 73) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2^{-x}}$ 74) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x}$ 75) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x+4x)$ 76) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x+2}$
- 77) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ 78) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ 79) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x$ 80) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)$ 81) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

Nei seguenti esercizi, si suppone sempre che x sia una misura in radianti:

- 82) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$ 83) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ 84) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x}$ 85) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\cos x}$ 86) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$
- 87) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^x}$ 88) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin x$ 89) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin x$ 90) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$

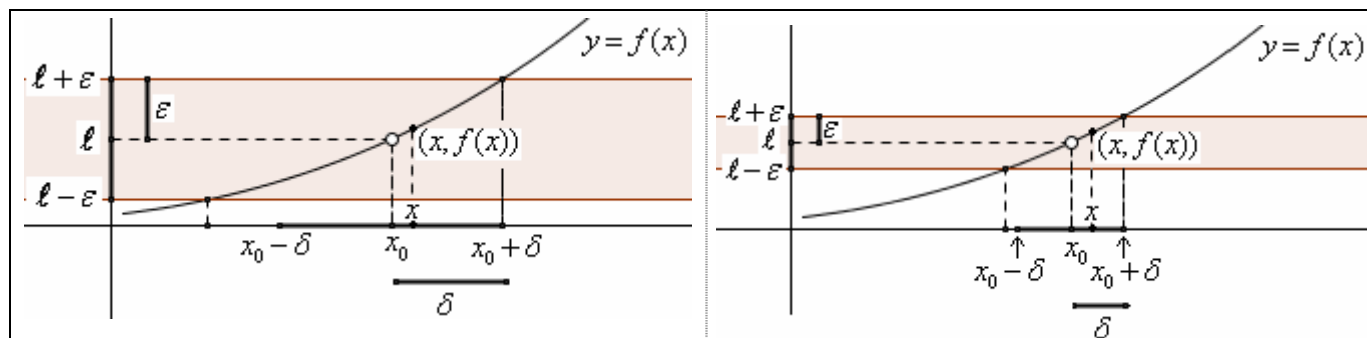
RISPOSTE

- 1) ∞ ($-\infty$ per $x \rightarrow 0^-$, $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$) 2) $+\infty$ 3) 0 (precisamente, 0^+ cioè: "la y tende a 0 dall'alto")
- 4) 0 (precisamente, 0^- cioè: "la y tende a 0 dal basso") 5) $-1/2$ 6) $+\infty$ 7) $+\infty$ 8) $-\infty$
- 9) F.I. $[(+\infty)+(-\infty)]$, ma essendo un polinomio, al tendere di x a infinito si comporta come il termine di grado massimo quindi il limite è $+\infty$ 10) -1
- 11) F.I. $[(+\infty)+(-\infty)]$, ma essendo un polinomio, al tendere di x a infinito si comporta come il termine di grado massimo quindi il limite è $-\infty$
- 12) $+\infty$ 13) $+\infty$ 14) 0 (precisamente, 0^+ cioè: "la y tende a 0 dall'alto") 15) 0 (0^+) 16) 1 17) $1/9$
- 18) ∞ ($-\infty$ per $x \rightarrow 4^-$, $+\infty$ per $x \rightarrow 4^+$)

- 19) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi di ugual grado con x che tende a infinito, il limite sarà uguale al rapporto fra i coefficienti dei due termini di grado massimo e quindi varrà 1
- 20) Come per l'esercizio precedente : il limite vale 1 21) -2
- 22) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi, con x che tende a infinito, in cui il grado del Denominatore supera quello del Numeratore, il limite è 0 (0^+) 23) 6
- 24) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi, con x che tende a infinito, in cui il grado del Numeratore supera quello del Denominatore, il limite è $\infty (+\infty)$
- 25) Come nell'esercizio precedente : questa volta, però, il limite è $-\infty$
- 26) $\infty (-\infty$ per $x \rightarrow -1^-$, $+\infty$ per $x \rightarrow -1^+$)
- 27) $F.I. [0/0]$; queste forme, quando si riferiscono ad un rapporto di polinomi con x che tende a un'ascissa finita, si risolvono per scomposizione e semplificazione. Il limite vale 4.
- 28) $\infty (+\infty$ per $x \rightarrow -1^-$, $-\infty$ per $x \rightarrow -1^+$)
- 29) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi, con x che tende a infinito, in cui il grado del Numeratore supera quello del Denominatore, il limite è $\infty (-\infty)$
- 30) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi di ugual grado con x che tende a infinito, il limite sarà uguale al rapporto fra i coefficienti dei due termini di grado massimo e quindi varrà 5
- 31) $F.I. [0/0]$; queste forme, quando si riferiscono ad un rapporto di polinomi con x che tende a un'ascissa finita, si risolvono per scomposizione e semplificazione. Il limite vale $13/4$.
- 32) $\infty (-\infty$ per $x \rightarrow 2^-$, $+\infty$ per $x \rightarrow 2^+$) 33) $\infty (+\infty$ per $x \rightarrow 2^-$, $-\infty$ per $x \rightarrow 2^+$)
- 34) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi, con x che tende a infinito, in cui il grado del Numeratore supera quello del Denominatore, il limite è $\infty (+\infty)$
- 35) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi, con x che tende a infinito, in cui il grado del Denominatore supera quello del Numeratore, il limite è 0 (0^+) 36) 100
- 37) $F.I. [(+\infty)+(-\infty)]$, ma essendo un polinomio, al tendere di x a infinito si comporta come il termine di grado massimo quindi il limite è $+\infty$ 38) 0
- 39) $F.I. [(+\infty)+(-\infty)]$, ma essendo un polinomio, al tendere di x a infinito si comporta come il termine di grado massimo quindi il limite è $-\infty$
- 40) 0 41) $+\infty$ 42) $F.I. [\infty \cdot 0]$, ma essendo "più forte" l'esponenziale, il limite è 0 43) $1/50$ 44) $+\infty$ 45) $+\infty$
- 46) $-\infty$ 47) $+\infty$ 48) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi, con x che tende a infinito, in cui il grado del Denominatore supera quello del Numeratore, il limite è 0 (0^+)
- 49) $F.I. [\infty/\infty]$, ma essendo un rapporto di polinomi, con x che tende a infinito, in cui il grado del Numeratore supera quello del Denominatore, il limite è $\infty (+\infty)$ 50) Come prima; $-\infty$
- 51) $\infty (+\infty$ per $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$, $-\infty$ per $x \rightarrow \frac{1}{2}^+$)
- 52) $F.I. [\infty/\infty]$; $\infty (+\infty)$ 53) $F.I. [\infty/\infty]$; 0 (0^+) 54) $+\infty$ 55) $\infty (-\infty$ per $x \rightarrow 0^-$, $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$)
- 56) $F.I. [\infty/\infty]$; -1 57) $F.I. [\infty/\infty]$; 3 58) $\infty (-\infty$ per $x \rightarrow 0^-$, $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$)
- 59) 11 60) $\infty (+\infty$ per $x \rightarrow -\frac{1}{4}^-$, $-\infty$ per $x \rightarrow -\frac{1}{4}^+$) 61) $F.I. [\infty/\infty]$; $\frac{1}{2}$ 62) $F.I. [\infty/\infty]$; 0 (0^+)
- 63) $F.I. [\infty/\infty]$; 0 (0^-) 64) $\infty (+\infty$ per $x \rightarrow -1^-$, $-\infty$ per $x \rightarrow -1^+$) 65) $F.I. [0/0]$; $1/3$ 66) 2
- 67) $+\infty$ 68) 0 (0^+) 69) 1 70) e 71) e^2 72) 0 (0^+) 73) $+\infty$
- 74) $F.I. [\infty/\infty]$; 0 (0^+) dato che prevale l'esponenziale 75) $+\infty$ 76) $F.I. [\infty/\infty]$; 1
- 77) $+\infty$ 78) $-\infty$ 79) Non ha senso! In $\sqrt{x}$, se si vuole restare in $\mathbb{R}$, x non può essere <0 80) 0
- 81) 0 82) 0 83) 1 84) 0 85) Il limite non esiste 86) $\infty (+\infty$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $-\infty$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$)
- 87) Situazione "strana": il limite esiste ed è 0 88) Il limite non esiste
- 89) Situazione "strana": il limite esiste ed è 0 90) $\infty (-\infty$ per $x \rightarrow 0^-$, $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$)

7. LA DEFINIZIONE RIGOROSA DI LIMITE

1° CASO: LIMITE FINITO PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO



Definizione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists I_{x_0} / (\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}, f(x) \in I_\ell)$$

Si dice che

“il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a ℓ ” se e solo se

per ogni intorno di ℓ , esiste un intorno di x_0 (NOTA 1) tale che, per ogni x appartenente a questo intorno

(escluso tutt'al più x_0 : vedi NOTA 2),

$f(x)$ appartenga all'intorno di ℓ fissato inizialmente.

Come abbiamo anticipato, si riesce a giungere a una definizione soddisfacente soltanto **RIBALTANDO L'ORDINE** in cui vengono presi in considerazione x_0 e ℓ : infatti, spontaneamente si è portati a pensare prima alla x che si avvicina a x_0 , poi alla y corrispondente che si avvicina a ℓ ; LA DEFINIZIONE RIGOROSA SI OTTIENE SE INVECE SI PENSA PRIMA A ℓ POI A x_0 : la y della funzione si mantiene vicina a ℓ tanto quanto lo si desidera, a patto di prendere x sufficientemente vicina a x_0 .

Oppure: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}, f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon))$

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a ℓ ” se e solo se: per ogni $\varepsilon > 0$ (comunque piccolo si prenda quell' ε) esiste un $\delta > 0$ (NOTA 3) tale che, per ogni x appartenente all'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (escluso tutt'al più x_0 : NOTA 2), $f(x)$ appartenga all'intervallo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

Oppure: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon)$

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a ℓ ” se e solo se: per ogni $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente piccolo) esiste un $\delta > 0$ (NOTA 3) tale che, se x è compreso fra $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ (escluso tutt'al più x_0 : NOTA 2), $f(x)$ risulti compreso fra $\ell - \varepsilon$ ed $\ell + \varepsilon$

Oppure: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / (|x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a ℓ ” se e solo se: per ogni $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) esiste un $\delta > 0$ (NOTA 3) tale che, se la distanza di x da x_0 è minore di δ (e x è diverso da x_0 : NOTA 2), la distanza di $f(x)$ da ℓ risulti minore di ε (vedi a questo punto NOTA 4)

NOTA 1 Questo intorno di x_0 dipende, di norma, dall'intorno di ℓ , nel senso che è tanto più piccolo, quanto più piccolo è I_ℓ

NOTA 2 Abbiamo già osservato, presentando dal punto di vista intuitivo il concetto di limite, come, quando pensiamo a x tendente a x_0 , non ci interessa cosa accade IN x_0 (dove, eventualmente, la funzione potrebbe addirittura non essere definita), ma solo cosa accade “in prossimità”, diciamo così, di x_0

NOTA 3 Questo δ dipende, di norma, da ε , nel senso che è tanto più piccolo, quanto più piccolo è ε . Per indicare questa dipendenza di δ da ε , si usa a volte la notazione funzionale $\delta = \delta(\varepsilon)$ (δ uguale δ di ε , ossia: il δ è un δ che dipende da ε)

NOTA 4 Le quattro definizioni alternative di limite, che abbiamo proposto, sono tutte equivalenti fra loro.

Ciò è subito evidente se si conviene che gli intorno menzionati nella prima delle quattro definizioni siano circolari; ma poi un'analisi attenta permette di stabilire che nella prima definizione data

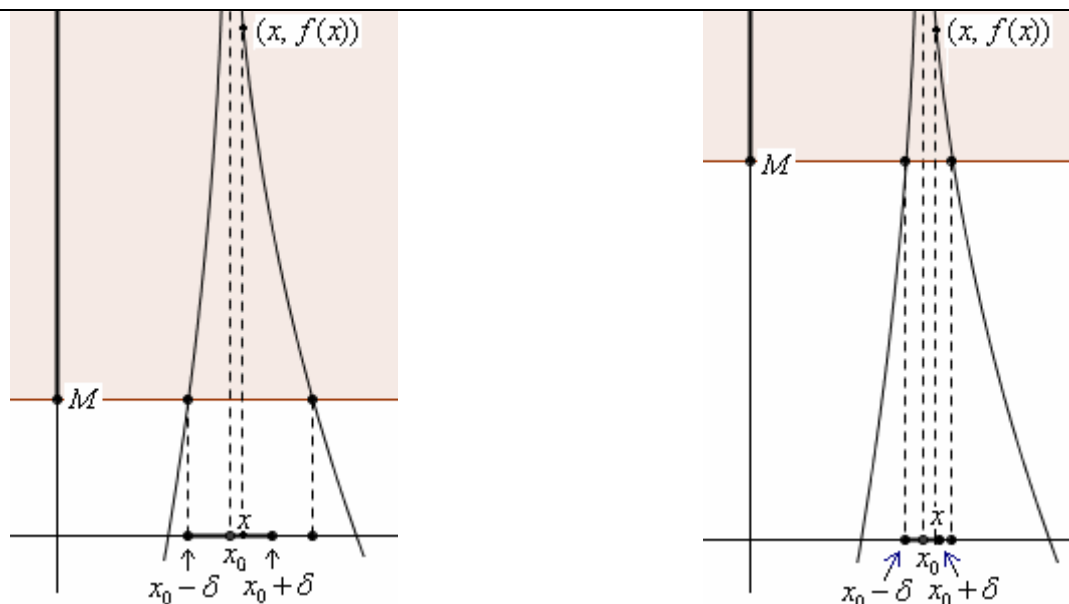
è del tutto indifferente “leggere” gli intorno in questione come intorno “circolari” o invece “generici”.

Ciò si deve al fatto che ogni intorno I di un punto (= intervallo aperto contenente quel punto)

contiene un intorno CIRCOLARE del punto stesso (anzi, ne contiene infiniti: tutti quelli il cui raggio

è minore o uguale della più piccola fra le distanze del punto considerato, dalle estremità dell'intorno I)

2° CASO: LIMITE INFINITO $(+\infty)$ PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO (analoga sarebbe la definizione per il limite $-\infty$)



Definizione: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_{+\infty} \exists I_{x_0} / (\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}, f(x) \in I_{+\infty})$

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a $+\infty$ ” se e solo se per ogni intorno di $+\infty$, esiste un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente a questo intorno di x_0 (escluso tutt'al più x_0), $f(x)$ appartenga all'intorno di $+\infty$ fissato inizialmente

Oppure: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists \delta > 0 / (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}, f(x) \in (M, +\infty))$

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a $+\infty$ ” se e solo se per ogni $M > 0$ (arbitrariamente grande) esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni x appartenente all'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (escluso tutt'al più x_0), $f(x)$ appartenga all'intervallo $(M, +\infty)$

Oppure: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists \delta > 0 / (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > M)$

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a $+\infty$ ” se e solo se per ogni $M > 0$ (comunque grande lo si scelga) esiste un $\delta > 0$ tale che, se x è compreso fra $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ (escluso tutt'al più x_0), $f(x)$ risulti maggiore di M

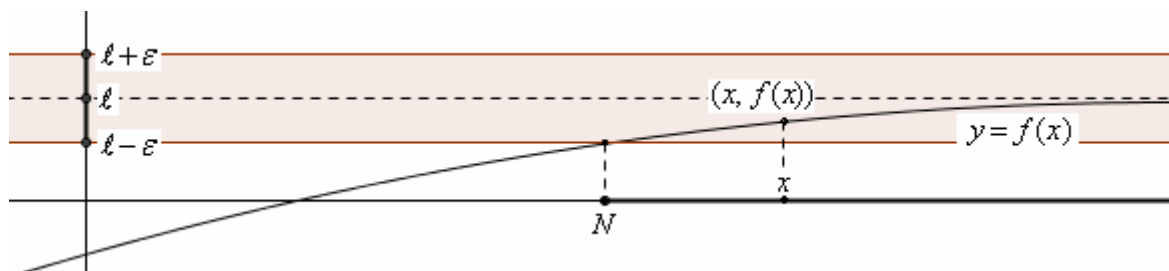
Oppure: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists \delta > 0 / (|x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > M)$

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a $+\infty$ ” se e solo se: per ogni $M > 0$ (grande a piacere) esiste un $\delta > 0$ tale che, se la distanza di x da x_0 è minore di δ (e x è diverso da x_0 : il comportamento della funzione in x_0 non ci interessa), $f(x)$ risulti maggiore di M

Osservazione sulle definizioni di questa pagina

L'intorno di x_0 di cui si parla dipende dall'intorno di $+\infty$ che viene menzionato precedentemente: insomma, si ha $\delta = \delta(M)$ e, quanto più si prende grande M , tanto più, di norma, occorrerà prendere piccolo δ .

3° CASO: LIMITE FINITO PER x CHE TENDE A INFINITO ($+\infty$)
(analoga sarebbe la definizione se il limite fosse $-\infty$)



Definizione: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists I_{+\infty} / (\forall x \in I_{+\infty}, f(x) \in I_\ell)$

Si dice che “il limite, per x che tende a $+\infty$, di $f(x)$ è uguale a ℓ ”

se e solo se

per ogni intorno di ℓ , esiste un intorno di $+\infty$ tale che,

per ogni x appartenente a questo intorno di $+\infty$,

$f(x)$ appartenga all’intorno di ℓ fissato inizialmente.

Oppure: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 / (\forall x \in (N, +\infty), f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon))$

Si dice che “il limite, per x che tende a $+\infty$, di $f(x)$ è uguale a ℓ ”

se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) esiste un $N > 0$ tale che,

per ogni x appartenente all’intervallo $(N, +\infty)$,

$f(x)$ appartenga all’intervallo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

Oppure: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 / (x > N \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \text{ o anche } |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Si dice che “il limite, per x che tende a $+\infty$, di $f(x)$ è uguale a ℓ ”

se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente piccolo) esiste un $N > 0$ tale che,

se x è maggiore di N , $f(x)$ risulti compreso fra $\ell - \varepsilon$ ed $\ell + \varepsilon$ (= la distanza di $f(x)$ da ℓ sia minore di ε)

Osservazione sulle definizioni di questa pagina

L’intorno di $+\infty$ di cui si parla dipende dall’intorno di ℓ che viene menzionato precedentemente:

insomma, è $N = N(\varepsilon)$

“ N uguale N di ε , cioè: questo- N -è-un- N -che-dipende-da- ε ”

e quanto più si prende piccolo ε , tanto più, in generale, occorrerà prendere grande N .

COME PUOI VEDERE, SI PARTE SEMPRE DALLA STESSA “DEFINIZIONE-BASE”:

« Si dice che “il limite, per x che tende a c , di $f(x)$ è uguale a ℓ ”

e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$$

se e solo se

per ogni intorno di ℓ , esiste un intorno di c

tale che, per ogni x appartenente a questo intorno

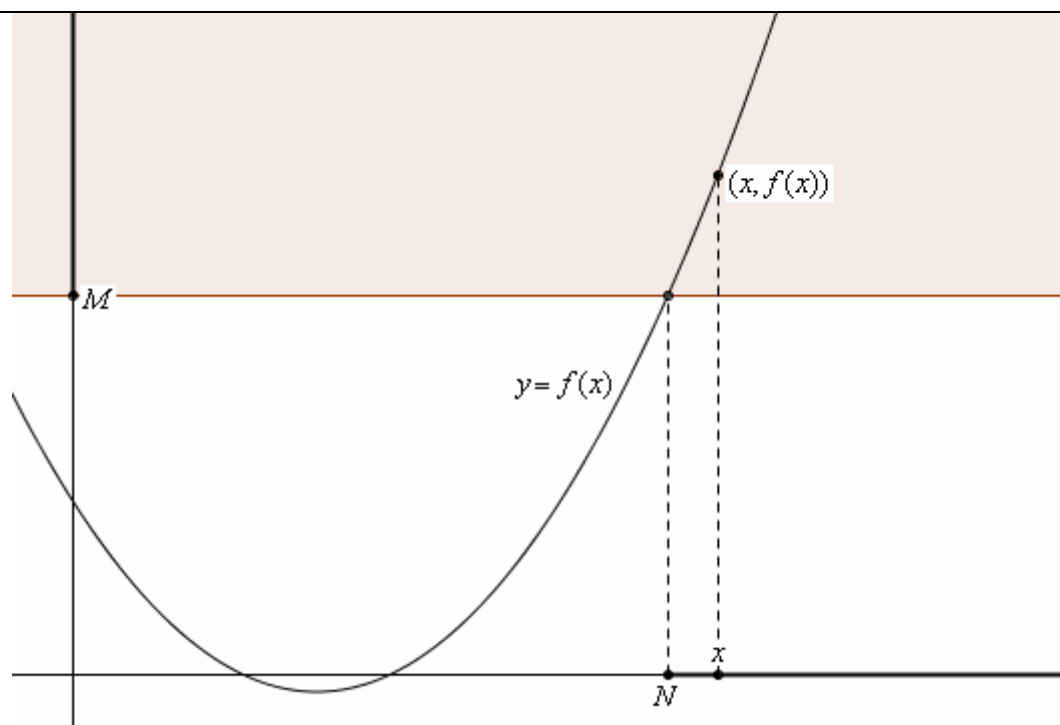
(con esclusione tutt’al più di c , nel caso c sia un’ascissa finita),

$f(x)$ appartenga all’intorno di ℓ fissato all’inizio ».

Si formulano successivamente le particolarizzazioni di questa definizione ai vari casi.

Se c è un’ascissa finita x_0 , l’intorno di c di cui si parla è un intervallo aperto contenente $c = x_0$ e, siccome tale intorno può essere supposto circolare, finisce per essere definito dal suo raggio ε ; se invece è $c = +\infty$, l’intorno di c è costituito da tutti i punti di ascissa $>$ di un certo numero N ; analogamente per l’intorno di ℓ

4° CASO: LIMITE INFINITO ($+\infty$) PER x CHE TENDE A INFINITO ($+\infty$)
 (analoghe sarebbero le def. se cambiasse il segno di uno degli infiniti o di entrambi)



Definizione: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_{+\infty} \exists I'_{+\infty} / (\forall x \in I'_{+\infty}, f(x) \in I_{+\infty})$

Si dice che “il limite, per x che tende a $+\infty$, di $f(x)$ è uguale a $+\infty$ ” se e solo se per ogni intorno I di $+\infty$ (pensato sull’asse delle ordinate), esiste un altro intorno I' di $+\infty$ (pensato, questa volta, sull’asse delle ascisse), tale che, per ogni x appartenente a quest’ultimo intorno $I'_{+\infty}$, $f(x)$ appartenga all’intorno di $+\infty$ fissato inizialmente.

Oppure: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists N > 0 / (\forall x \in (N, +\infty), f(x) \in (M, +\infty))$

Si dice che “il limite, per x che tende a $+\infty$, di $f(x)$ è uguale a $+\infty$ ” se e solo se: per ogni $M > 0$ (arbitrariamente grande) esiste un $N > 0$ tale che, per ogni x appartenente all’intervallo $(N, +\infty)$, $f(x)$ appartenga all’intervallo $(M, +\infty)$

Oppure: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists N > 0 / (x > N \Rightarrow f(x) > M)$

Si dice che “il limite, per x che tende a $+\infty$, di $f(x)$ è uguale a $+\infty$ ” se e solo se: per ogni $M > 0$ (grande quanto si vuole), esiste un $N > 0$ tale che, se x è maggiore di N , $f(x)$ risulti maggiore di M .

Osservazione sulle definizioni di questa pagina

Il secondo intorno cui fa riferimento la definizione dipende dal primo:

$N = N(M)$, vale a dire

N è un “ N di M ”, ossia dipende da M ;

e quanto più si prende grande M ,

tanto più, di norma, saremo costretti a prendere grande anche N .

DEFINIZIONI DI LIMITE: CHE MODIFICHE SUBISCONO QUANDO COMPARE $-\infty$

OSSERVAZIONE FONDAMENTALE (l'abbiamo già fatta in precedenza ... la ripetiamo)

LE DEFINIZIONI DI LIMITE NEI QUATTRO CASI,
quando vengono date nella forma più generale, si possono tutte pensare come
PARTICOLARIZZAZIONI della DEFINIZIONE ASTRATTA seguente:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists I_c / (\forall x \in I_c - \{c\}, f(x) \in I_\ell)$$

dove ciascuno dei due simboli ℓ , c potrà rappresentare, a seconda dei casi,
 un valore finito, oppure $+\infty$, oppure ancora $-\infty$
 (e, nel caso c valga $+\infty$ o $-\infty$, la specificazione “ $-\{c\}$ ” va, ovviamente, tralasciata).

Questa importantissima osservazione consentirà immediatamente
 di scrivere le definizioni di limite nel caso in cui ℓ , c o entrambi valgano $-\infty$.
 Sarà poi immediato tradurre la definizione in forma “numerica”,
 riflettendo sulla analogia/differenza fra “intorno di $+\infty$ ” e “intorno di $-\infty$ ”.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_{-\infty} \exists I_{x_0} / (\forall x \in I_{x_0} - \{x_0\}, f(x) \in I_{-\infty})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists \delta > 0 / (|x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < -M)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists I_{-\infty} / (\forall x \in I_{-\infty}, f(x) \in I_\ell)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 / (x < -N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_{+\infty} \exists I_{-\infty} / (\forall x \in I_{-\infty}, f(x) \in I_{+\infty})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists N > 0 / (x < -N \Rightarrow f(x) > M)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_{-\infty} \exists I_{+\infty} / (\forall x \in I_{+\infty}, f(x) \in I_{-\infty})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists N > 0 / (x > N \Rightarrow f(x) < -M)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_{-\infty} \exists I'_{-\infty} / (\forall x \in I'_{-\infty}, f(x) \in I_{-\infty})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists N > 0 / (x < -N \Rightarrow f(x) < -M)$$

DEFINIZIONI DI LIMITE:

- “LIMITE UGUALE A ∞ (SENZA ALCUN SEGNO)”,
- “LIMITE PER x CHE TENDE A ∞ (SENZA ALCUN SEGNO)”

Limite uguale a ∞ (senza alcun segno)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\infty \exists I_c / (\forall x \in I_c - \{c\}, f(x) \in I_\infty),$$

dove il simbolo c potrà valere, a seconda dei casi, x_0 (ascissa finita) oppure $+\infty$ oppure ancora $-\infty$
 (e, nel caso c valga $+\infty$ o $-\infty$, la specificazione “ $-\{c\}$ ” va, ovviamente, tralasciata).

Un “intorno di ∞ ” è un’unione di intervalli del tipo $(-\infty, a) \cup (b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x < a \vee x > b\}$.

Un “intorno circolare di ∞ ” è della forma $(-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$ o anche $\{x \in \mathbb{R} / |x| > k\}$.

Ad es., se c è un’ascissa finita ($c = x_0$), la definizione generale nel riquadro può essere riscritta come segue:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists \delta > 0 / (|x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| > M)$$

Alcune osservazioni sulla scrittura $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$:

- essa si può dimostrare equivalente alla scrittura $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$;
- essa è usata, nella quasi totalità dei casi, più che altro come scrittura “provvisoria”, in attesa di decidere se, più precisamente, il limite è $+\infty$ o $-\infty$; spesso, a tale scopo, è necessario passare a considerare separatamente il limite sinistro e il limite destro (dei quali ci siamo già occupati a livello intuitivo, e la cui definizione rigorosa formuleremo più avanti).
- Se risulta $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$, allora è anche corretto scrivere $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ (seppure quest’ultima scrittura sia meno precisa)

Limite per x che tende a ∞ (senza alcun segno)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists I_\infty / (\forall x \in I_\infty, f(x) \in I_\ell)$$

dove, per la definizione di “intorno di ∞ ”, ti rimando al riquadro precedente.
 ℓ potrà essere un’ordinata finita, oppure uno dei due simboli $+\infty$ o $-\infty$.

Ad esempio, se ℓ è un’ordinata finita ($\ell \in \mathbb{R}$) avremo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 / (|x| > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

Tuttavia, la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$$

è usata, più che altro, per sintetizzare la congiunzione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell ,$$

alla quale si può dimostrare equivalente.

Si può infine utilizzare anche la scrittura $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, che a questo punto è di ovvia interpretazione.

DEFINIZIONI DI LIMITE: LIMITE SINISTRO, LIMITE DESTRO

Limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists I_{x_0}^- / (\forall x \in I_{x_0}^- - \{x_0\}, f(x) \in I_\ell)$$

dove il simbolo $I_{x_0}^-$ indica un intorno sinistro di x_0 .

ℓ potrà essere, a seconda dei casi,

- un’ordinata finita,
- oppure uno dei due simboli: $+\infty$ o $-\infty$.

Più “numericamente”, scriveremo ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists \delta > 0 / (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), f(x) \in I_\ell)$$

Limite destro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists I_{x_0}^+ / (\forall x \in I_{x_0}^+ - \{x_0\}, f(x) \in I_\ell)$$

dove il simbolo $I_{x_0}^+$ indica un intorno destro di x_0 .

ℓ potrà essere, a seconda dei casi,

- un’ordinata finita,
- oppure uno dei due simboli: $+\infty$ o $-\infty$.

Più “numericamente”, scriveremo ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall I_\ell \exists \delta > 0 / (\forall x \in (x_0, x_0 + \delta), f(x) \in I_\ell)$$

**E’ facile dimostrare,
e importante tener presente,
che UN LIMITE “BILATERALE” ESISTE
SE E SOLO SE ESISTONO
SIA IL LIMITE SINISTRO CHE IL DESTRO,
E SONO UGUALI FRA LORO**

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \wedge \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

8. PUNTUALIZZAZIONI VARIE SULLE DEFINIZIONI DATE

1) NIENTE PAURA

Non bisogna spaventarsi troppo di fronte a queste definizioni rigorose di limite!

- ✓ Da una parte, di una definizione non ambigua di limite c'era senza dubbio bisogno ...
 - per **un'esigenza squisitamente intellettuale** di approfondimento ("guardar dentro" nelle cose!);
 - per **disporre di un criterio non equivoco** che permetta di decidere se si possa parlare o meno di una "tendenza a limite", quando ci si imbatte in una funzione dalla natura "insolita";
 - per **fondare su di una base sicura la dimostrazione di teoremi** sui limiti, i quali possano poi giustificare procedimenti di calcolo vari:
 - ♪ sia in relazione a funzioni ottenute tramite operazioni, composizioni o inversioni a partire da altre funzioni;
 - ♪ sia nelle applicazioni successive del concetto di limite (derivata, integrale ...).
- ✓ D'altro canto, **NELLA PRATICA, quando dovremo calcolare un limite, noi quasi sempre continueremo a operare esattamente come prima**; a questo punto, però, il nostro apparato di definizioni e teoremi giustificherà da un punto di vista rigoroso quanto ci sentivamo già autorizzati a fare, in assenza di una definizione precisa, sulla base del "buon senso".

2) DUE RIGHE DI STORIA

Alla definizione di "limite" che abbiamo esposto si giunse, storicamente, molto tardi:

fin dall'antichità i matematici fatalmente incontrarono il concetto di limite

nell'ambito di molte delle problematiche più interessanti,

ma fu soltanto con un lavoro del matematico tedesco Heine, pubblicato nel **1872 (!)**,

che apparve la definizione con l' "epsilon-delta" usata al giorno d'oggi.

Heine si ispirò comunque alle lezioni dell'altro tedesco **Weierstrass**,

mentre già il francese **Cauchy** (1789-1857) aveva brillantemente e abbondantemente lavorato, pur senza riuscire ad evitare qualche carenza di rigore, sulla tematica del "limite".

Il secolo XIX è caratterizzato, in generale, da un lavoro di ricerca sui fondamenti dell'analisi infinitesimale (concetto di numero reale, di limite, di derivata, di integrale) ad opera di studiosi come Bolzano, Cauchy, Dedekind, Cantor, Weierstrass.

3) ESERCIZI DI APPLICAZIONE DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE NEI VARI CASI (ovvero: come si controlla, tramite la definizione, la correttezza di un limite assegnato)

- a) **Verificare, direttamente tramite la definizione di limite, che**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x}{2} + 5 \right) = 7$$

Si tratterà di impostare la disequazione $\left| \frac{x}{2} + 5 - 7 \right| < \varepsilon$

dove ε indica un numero >0 arbitrariamente fissato,

poi di risolverla con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata

"su tutto un intorno di $x_0 = 4$, privato al più del punto 4".

$$\left| \frac{x}{2} + 5 - 7 \right| < \varepsilon; \quad \left| \frac{x}{2} - 2 \right| < \varepsilon; \quad -\varepsilon < \frac{x}{2} - 2 < \varepsilon, \quad 2 - \varepsilon < \frac{x}{2} < 2 + \varepsilon; \quad 4 - 2\varepsilon < x < 4 + 2\varepsilon$$

OK! La disequazione è verificata su tutto un intorno di $x_0 = 4$

- b) **Verificare, direttamente tramite la definizione di limite, che**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Si tratterà di impostare la disequazione $\frac{1}{x^4} > M$

dove con M si indica un numero >0 arbitrariamente fissato, poi di risolvere la disequazione e far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $x_0 = 0$, privato al più del punto 0.

$$\frac{1}{x^4} > M; \quad x^4 < \frac{1}{M}, \quad x \neq 0; \quad |x| < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}, \quad x \neq 0; \quad -\sqrt[4]{\frac{1}{M}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}, \quad x \neq 0$$

OK! La disequazione è verificata su tutto un intorno di $x_0 = 0$, privato del punto 0.

c) Verificare, direttamente tramite la definizione di limite, che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$$

Imposteremo la disequazione

$$\left| \frac{2x-1}{x} - 2 \right| < \varepsilon$$

dove con ε si indica un numero positivo arbitrariamente fissato;

dovremo poi risolvere la disequazione e far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $+\infty$.

$$\left| \frac{2x-1}{x} - 2 \right| < \varepsilon; \quad \left| \frac{2x-1-2x}{x} \right| < \varepsilon; \quad \left| -\frac{1}{x} \right| < \varepsilon; \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon; \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}; \quad x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}$$

OK! La disequazione è verificata, in particolare, per tutti gli x maggiori di $\frac{1}{\varepsilon}$;

e l'intervallo $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ costituisce un intorno di $+\infty$.

4) PSICOLOGIA E RIGORE

Ripensiamo alla definizione di limite finito per x che tende a un valore finito, data ad esempio nella forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Quando si è trattato di esportare a parole, abbiamo scritto:

Si dice che “il limite, per x che tende a x_0 , di $f(x)$ è uguale a ℓ ” se e solo se:

per ogni $\varepsilon > 0$ (**piccolo a piacere**) esiste un $\delta > 0$ tale che, se la distanza di x da x_0 è minore di δ (e x è diverso da x_0 : il comportamento della funzione IN x_0 non ci interessa), la distanza di $f(x)$ da ℓ risulti minore di ε

E' importante osservare che **locuzioni del tipo:**

- per ogni $\varepsilon > 0$, **PICCOLO A PIACERE**
- per un $\varepsilon > 0$ fissato, **ARBITRARIAMENTE PICCOLO**
- **COMUNQUE PICCOLO** si fissi $\varepsilon > 0$

hanno soprattutto una funzione **PSICOLOGICA**:

dal punto di vista matematico, possiamo essere più “asciutti” e dire semplicemente:

“PER QUALSIASI $\varepsilon > 0$ ”, “COMUNQUE SI FISSI $\varepsilon > 0$ ”, “per un $\varepsilon > 0$ **ARBITRARIO**”.

PROPRIO PER QUESTO la definizione data è completamente rigorosa!

Essa non fa più riferimento (come nei discorsi introduttivi al concetto di limite) a descrizioni vaghe e matematicamente discutibili del tipo:

“ x molto vicina a x_0 , $f(x)$ molto vicina a ℓ ” (... bella forza! QUANTO vicina? ...),
“piccola differenza”, “piccola distanza” (... ma QUANTO piccola, insomma? ...)

Questi tentativi “ingenui” di descrizione vengono ora rimpiazzati da un **INEQUIVOCABILE** gioco di quantificatori: **PER OGNI ... ESISTE ...**

Analogo discorso, naturalmente, vale per espressioni linguistiche come

“arbitrariamente grande”, “grande a piacere”, ecc. da noi usate in relazione al numero M nelle definizioni di limite infinito (ribadiremo questo aspetto più avanti).

5) PSICOLOGIA, RIGORE E LA PRATICA DEGLI ESERCIZI

La locuzione “ ε arbitrariamente piccolo” (o “piccolo a piacere”), discussa al precedente punto 4), è comunque adottata da molti testi anche perché

è utile a suggerire, quando ce ne sia bisogno, la seguente **IMPORTANTE OSSERVAZIONE**:

se, in un caso specifico, devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$,

potrò supporre, se lo ritengo comodo o utile, ε piccolo a mio piacere, abbastanza piccolo da consentire tutti i passaggi algebrici di cui io avverta l'esigenza ai fini del procedimento.

Infatti, se riesco a dimostrare che – tanto per fare un esempio –
PER TUTTI GLI $\varepsilon < 0,001$ è possibile trovare un δ “che vada bene”,
allora, evidentemente, resterà pure dimostrato che
PER QUALUNQUE ε esiste un δ che va bene.

Considera a proposito l'esercizio seguente.

Supponiamo che sia richiesto di dimostrare, servendosi della definizione, che

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-2} = 1$$

Imposteremo allora la disequazione $|\sqrt{x-2} - 1| < \varepsilon$

con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata in tutto un opportuno intorno dell'ascissa 3

(... fatta eccezione, al più, per $x = 3$; ma in questo es. si vede comunque subito che l'eccezione non si verificherà).

Dunque scriveremo:

$$-\varepsilon < \sqrt{x-2} - 1 < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < \sqrt{x-2} < 1 + \varepsilon$$

... e a questo punto,

per liberare x dalla "prigione" della radice quadrata, desidereremmo poter elevare al quadrato.

Però sappiamo che una disequazione può essere elevata al quadrato

(nel senso che, così facendo, si muta in una disequazione con le stesse soluzioni di quella di partenza) soltanto se i membri della disequazione sono positivi.

Ora, riguardo all'espressione $1 - \varepsilon$, essa è positiva (≥ 0) soltanto quando $\varepsilon \leq 1$.

Allora, che fare? Sarà forse necessaria una laboriosa distinzione di casi?

NO! Perché il bello è che se noi ci limitiamo a prendere in considerazione soltanto gli ε tali che $\varepsilon \leq 1$, il nostro procedimento dimostrativo avrà poi un valore **del tutto generale!!!**

Cerchiamo di spiegare in dettaglio il motivo di questo fatto.

Supponiamo di aver dimostrato che l'intorno cercato esiste per tutti gli $\varepsilon \leq 1$.

Il nostro obiettivo finale è di far vedere che, **COMUNQUE** si fissi un $\varepsilon > 0$, esiste un δ tale che ... ecc. ecc.

Quindi, il discorso, ormai portato a termine per gli $\varepsilon \leq 1$,

rimarrebbe apparentemente ancora aperto per gli $\varepsilon > 1$...

... ma ...

... **se noi prendiamo un $\varepsilon > 1$,**

possiamo passare a considerare un qualunque numero ausiliario $\bar{\varepsilon}$, con $\bar{\varepsilon} \leq 1$.

Per questo $\bar{\varepsilon}$ abbiamo già dimostrato che esiste un $\bar{\delta}$ tale che, se $3 - \bar{\delta} < x < 3 + \bar{\delta}$, si ha $1 - \bar{\varepsilon} < \sqrt{x-2} < 1 + \bar{\varepsilon}$.

Ma allora per tutti gli x tali che

$$3 - \bar{\delta} < x < 3 + \bar{\delta}$$

risulterà a maggior ragione

$$1 - \varepsilon < \sqrt{x-2} < 1 + \varepsilon \quad (\text{infatti, essendo } \varepsilon > \bar{\varepsilon}, \text{ sarà } 1 - \varepsilon < 1 - \bar{\varepsilon} < \sqrt{x-2} < 1 + \bar{\varepsilon} < 1 + \varepsilon)$$

Pertanto, in corrispondenza dell' ε da noi scelto,

SIAMO RIUSCITI A DETERMINARE un δ (il $\bar{\delta}$) tale che ecc. ecc.

Tutto questo discorso mostra che, in definitiva, nell'affrontare la disequazione

$$1 - \varepsilon < \sqrt{x-2} < 1 + \varepsilon$$

noi possiamo pensare ε piccolo a piacere,

talmente piccolo da consentirci di effettuare il passaggio di elevamento al quadrato

che ci consentirà di isolare x (quindi: $\varepsilon \leq 1$, per le nostre esigenze):

$$(1 - \varepsilon)^2 < (\sqrt{x-2})^2 < (1 + \varepsilon)^2; \quad 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < x - 2 < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2; \quad 3 - \varepsilon(2 - \varepsilon) < x < 3 + 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Vediamo ora che i due numeri

$$3 - \varepsilon(2 - \varepsilon) \quad \text{e} \quad 3 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

sono, rispettivamente, il primo minore e il secondo maggiore di 3.

Pertanto la disequazione posta è effettivamente verificata in tutto un intorno dell'ascissa 3, C.V.D.

OSSERVAZIONE

Se desideriamo un intorno CIRCOLARE, ci basterà prendere il raggio δ di questo intorno uguale (o minore) della più piccola fra le distanze dell'ascissa 3 dai due estremi $3 - \varepsilon(2 - \varepsilon)$ e $3 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$ dell'intorno trovato:

$$\delta \leq \min(\varepsilon(2 - \varepsilon), 2\varepsilon + \varepsilon^2).$$

**SE ESISTE UN INTORNO NON CIRCOLARE DI UN PUNTO,
NEL QUALE SIA VERIFICATA UNA CERTA CONDIZIONE,
ALLORA ESISTERÀ SEMPRE ANCHE UN'INTORNO CIRCOLARE DI QUEL PUNTO
(ANZI, INFINITI INTORNI CIRCOLARI),
NEL QUALE LA STESSA CONDIZIONE RISULTA VERIFICATA.**

Certo, perché ogni intorno I di un punto (= intervallo aperto contenente quel punto) contiene infiniti intorni circolari del punto stesso
(tutti quelli il cui raggio è $\leq$ della più piccola fra le distanze del punto considerato, dalle estremità di I)

6) ANALOGAMENTE:

POSSIBILITÀ DI CONSIDERARE SOLTANTO VALORI DI x “VICINI A x_0 ”

Analogamente, non è difficile convincersi che, nel corso di una verifica della correttezza di un limite per $x \rightarrow x_0$ attraverso la definizione, è possibile, volendo, considerare soltanto “valori di x vicini a x_0 ”

7) DAL “PICCOLO A PIACERE” AL “GRANDE A PIACERE”

E ancora: quando abbiamo enunciato le definizioni di limite infinito, ad esempio la:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > M$$

nel riferirci al numero $M > 0$, abbiamo detto che andava pensato

“**grande a piacere**”, “**arbitrariamente grande**”;

ma avremmo potuto benissimo fare a meno di locuzioni di questo tipo!

In effetti la definizione, espressa in simboli, si limita a presentare un quantificatore universale $\forall$, che significa semplicemente “per ogni, per qualsiasi, qualunque sia, comunque si prenda”

e quindi è *indifferente* rispetto al “grande” o al “piccolo”.

Tuttavia, parlare di un $M > 0$ “grande a piacere” o simili, si rivela utile sia da un punto di vista psicologico, sia per ricordare che:

se, in un caso specifico, devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

posso supporre, se lo ritengo comodo o utile, M grande a mio piacere.

Infatti, se io riesco a dimostrare che, ad esempio,

PER TUTTI GLI M MAGGIORI DI 1.000.000 è possibile trovare un δ “che vada bene”,

allora, evidentemente, resterà pure dimostrato che PER QUALUNQUE M esiste un δ che va bene (preso un M minore o uguale di 1.000.000,

lo rimpiazzo provvisoriamente con un altro numero M' maggiore di 1.000.000,

e il δ che va bene per questo M' andrà bene a maggior ragione anche per l' M fissato inizialmente)

8) CONSIDERAZIONI ANALOGHE A QUELLE ESPOSTE AI PUNTI 5), 6), 7)

SI POSSONO RIFERIRE, EVIDENTEMENTE,

A TUTTE LE DEFINIZIONI DI LIMITE NEI VARI CASI.

9) TENDERE ALL'ORDINATA ℓ “DAL BASSO” O “DALL'ALTO”.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell^- \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists I_c / (x \in I_c - \{c\} \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) \leq \ell)$$

Qui è la y che tende a ℓ^- :

la y tende a ℓ

DAL BASSO

$\uparrow y$

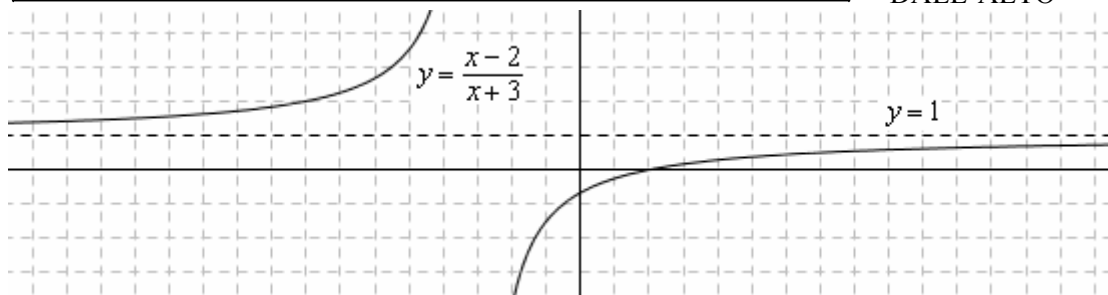
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell^+ \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists I_c / (x \in I_c - \{c\} \Rightarrow \ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon)$$

Qui è la y che tende a ℓ^+ :

la y tende a ℓ

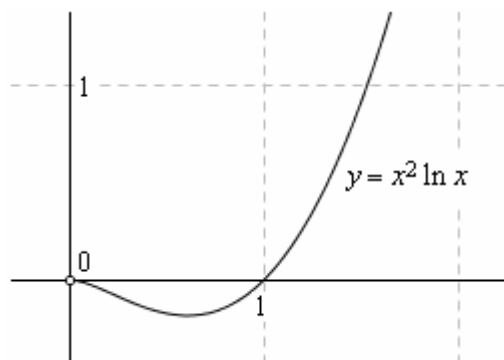
DALL'ALTO

$\downarrow y$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+3} = 1^+$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \ln x = 0^+$$

9. TEOREMI SUI LIMITI

In questa rassegna di teoremi,

la lettera c starà ad indicare uno qualsiasi dei simboli: $x_0, -\infty, +\infty$

OBIETTIVI; OSSERVAZIONI PRELIMINARI

La teoria dei limiti prevede una bella mole di teoremi; qui di seguito troverai i più rilevanti.

Di alcuni verrà data la dimostrazione, ma non di tutti.

Quanto faremo, d'altronde, sarà ampiamente sufficiente a permetterti di comprendere quali sono gli "stili" dimostrativi principali, e di acquisire metodi efficaci di esposizione del ragionamento.

In tal modo, potresti poi cercare tu stesso di formulare delle dimostrazioni (anche se, onestamente, questo obiettivo presenta in genere un grado di difficoltà medio-alto), e comunque sarai in grado di approfondire ciò che desideri, attraverso qualsiasi fonte (libro di testo o sito web).

Osserverai come la verità di pressoché tutti gli enunciati può essere colta con l'intuizione algebrica e/o geometrica, e scoprirai che è assai facile ricostruire il contenuto di questi teoremi integrando l'intuizione col ragionamento, senza che la memoria richieda di essere scomodata più di tanto.

Questo percorso servirà anche a fissare alcune proposizioni "cardine" che entreranno, in seguito, nella dimostrazione di altri teoremi più avanzati e molto importanti.

Ad esse verranno assegnati nomi particolari
(Teorema della Permanenza del Segno,
Teorema dei Due Carabinieri,
Teorema di Esistenza del Limite delle Funzioni Monotone ...)

1) Limite della funzione opposta

Se una funzione $f(x)$ ammette il limite finito ℓ , allora la funzione $-f(x)$ ammette il limite $-\ell$:

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow c} [-f(x)] = -\ell$$

Dimostrazione

Supponiamo, per fissare le idee, c finito;

lasciamo al lettore le facili modifiche da apportare alla dimostrazione nel caso $c = +\infty$ oppure $c = -\infty$.

La nostra tesi è che $\exists \lim_{x \rightarrow c} [-f(x)] = -\ell$, sotto l'ipotesi che $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$.

Dobbiamo perciò far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } c - \delta < x < c + \delta \wedge x \neq c \Rightarrow -\ell - \varepsilon < -f(x) < -\ell + \varepsilon.$$

Fissiamo dunque ad arbitrio un $\varepsilon > 0$.

In corrispondenza di questo ε esisterà, per ipotesi, un $\delta > 0$ tale che,

se $c - \delta < x < c + \delta \wedge x \neq c$, risulti $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Ma da quest'ultima catena di disuguaglianze si trae, cambiando i segni e i versi,

$$-\ell + \varepsilon > -f(x) > -\ell - \varepsilon$$

ossia, leggendo da destra verso sinistra,

$$-\ell - \varepsilon < -f(x) < -\ell + \varepsilon$$

C.V.D.

$$2) \quad \exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow c} [-f(x)] = \mp\infty$$

$$3) \quad \text{Il limite di una costante (voglio dire: funzione costante) è la costante stessa: } \lim_{x \rightarrow c} k = k$$

$$4) \quad \text{Se } k \text{ è una costante reale, e si ha } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \text{ allora risulta } \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + k] = \ell + k$$

5) "Il limite del valore assoluto è uguale al valore assoluto del limite"

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |\ell|$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$$

6) Unicità del limite

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Se, per $x \rightarrow c$, la funzione $f(x)$ ammette un limite, questo è unico.

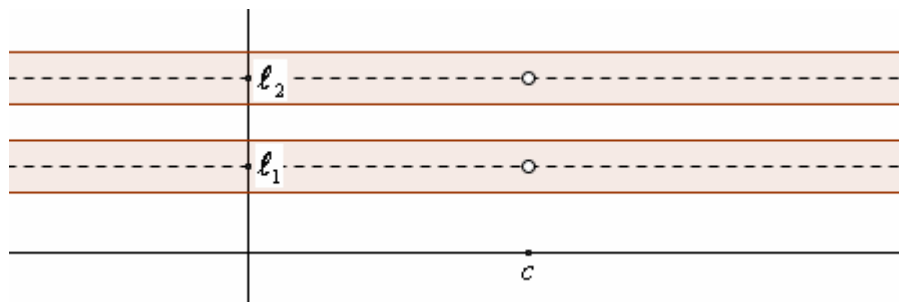
Dimostrazione

Dimostreremo il teorema supponendo $c \in \mathbb{R}$;

analoga sarebbe la dimostrazione nel caso $c = +\infty$ o $c = -\infty$.

Per assurdo:

supponiamo che sia, contemporaneamente, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell_2$, con $\ell_1 \neq \ell_2$



(supponiamo anche ℓ_1, ℓ_2 finiti;

il ragionamento per assurdo che stiamo effettuando

si potrebbe facilissimamente adattare alle altre possibili eventualità).

Fissiamo un $\bar{\varepsilon}$ sufficientemente piccolo affinché i due intornoi

$$(\ell_1 - \bar{\varepsilon}, \ell_1 + \bar{\varepsilon}) \text{ e } (\ell_2 - \bar{\varepsilon}, \ell_2 + \bar{\varepsilon})$$

siano disgiunti (= siano privi di intersezione, non abbiano punti comuni).

... Facile! Basterà che scegliamo

$$\bar{\varepsilon} < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$$

e avremo raggiunto lo scopo.

Ora, in corrispondenza di questo $\bar{\varepsilon}$,

- essendo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell_1$ esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x \in I(c, \delta_1) - \{c\}$, si abbia $\ell_1 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_1 + \bar{\varepsilon}$
- ed essendo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell_2$, esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in I(c, \delta_2) - \{c\}$, si abbia $\ell_2 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_2 + \bar{\varepsilon}$.

Adesso poniamo $\bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$ e consideriamo $I(c, \bar{\delta})$, che poi può essere visto come $I(c, \delta_1) \cap I(c, \delta_2)$.

Per ogni x di questo $I(c, \bar{\delta})$, fatta eccezione al più per $x = c$, si avrà contemporaneamente

$$\ell_1 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_1 + \bar{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \ell_2 - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell_2 + \bar{\varepsilon};$$

ma ciò è palesemente assurdo,

perché le due condizioni sono incompatibili in quanto i due intervalli

$$(\ell_1 - \bar{\varepsilon}, \ell_1 + \bar{\varepsilon}) \text{ e } (\ell_2 - \bar{\varepsilon}, \ell_2 + \bar{\varepsilon})$$

avrebbero in tal modo dei punti comuni, mentre li abbiamo supposti disgiunti.

7) Permanenza del segno

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se, per $x \rightarrow c$, la funzione $f(x)$ ammette un limite ℓ diverso da zero ($\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, oppure $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$), allora esiste un intorno di c per tutti gli x del quale, escluso tutt'al più c nel caso c sia finito, $f(x)$ mantiene lo stesso segno del limite.

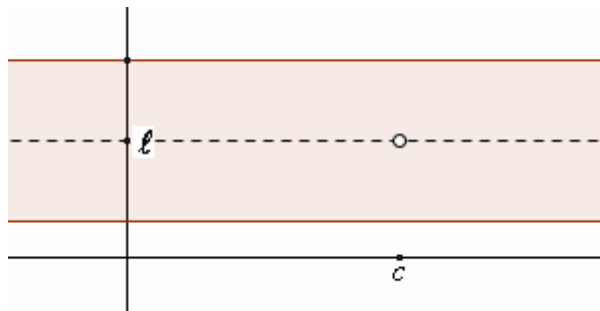


Figura A

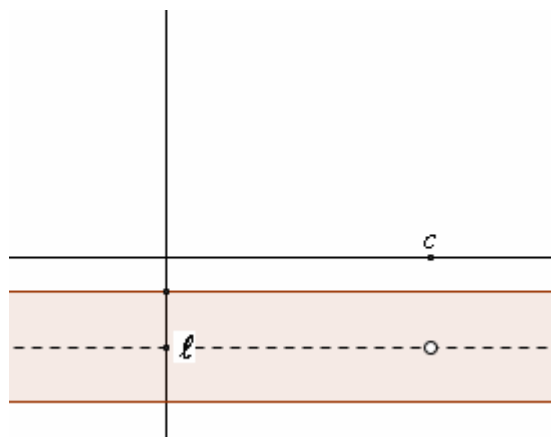


Figura B

Dimostrazione

La nostra ipotesi è che esista il $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \neq 0$.

Il simbolo c può indicare un'ascissa finita, oppure $+\infty$ o ancora $-\infty$; anche il limite ℓ potrà essere finito o infinito.

Consideriamo solo il caso in cui ℓ sia finito;

le modifiche da apportare alla dimostrazione nel caso $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$ sono piuttosto ovvie.

Dico ora che è sempre possibile scegliere un intorno $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ del limite ℓ , costituito da ordinate aventi tutte lo stesso segno del limite.

E' ben facile rendersene conto:

- ✓ nel sottocaso $\ell > 0$, basterà a tale scopo prendere $\varepsilon < \ell$ (figura A);
- ✓ se fosse poi $\ell < 0$, basterebbe a tale scopo prendere $\varepsilon < |\ell|$ (figura B).

Ma essendo per ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$, in corrispondenza dell' ε fissato esisterà sempre un intorno I_c

per ogni x del quale (fatta eccezione al più per $x = c$, nel caso c sia finito),

$f(x)$ cada all'interno della fascia di ordinate $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$,

costituita, ribadiamolo, esclusivamente da ordinate che hanno lo stesso segno del limite ℓ .

Il teorema è così dimostrato.

- 8) Se esiste un intorno di c per ogni x del quale, escluso tutt'al più $x = c$, si ha $f(x) \geq 0$ e $f(x)$ ammette un limite ℓ per $x \rightarrow c$, allora è $\ell \geq 0$, oppure $\ell = +\infty$

La dimostrazione è facile: si effettua ragionando per assurdo e utilizzando il teorema precedente.

- 9) Se esiste un intorno di c per ogni x del quale, escluso tutt'al più $x = c$, si ha $f(x) > 0$ e $f(x)$ ammette un limite ℓ per $x \rightarrow c$, allora è $\ell > 0$, oppure $\ell = +\infty$.

Osserverai che questo teorema ha un'ipotesi *rafforzata* rispetto a quella del precedente teorema 8, e tuttavia la tesi non è $\ell > 0$, bensì, esattamente come per il n. 8, $\ell \geq 0$.

Considera, a proposito, la funzione $f(x) = x^2$ con $x \rightarrow 0$.

Il limite è nullo, NON positivo, pur essendo $x^2 > 0$ quando $x \neq 0$.

- 10) Evidentemente, teoremi analoghi ai teoremi 8), 9) valgono anche se si suppone, questa volta, $f(x) \leq 0$ (risp. $f(x) < 0$) in tutto un intorno di c , escluso tutt'al più c .

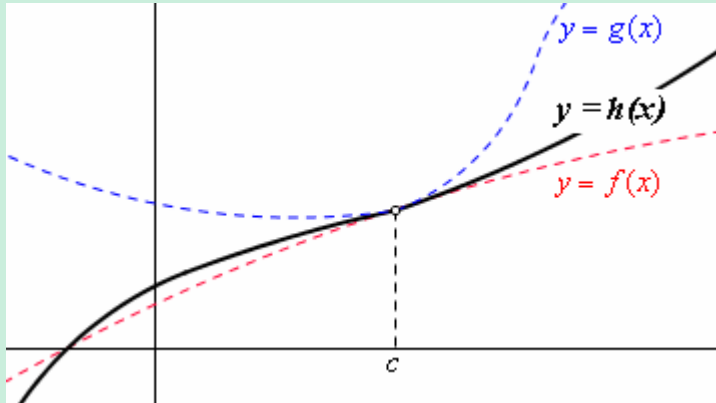
11) I “due carabinieri” (= primo teorema del confronto)

PRIMO TEOREMA DEL CONFRONTO (detto anche: “**TEOREMA DEI DUE CARABINIERI**”)

SE, in tutto un intorno di c , escluso tutt'al più c , si ha $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

e inoltre è $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$,

ALLORA sarà pure $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \ell$



L'ipotesi richiede che la condizione $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ sia verificata in tutto un intorno di c , escluso tutt'al più c , non necessariamente su tutta l'intersezione dei tre domini delle funzioni in gioco

Dimostrazione

(Supponiamo che c sia un'ascissa finita; lasciamo al lettore il compito, piuttosto banale, di apportare alla dimostrazione le modifiche necessarie, nel caso in cui c sia infinito).

Dunque, l'ipotesi è che

- a) esista un intorno I_c^* tale che per ogni x di I_c^* , escluso tutt'al più $x = c$, si abbia

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

- b) e inoltre risulti $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

La tesi è che $\exists \lim_{x \rightarrow c} h(x) = \ell$.

Ora,

- la condizione a) ci porta a figurarci le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ come due “carabinieri” che “stringono in mezzo” un “ladro”, ossia la funzione $h(x)$...
- ... e la condizione b) ci dice che i due “carabinieri” sono diretti entrambi in “caserma” (il limite ℓ).

E' perciò evidente che pure il “ladro” $h(x)$, essendo stretto in mezzo fra i due carabinieri, dovrà necessariamente confluire in caserma (= tendere al limite ℓ).

La dimostrazione consisterà nel tradurre in opportune relazioni matematiche questa buffa idea.

Fissiamo pertanto ad arbitrio un $\bar{\varepsilon} > 0$.

Per l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$, esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che, $\forall x \in I(c, \delta_1) - \{c\}$, si abbia $\ell - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell + \bar{\varepsilon}$;

e per l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$, esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in I(c, \delta_2) - \{c\}$, si abbia $\ell - \bar{\varepsilon} < g(x) < \ell + \bar{\varepsilon}$.

Se ora poniamo $\bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$ e consideriamo l'intorno di centro c e raggio $\bar{\delta}$, su tutto $I(c, \bar{\delta}) - \{c\}$ saranno verificate *entrambe* le disuguaglianze

$$\ell - \bar{\varepsilon} < f(x) < \ell + \bar{\varepsilon}; \quad \ell - \bar{\varepsilon} < g(x) < \ell + \bar{\varepsilon}$$

e quindi su tutto $[I(c, \bar{\delta}) \cap I_c^*] - \{c\}$ si avrà

$$\ell - \bar{\varepsilon} < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \bar{\varepsilon},$$

da cui, in particolare,

$$\ell - \bar{\varepsilon} < h(x) < \ell + \bar{\varepsilon}, \quad \text{C.V.D.}$$

12) Il secondo teorema del confronto

SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO

SE, in tutto un intorno di c , escluso tutt'al più c , si ha $|f(x)| \leq g(x)$ e inoltre è $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$,

ALLORA sarà pure $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

13) Il terzo teorema del confronto

TERZO TEOREMA DEL CONFRONTO

SE, in tutto un intorno di c , escluso tutt'al più c , si ha

$f(x) \geq g(x)$ (rispettivamente: $f(x) \leq g(x)$)

e inoltre è $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$ (rispettivamente: $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$)

ALLORA si avrà pure $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ (rispettivamente: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$)

14) Il limite di una somma (nel senso di “somma algebrica”)

IL LIMITE DELLA SOMMA DI DUE FUNZIONI È UGUALE ALLA SOMMA DEI LIMITI (SUPPOSTO CHE ENTRAMBI ESISTANO E SIANO FINITI):

$$\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = \ell_1 \wedge \lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = \ell_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f_1(x) + f_2(x)] = \ell_1 + \ell_2 \quad (\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R})$$

Dimostrazione

Supponiamo c finito, lasciando al lettore le modifiche da apportare alla dimostrazione nel caso c sia infinito.

Dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad (c - \delta < x < c + \delta \wedge x \neq c \Rightarrow (\ell_1 + \ell_2) - \varepsilon < f_1(x) + f_2(x) < (\ell_1 + \ell_2) + \varepsilon).$$

Fissiamo dunque arbitrariamente un $\bar{\varepsilon} > 0$ e passiamo a considerare il numero $\frac{\bar{\varepsilon}}{2}$.

In corrispondenza di $\frac{\bar{\varepsilon}}{2}$ (che farà da “nuovo $\bar{\varepsilon}$ ”),

- per l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = \ell_1$ esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x \in I(c, \delta_1) - \{c\}$, si abbia

$$\ell_1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < f_1(x) < \ell_1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2};$$

- e per l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = \ell_2$, esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in I(c, \delta_2) - \{c\}$, si abbia

$$\ell_2 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < f_2(x) < \ell_2 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}.$$

Detto dunque $\bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$, su tutto $I(c, \bar{\delta}) - \{c\}$ risulteranno verificate contemporaneamente entrambe le condizioni

$$\ell_1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < f_1(x) < \ell_1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$$

$$\ell_2 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < f_2(x) < \ell_2 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$$

e pertanto in tale insieme $I(c, \bar{\delta}) - \{c\}$

sarà verificata anche la condizione che si ottiene sommandole membro a membro:

$$\ell_1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \ell_2 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < f_1(x) + f_2(x) < \ell_1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \ell_2 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$$

ossia

$$(\ell_1 + \ell_2) - \bar{\varepsilon} < f_1(x) + f_2(x) < (\ell_1 + \ell_2) + \bar{\varepsilon},$$

C.V.D.

Ti invito ad esaminare con attenzione la seguente

DIMOSTRAZIONE CON UNO “STILE” ALTERNATIVO

Fissiamo un $\varepsilon > 0$.

- Per l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = \ell_1$ esisterà un $\delta_1 > 0$ tale che $\forall x \in I(c, \delta_1) - \{c\}$, si abbia

$$\ell_1 - \varepsilon < f_1(x) < \ell_1 + \varepsilon$$

- e per l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = \ell_2$ esisterà un $\delta_2 > 0$ tale che, $\forall x \in I(c, \delta_2) - \{c\}$, si abbia

$$\ell_2 - \varepsilon < f_2(x) < \ell_2 + \varepsilon.$$

In $I(c, \delta_1) \cap I(c, \delta_2) - \{c\}$ si avrà allora

$$\ell_1 - \varepsilon < f_1(x) < \ell_1 + \varepsilon$$

$$\ell_2 - \varepsilon < f_2(x) < \ell_2 + \varepsilon$$

↓

$$\ell_1 + \ell_2 - 2\varepsilon < f_1(x) + f_2(x) < \ell_1 + \ell_2 + 2\varepsilon$$

**SE ORA SI TIENE CONTO DELL'ARBITRARIETA' DI ε ,
LA DIMOSTRAZIONE E' TERMINATA. Bello!**

OSSERVAZIONE

Non sempre, se esiste il limite della somma di due funzioni, ciascuna delle due funzioni prese separatamente tende a limite.

Infatti, ad esempio, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin^2 x + \cos^2 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

ma i due limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^2 x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos^2 x$ non esistono.

- 15) Il limite della differenza di due funzioni** è uguale alla differenza dei limiti (supposto che entrambi esistano e siano finiti).

Dimostrazione

Conseguenza di

$$1) \exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow c} [-f(x)] = -\ell$$

14) Il limite della somma di due funzioni ... ecc.

- 16) Il limite della somma di PIÙ funzioni** è uguale alla somma dei limiti (supposto che tutti questi limiti esistano e siano finiti).

Dimostrazione: basta applicare più volte il teorema 14)

- 17) Il limite del prodotto di una costante per una funzione**

è uguale al prodotto della costante per il limite della funzione (supposto che questo esista e sia finito):

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k\ell \quad (k, \ell \in \mathbb{R})}$$

- 18) Il limite del prodotto di due funzioni**

è uguale al prodotto dei limiti delle due funzioni (supposto che entrambi esistano e siano finiti):

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = \ell_1 \wedge \lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = \ell_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2 \quad (\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R})}$$

OSSERVAZIONE

Non sempre, se esiste il limite del prodotto di due funzioni, ciascuna delle due funzioni prese separatamente tende a limite.

Infatti, ad es., $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

(come si dimostra utilizzando il primo oppure il secondo dei teoremi del confronto);

ma $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ non esiste.

Dimostrazione del teorema

INNANZITUTTO, DIMOSTRIAMO IL TEOREMA NEL CASO PARTICOLARE $\ell_1 = \ell_2 = 0$.

Sia dunque $\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = 0$; vogliamo provare che sarà pure $\lim_{x \rightarrow c} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = 0$.

Sia dato un qualsivoglia $\varepsilon > 0$.

Nel caso ε fosse > 1 , consideriamo un qualsiasi $\bar{\varepsilon}$ tale che $0 < \bar{\varepsilon} < 1 < \varepsilon$, altrimenti poniamo $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ (**abbiamo bisogno, in sostanza, di partire da un $\bar{\varepsilon} \leq 1$, perché in questo modo sarà poi $\bar{\varepsilon}^2 \leq \varepsilon$**).

Ora, l'ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = 0$$

ci assicura che, in corrispondenza di questo $\bar{\varepsilon}$, esiste un intorno $\bar{I}_1$ di c

tale che, per ogni x di questo intorno eccettuato tutt'al più c nel caso c sia finito, risulti $|f_1(x)| < \bar{\varepsilon}$.

E per l'ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = 0$$

esisterà, in corrispondenza di $\bar{\varepsilon}$, un altro intorno $\bar{I}_2$ di c tale che,

per ogni x di questo intorno eccettuato tutt'al più c nel caso c sia finito, risulti $|f_2(x)| < \bar{\varepsilon}$.

Su tutto $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 - \{c\}$ si avrà allora $|f_1(x) \cdot f_2(x)| = |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| < \bar{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^2 \leq \varepsilon$

Dunque esiste un intorno di c nel quale, con l'esclusione tutt'al più di c , si ha $|f_1(x) \cdot f_2(x)| < \varepsilon$ e con ciò la nostra tesi, relativa al caso particolare, è dimostrata.

VENIAMO ORA AL CASO GENERALE.

Essendo $\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = \ell_1$, la funzione $y = f_1(x)$ si può riscrivere come $f_1(x) = \ell_1 + [f_1(x) - \ell_1] = \ell_1 + \alpha(x)$

dove, poiché $f_1(x)$ tende a ℓ_1 quando x tende a c ,

la differenza $\alpha(x) = f_1(x) - \ell_1$ tenderà a 0 per x che tende a c (conseguenza del teorema 4).

Osserviamo che di una funzione che tende a 0 quando x tende a c

si può affermare che è un “**infinitesimo**” per $x \rightarrow c$.

Allo stesso modo, essendo $\lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = \ell_2$, si ha $f_2(x) = \ell_2 + \beta(x)$,

con $\beta(x)$ infinitesimo (funzione tendente a 0) per x che tende a c .

Avremo in definitiva $f_1(x) \cdot f_2(x) = [\ell_1 + \alpha(x)] \cdot [\ell_2 + \beta(x)] = \ell_1 \ell_2 + \ell_1 \beta(x) + \ell_2 \alpha(x) + \alpha(x) \beta(x)$

ed essendo, per ragioni note,

$$\lim_{x \rightarrow c} \ell_1 \ell_2 = \ell_1 \ell_2;$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \ell_1 \beta(x) = \ell_1 \cdot \lim_{x \rightarrow c} \beta(x) = \ell_1 \cdot 0 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow c} \ell_2 \alpha(x) = \ell_2 \cdot \lim_{x \rightarrow c} \alpha(x) = \ell_2 \cdot 0 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \alpha(x) \beta(x) = 0$$

si avrà (teorema 14)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow c} (\ell_1 \ell_2 + \ell_1 \beta(x) + \ell_2 \alpha(x) + \alpha(x) \beta(x)) = \ell_1 \ell_2 + 0 + 0 + 0 = \ell_1 \ell_2$$

C.V.D.

19) Il limite del reciproco di una funzione

è uguale al reciproco del limite (supposto che questo sia finito e $\neq 0$):

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$$

20) Il limite del quoziente di due funzioni

è uguale al quoziente dei limiti (supposto che entrambi i limiti esistano e siano finiti e inoltre che il limite della funzione a denominatore sia diverso da zero):

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

TEOREMI SINTETIZZATI DA “PSEUDO-UGUAGLIANZE”; FORME DI INDECISIONE

La tabella seguente elenca una rassegna di teoremi enunciandoli, per brevità ed efficacia espositiva, in forma sintetica, attraverso una “pseudo-uguaglianza”; e riporta anche le “forme di indecisione” che si riferiscono alla somma algebrica, al prodotto, al quoziente di funzioni.

♪ Ad esempio, quando scriviamo $+\infty + \ell = +\infty$, vogliamo in tal modo riassumere l'enunciato:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

♪ Ancora: scrivendo che $+\infty + (-\infty)$ è una “FORMA DI INDECISIONE”, intendiamo affermare che, qualora si abbia $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$,

NULLA SI PUO' DIRE A PRIORI riguardo al $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]$

(tale limite potrà esistere finito o infinito, o anche non esistere, a seconda delle specifiche funzioni f e g)

**Basteranno, a titolo di esempi,
le dimostrazioni di un paio soltanto degli enunciati in esame
(le trovi alle pagine successive).**

$$21) +\infty + \ell = +\infty \quad (\ell \in \mathbb{R}) \quad 22) -\infty + \ell = -\infty \quad (\ell \in \mathbb{R}) \quad 23) +\infty + (+\infty) = +\infty \quad 24) -\infty + (-\infty) = -\infty$$

25) $[+\infty + (-\infty)]$ FORMA DI INDECISIONE

26) $\ell \cdot \infty = \infty \quad (\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\})$
con l'ordinaria “regola dei segni”

27) $\infty \cdot \infty = \infty$
con l'ordinaria “regola dei segni”

28) $[0 \cdot \infty]$ FORMA DI INDECISIONE

$$\begin{array}{lllllll} 29) & 30) & 31) & 32) & 33) & 34) & 35) \\ \frac{1}{0} = \infty & \frac{\ell}{0} = \infty \quad (\ell \in \mathbb{R}^*) & \frac{1}{\infty} = 0 & \frac{\ell}{\infty} = 0 \quad (\ell \in \mathbb{R}^*) & \frac{\infty}{\ell} = \infty \quad (\ell \in \mathbb{R}^*) & \frac{\infty}{0} = \infty & \frac{0}{\infty} = 0 \end{array}$$

36) $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ FORMA DI INDECISIONE

37) $\left[\frac{0}{0} \right]$ FORMA DI INDECISIONE

38) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \ell^n, \quad n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

39) Con $n \in \mathbb{N}^*$ PARI, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in [0, +\infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

40) Con $n \in \mathbb{N}^*$ DISPARI, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

□ **Dimostrazione del teorema sintetizzato nella pseudo-uguaglianza** $\ell \cdot \infty = \infty$ ($\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$)

Per semplicità supponiamo $\ell > 0$ e supponiamo inoltre che l'“ ∞ ” in questione sia, più precisamente, $+\infty$. (ovvie sono le modifiche che occorrerebbe apportare alla dimostrazione per adattarla agli altri casi).

Dunque: la nostra ipotesi è che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell > 0$ e che $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$

e la nostra tesi è che $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$.

Sia $M > 0$.

Vogliamo far vedere che in corrispondenza di questo M , fissato arbitrariamente, esiste sempre un intorno di c per ogni x del quale (eccettuato al più $x = c$, se c è finito), valga la disuguaglianza $f(x) \cdot g(x) > M$.

A tale scopo, ci serve considerare:

a) in relazione all'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell > 0$, il numero $\frac{\ell}{2}$.

In corrispondenza di tale numero positivo $\frac{\ell}{2}$

esisterà un intorno di c nell'ambito del quale (tolto, al più, c)

$$\ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2} \text{ (ma ci interessa in particolare } f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} \text{)}$$

b) in relazione all'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$, il numero $M' = \frac{2M}{\ell}$.

In corrispondenza di tale M' esisterà un intorno di c nell'ambito del quale (tolto, al più, c) sarà $g(x) > M'$

Da tutto ciò si trae che nell'intorno di c che rappresenta l'intersezione dei due intorni precedentemente considerati (fatta eccezione, al più, per il punto $x = c$), si avrà

$$f(x) > \frac{\ell}{2} \wedge g(x) > \frac{2M}{\ell}$$

da cui, moltiplicando membro a membro:

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2M}{\ell} = M$$

Così, dopo aver fissato ad arbitrio quell' M iniziale, siamo riusciti a determinare un intorno di c tale che ... ecc. ecc.

La tesi è dimostrata.

□ **Dimostrazione del teorema sintetizzato nella pseudo-uguaglianza** $\frac{1}{0} = \infty$

La situazione rappresentata nel teorema è quella di un rapporto di due funzioni $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

quando si abbia $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$

Si vuole dimostrare che, sotto tale ipotesi, è $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Prima parte)

Dimostriamo dapprima la tesi in un CASO PARTICOLARE, ossia qualora la funzione $f(x)$ a numeratore sia addirittura la COSTANTE $y = 1$. Ricapitolando, avremo

Ipotesi: $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$

Tesi: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \infty$

(in pratica, dimostreremo così che “se una funzione tende a 0, il suo reciproco tende a infinito”)

Dobbiamo dunque far vedere che

$$\forall M > 0 \exists I_c / x \in I_c - \{c\} \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} \right| > M$$

(dove la specificazione $-\{c\}$ è da omettersi nel caso c sia infinito).

Fissiamo perciò un $M > 0$ e passiamo a considerare il numero $\frac{1}{M}$.

In corrispondenza di questo numero positivo, per l'ipotesi $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$,

esisterà un intorno I_c per ogni x del quale (escluso tutt'al più $x = c$, nel caso c sia finito) si abbia

$$-\frac{1}{M} < g(x) < \frac{1}{M}$$

ovvero

$$|g(x)| < \frac{1}{M}.$$

Ma da questa relazione si trae, passando ai reciproci (NOTA)

$$\frac{1}{|g(x)|} > M.$$

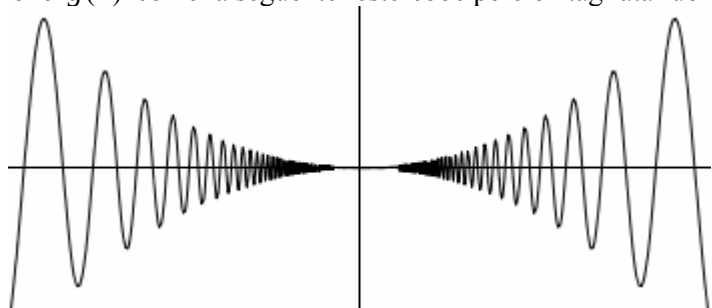
Ricapitolando, abbiamo provato che, comunque si fissi $M > 0$, esiste un intorno di c per ogni x del quale, escluso tutt'al più il punto c se c è un'ascissa finita, vale la disuguaglianza

$$\frac{1}{|g(x)|} = \left| \frac{1}{g(x)} \right| > M.$$

Ma ciò dimostra, appunto, la tesi.

NOTA

Per poter effettuare questo passaggio ai reciproci, sembra di dover supporre verificata un'ipotesi supplementare, ossia che esista tutto un intorno di c nel quale (fatta eccezione al più per il punto c , se c è un'ascissa finita) la $g(x)$ non si annulli mai. Una funzione $g(x)$ come la seguente resterebbe perciò "tagliata fuori".



D'altra parte, se in qualsivoglia intorno di c la $g(x)$ si annullasse almeno una volta fuori dal punto c , la funzione reciproca $1/g(x)$ avrebbe un dominio tutto "bucherellato" e in questa situazione inconsueta parlare di " $x \rightarrow c$ " non sarebbe più lecito, a meno di introdurre nella definizione di limite un ritocco che apporti una maggiore generalità alla definizione stessa. Di tale "ritocco" non riteniamo che sia qui il caso di occuparci; comunque, avvertiamo che il teorema in questione manterrebbe la sua validità anche in quell'ambito più generale.

Seconda parte)

Abbiamo fin qui fatto vedere che il teorema sintetizzato dalla pseudo-uguaglianza $\frac{1}{0} = \infty$

vale nel caso particolare che la funzione a numeratore sia la costante 1.

E' ora facile estendere la dimostrazione anche al caso più generale,

se si tiene conto dell'identità $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$

e del teorema, già acquisito precedentemente, sintetizzato dalla pseudo-uguaglianza $\ell \cdot \infty = \infty$

41) Il Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTONE:

Sia f una funzione monotona crescente, in senso stretto o in senso lato, su tutto un intervallo (a, b) .

Allora esistono certamente i

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

e tali limiti sono uguali rispettivamente all'estremo inferiore (finito o infinito che sia) e all'estremo superiore (finito o infinito che sia) dell'insieme dei valori assunti dalla $f(x)$ nell'intervallo (a, b) .

Brevemente:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

(Proposizione gemella):

Sia f una funzione monotona decrescente, in senso stretto o in senso lato, su tutto un intervallo (a, b) .

Allora esistono certamente i

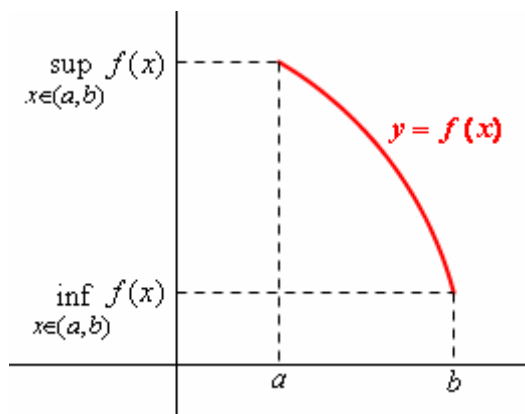
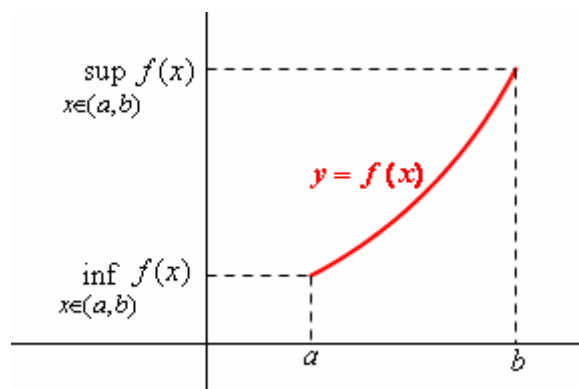
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

e tali limiti sono uguali rispettivamente all'estremo superiore (finito o infinito che sia) e all'estremo inferiore (finito o infinito che sia) dell'insieme dei valori assunti dalla $f(x)$ nell'intervallo (a, b) .

Brevemente:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$$

**OSSERVAZIONI**

- Si può dimostrare che il teorema vale anche per intervalli illimitati verso sinistra o/e verso destra.
- Vale anche un enunciato analogo per le successioni (“Teorema di esistenza del limite delle successioni monotone”)

Sull'aggettivo “monotona” riferito a una funzione l'accento è sulla penultima sillaba.

Si può anche scrivere “monotona” senza esplicitare l'accento, che comunque, quando si legge, va sempre messo al posto giusto.

Non esistono
funzioni
“monòtone”,
anche se qualcuno
potrebbe sostenere
l'esatto contrario!



□ **Dimostrazione del Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone**

Limitiamoci a dimostrare che se f è monotona crescente su (a, b) , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

(le altre proposizioni avranno dimostrazioni perfettamente analoghe)

Interpretiamo “crescente” come “crescente in senso lato”;

in questo modo, data la maggiore generalità della condizione,

la validità della dimostrazione si estenderà automaticamente anche alle funzioni strettamente crescenti.

Supponiamo inoltre che $\sup_{x \in (a, b)} f(x)$ sia finito (ne indicheremo il valore con S);

nel caso fosse infinito, la dimostrazione subirebbe qualche modifica del tutto prevedibile, che lasciamo al lettore.

Dunque:

- la nostra ipotesi è: f monotona crescente su (a, b)
- la nostra tesi è: $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = S$, con $S = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$
- supponiamo inoltre che S sia finito.

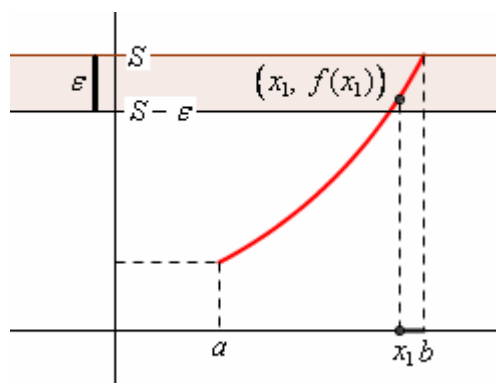
Dobbiamo quindi dimostrare che, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$,

esiste un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $b - \delta < x < b$, allora $S - \varepsilon < f(x) \leq S$.

Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$.

Poiché S è l'estremo superiore dell'insieme $H = f((a, b))$ dei valori che la $f(x)$ assume su (a, b) , nell'intervallo $(S - \varepsilon, S]$ esisterà certamente un elemento di H , ossia:

esisterà certamente su (a, b) un x_1 tale che $S - \varepsilon < f(x_1) \leq S$



La chiave della dimostrazione sta nel fatto che deve necessariamente esistere un x_1 per cui $S - \varepsilon < f(x_1) \leq S$, dopodiché tutti gli x compresi fra x_1 e b per forza saranno anch'essi tali che $S - \varepsilon < f(x) \leq S$

Ora, essendo la funzione f crescente su tutto (a, b) ,

ed essendo S l'estremo superiore dei valori assunti dalla f su (a, b) ,

se prendiamo un qualunque x tale che

$$x_1 < x < b,$$

per quell' x si avrà

$$S - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq S.$$

Dunque la disuguaglianza

$$S - \varepsilon < f(x) \leq S$$

è verificata per tutti gli x dell'intervallo $(b - \delta, b)$, essendo $\delta = b - x_1$

C.V.D.

10. FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO

$$f \text{ continua in } x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

oppure:

$$f \text{ continua in } x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Il concetto è veramente fondamentale e quindi andiamo ad analizzarlo nei dettagli.

Dunque una funzione è continua in un punto x_0 se e solo se, per definizione:

- è definita in x_0
- tende a limite, per x che tende a x_0 ;
- tale limite coincide col valore che la funzione assume con $x = x_0$

Possiamo anche dire che

$$f \text{ continua in } x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \text{esistono sia } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ che } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ e sono entrambi uguali a } f(x_0)$$

Diciamo che per le funzioni che si utilizzano più frequentemente (ottenute operando in svariati modi su funzioni algebriche, goniometriche, logaritmiche, esponenziali ...) la continuità è “la norma”, mentre la discontinuità è “l’eccezione”.

Per questo motivo, il concetto di continuità si comprende meglio attraverso i CONTROesempi, cioè gli esempi di DIScontinuità.

I TRE TIPI DI DISCONTINUITÀ

Si ha una **discontinuità di 1^a specie o di tipo “salto”**

quando esistono, al tendere di x a x_0 , sia il limite sinistro che il limite destro, e sono entrambi finiti, ma sono diversi fra loro, cosicché nell’attraversamento dell’ascissa x_0 si ha, appunto, un “salto”, uguale alla differenza fra il limite destro e quello sinistro.

Esempi:

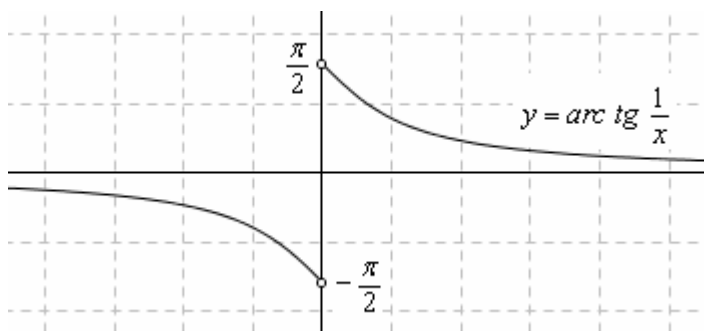
$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

Questa funzione $f(x)$

ha una discontinuità di 1^a specie, o di tipo “salto”, in $x_0 = 0$, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Il salto vale dunque } \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



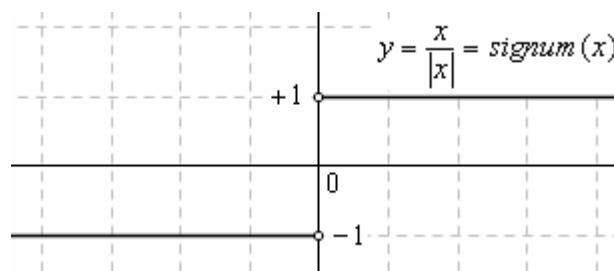
$$g(x) = \frac{x}{|x|} = \text{signum}(x)$$

Questa funzione $g(x)$

ha una discontinuità di 1^a specie, o di tipo “salto”, in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +1$$

Il salto della $g(x)$ nell’origine vale 2



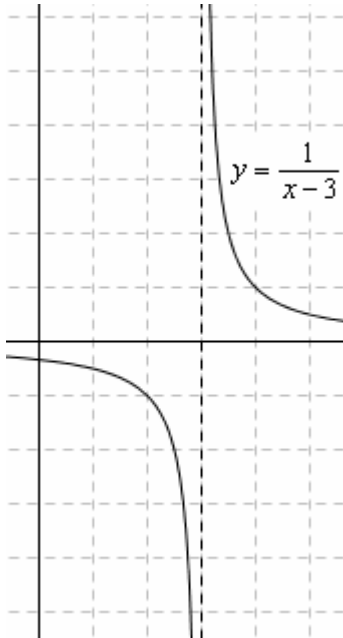
Si ha una **discontinuità di 2^a specie**

quando, al tendere di x a x_0 , almeno uno fra i due limiti sinistro e destro o non esiste, oppure esiste ma è infinito.

Esempi:

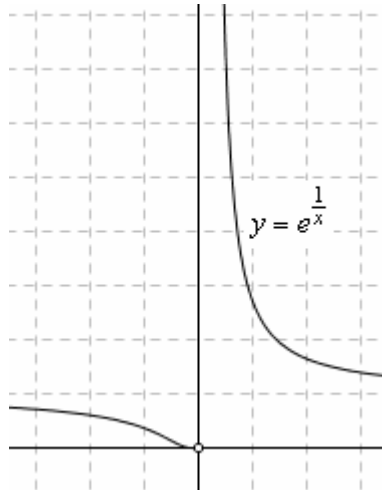
$$y = \frac{1}{x-3}$$

ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 3$
(limiti sinistro e destro infiniti)



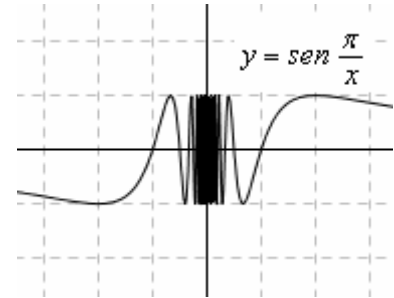
$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 0$
(il limite destro è infinito)



$$y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 0$
(il limite non esiste)



Si ha una **discontinuità di 3^a specie (discontinuità di tipo “buco”, discontinuità “eliminabile”)**

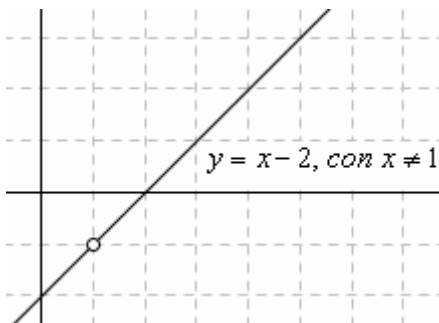
quando, al tendere di x a x_0 ,
la funzione tende ad un limite finito $\ell \in \mathbb{R}$,
che però non coincide con $f(x_0)$,

- o per il fatto che $f(x_0) \neq \ell$
- oppure per il fatto che $f(x_0)$ non esiste, cioè la funzione non è definita in x_0 .

Esempi:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2, \text{ ma con } x \neq 1$$

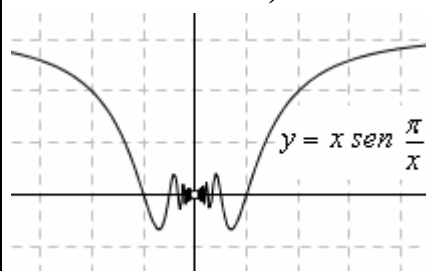
(“retta col buco”:
discontinuità di 3^a specie
in $x = 1$)



$$h(x) = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0,$$

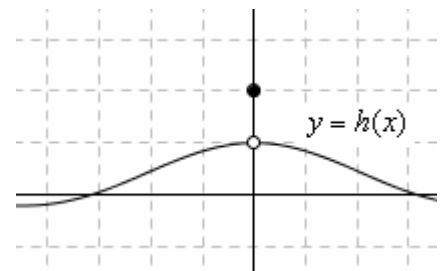
ma $h(0)$ non esiste
(discontinuità di 3^a specie
in $x = 0$)



$$s(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{con } x \neq 0 \\ 2 & \text{con } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 1,$$

$$\text{ma } s(0) = 2$$



DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN INSIEME

Una funzione $y = f(x)$ si dice continua in un insieme E (o “su di un insieme E ”),
se è continua in ogni punto di E .

CONTINUITÀ SUL LORO DOMINIO DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Sono continue su tutto il loro dominio (= in tutti i punti del loro dominio) le seguenti funzioni: (qualche dimostrazione è riportata più avanti, le altre dimostrazioni sono omesse)	
funzione	dominio
$f(x) = k$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ con $P_i(x)$ polinomi	$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } P_2(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$D = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
$f(x) = \sin x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$D = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$D = \mathbb{R} - \{k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \arcsin x$	$D = [-1, 1]; \text{ valori in } [-\pi/2, \pi/2]$
$f(x) = \arccos x$	$D = [-1, 1]; \text{ valori in } [0, \pi]$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$D = (-\infty, +\infty); \text{ valori in } (-\pi/2, \pi/2)$
$f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$D = (-\infty, +\infty); \text{ valori in } (0, \pi)$
$f(x) = a^x$ con $a > 0$, in particolare $y = e^x$	$D = \mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$ con $a > 0, a \neq 1$, in particolare $y = \ln x$	$D = (0, +\infty)$

DIMOSTRAZIONE DELLA CONTINUITÀ DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Osservazione preliminare: poiché f continua in $x_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

per dimostrare che una data funzione $f(x)$ è continua in x_0 si imposterà la disequazione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di x_0

(come abbiamo già più volte sottolineato, non è necessario che l'intorno trovato sia circolare, perché, comunque, qualsiasi intorno di un punto contiene sempre un intorno circolare di quel punto)

- **Dimostriamo che la funzione costante $f(x) = k$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$**

La tesi è: $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Osservazione: il contenuto del teorema è molto banale: ce ne scusiamo col lettore.

Dimostrazione

Consideriamo un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$. Impostiamo la disequazione: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per stabilire da quali valori di x è verificata. Essa diventa, nella fattispecie: $|k - k| < \varepsilon$ e ci rendiamo immediatamente conto che è verificata qualunque fosse l' x considerato in partenza, vale a dire su tutto $\mathbb{R}$; quindi la disequazione posta è verificata su tutto un intorno di x_0 .

- **Dimostriamo che la funzione identica $f(x) = x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$**

Tesi: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Osservazione: anche questo teorema invoca indulgenza per la banalità del suo contenuto.

Dimostrazione

Consideriamo un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$. Impostiamo la disequazione: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Essa diventa, nella fattispecie: $|x - x_0| < \varepsilon$ ed è verificata per $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, che è un intorno di x_0 . In pratica, il $\delta = \delta(\varepsilon)$ può essere preso uguale a ε (o, a maggior ragione, $< \varepsilon$).

- Una funzione polinomiale $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$,

cioè: $\lim_{x \rightarrow x_0} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n$

Dim. Conseguenza di teoremi precedenti:

- ✓ la funzione identica $f(x) = x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k\ell \quad (\ell, k \in \mathbb{R})$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \ell^n \quad (n \in \mathbb{N}^*, \ell \in \mathbb{R})$
- ✓ il limite di una somma algebrica di più funzioni è uguale alla somma dei limiti, supposto che tutti questi limiti esistano e siano finiti
- ✓ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + k] = \ell + k, \ell, k \in \mathbb{R}$

- Dimostriamo che una funzione algebrica razionale fratta $f(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ con $P_i(x)$ polinomi,

è continua su tutto il suo dominio (che è poi l'insieme degli x_0 che non annullano il denominatore $P_2(x)$)

Dim. Conseguenza di teoremi precedenti:

- ✓ una funzione polinomiale $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$
- ✓ il limite del quoziente di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti (supposto che entrambi esistano e siano finiti, e che il limite della funzione a denom. sia $\neq 0$).

- Dimostriamo che la funzione “seno” $f(x) = \sin x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

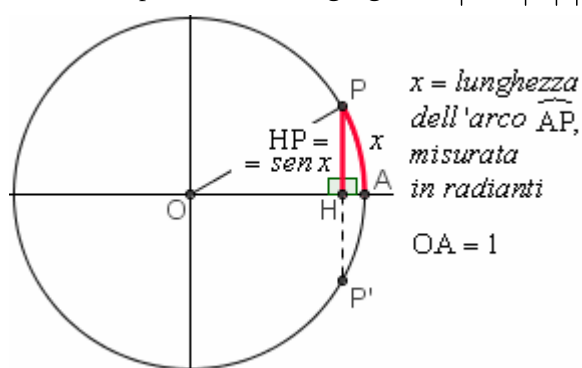
Per la dimostrazione, occorre preliminarmente provare che: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

a) Dimostriamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Vogliamo far vedere che la disequazione $|\sin x - 0| < \varepsilon$ (ossia $|\sin x| < \varepsilon$), con ε numero positivo arbitrariamente prefissato, è verificata in tutto un intorno dell'ascissa $x_0 = 0$. Ma osserviamo la figura qui sotto: essa ci mostra che risulta sempre $|\sin x| < |x|$ quindi, qualora si abbia $|x| < \varepsilon$, cioè: qualora x appartenga all'intorno di centro $x_0 = 0$ e raggio $\delta = \varepsilon$, è certamente, a maggior ragione, $|\sin x| < \varepsilon$.

La tesi è dimostrata: insomma, in corrispondenza di qualsivoglia $\varepsilon > 0$ prefissato, il $\delta = \delta(\varepsilon)$ che va bene esiste: basta prendere $\delta = \varepsilon$ (o $\delta < \varepsilon$).

NOTA: a partire dalla disuguaglianza $|\sin x| < |x|$, avremmo potuto anche utilizzare il “2° teorema del confronto”



x è la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$, misurato in radianti;
 $\sin x$ è la misura del segmento HP .

Il segmento PP' è più corto dell'arco che va da P a P' (questa disuguaglianza, ovvia all'intuizione, può essere comunque dedotta dalla def. di lunghezza di una curva, la quale porta con sé come conseguenza il fatto che “fra tutti i cammini che congiungono due punti, quello rettilineo è il più breve”).

Quindi $2 \sin x < 2x$ da cui $\sin x < x$.

Abbiamo supposto, per semplicità, $x > 0$; se il segno di x è arbitrario, vale invece la relazione $|\sin x| < |x|$

b) In quanto al limite $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, esso si può dedurre da $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

tenendo conto delle formule goniometriche e di teoremi sui limiti, già acquisiti.

BENE! Siamo a questo punto finalmente pronti per la dimostrazione del nostro asserto:

“la funzione “seno” $f(x) = \sin x$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ”.

Poniamo la tesi sotto la forma $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$. Provare questa relazione è ora semplicissimo ...

... basterà infatti combinare la formula di addizione $\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$ coi risultati precedenti $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, applicati con h al posto di x .

OPERAZIONI CON FUNZIONI CONTINUE

Dai teoremi sui limiti e dalla definizione di continuità segue che:

La somma, la differenza, il prodotto di due funzioni continue in uno stesso punto x_0 sono pure funzioni continue in x_0

$$f, g \text{ continue in } x_0 \Rightarrow f + g, f - g, f \cdot g \text{ continue in } x_0$$

La potenza con esponente intero positivo di una funzione continua in x_0 è pure una funzione continua in x_0

$$f \text{ continua in } x_0 \Rightarrow [f(x)]^n \text{ continua in } x_0 \quad (n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\})$$

Il quoziente di due funzioni continue in x_0 è pure una funzione continua in x_0 , purché la funzione a divisore non si annulli in x_0

$$f, g \text{ continue in } x_0 \text{ e } g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ continua in } x_0$$

Il valore assoluto di una funzione continua in x_0 è pure una funzione continua in x_0

$$f \text{ continua in } x_0 \Rightarrow |f(x)| \text{ continua in } x_0$$

L'INVERSA DI UNA FUNZIONE CONTINUA

Si può inoltre dimostrare (noi ci limitiamo ad enunciarlo) il seguente

Teorema sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua:

SE una funzione $f(x)$ è continua su di un insieme E , ed è invertibile su E ,

ALLORA la sua funzione inversa f^{-1} è continua sull'insieme $f(E)$

(col simbolo $f(E)$ si indica l'insieme delle immagini dei punti di E , attraverso la f).

La continuità, su tutto il loro dominio, delle inverse delle funzioni circolari

(si dice anche: “funzioni goniometriche inverse”):

$\text{arc sen } x$, $\text{arc cos } x$, $\text{arc tg } x$, $\text{arc cotg } x$,

può essere considerata come conseguenza del precedente Teorema sulla continuità della funzione inversa, essendo stata preliminarmente provata la continuità delle rispettive funzioni dirette $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\text{tg } x$, $\text{cotg } x$.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI, E IN PARTICOLARE DI FUNZIONI CONTINUE

Resta da considerare la cosiddetta COMPOSIZIONE DI FUNZIONI.

Ce ne siamo occupati in un paragrafo apposito del capitolo “Verso l'analisi”;

ricapitoliamo qui il succo del discorso.

Esempi di funzioni composte sono:

$$y = \cos 3x, \quad y = e^{\text{sen } x}, \quad y = \ln^2 x = (\ln x)^2, \quad y = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|, \quad y = \sqrt{x^2 - x - 6}$$

Prendendo, ad esempio $y = \cos 3x$, si vede che in essa ci sono due “componenti”:

la funzione “triplo”, che da x fa passare a $3x$; e la funzione “coseno”, che da questo $3x$ ci porta a $\cos 3x$.

$$x \xrightarrow{3(*)} 3x \xrightarrow{\cos(*)} \cos 3x$$

Il generale, applicando a x prima una funzione g e poi al risultato così ottenuto una seconda funzione f , si ha:

$$x \xrightarrow{g(*)} g(x) \xrightarrow{f(*)} f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

IMPORTANTE: LA FUNZIONE CHE È STATA APPLICATA PER ULTIMA VIENE SCRITTA PER PRIMA!

Chiamando z il numero intermedio si avrà:

$$x \xrightarrow{g(*)} z = g(x) \xrightarrow{f(*)} y = f(z) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Se le due funzioni componenti $z = g(x)$, $y = f(z)$ sono tali che:

g è continua in un dato punto x , e f è a sua volta continua in quel punto z , tale che $z = g(x)$,

cosicché in qualche modo le due continuità si “saldino”, ci possiamo domandare:

sarà certamente continua (nel punto x) anche la funzione composta $y = f(z) = f(g(x))$?

La risposta (affermativa), è discussa nelle impegnative pagine seguenti,

le quali giustificano anche i procedimenti di “sostituzione” (“implicita” od “esplicita”)

ai quali spesso occorre fare ricorso nel calcolo di un limite.

SOSTITUZIONE DI VARIABILE NELL'AMBITO DEL CALCOLO DI UN LIMITE

Obiettivo di questo paragrafo è di dimostrare che, eseguendo esercizi sui limiti, è corretto effettuare “sostituzioni di variabile”, esplicite o implicite, come negli esempi seguenti:

Sostituzione implicita: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin 5x}^{0}}{\underbrace{5x}_{\rightarrow 0}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{\overbrace{x}^{0+}}{x^2 + 1} = -\infty$

Sostituzione esplicita: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 & (5x = z; \text{ quando } x \rightarrow 0 \text{ anche } z \rightarrow 0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \ln z = -\infty & \left(\frac{x}{x^2 + 1} = z; \text{ quando } x \rightarrow +\infty, z \rightarrow 0^+ \right) \end{cases}$

Ciò si riassume dicendo che:

“se la funzione f di cui vogliamo calcolare il limite dipende, a sua volta, da una funzione $g(x)$ che, quando x tende a c , tende ad un limite ℓ (finito o infinito), possiamo comportarci come se avessimo, al posto di $g(x)$, una variabile indipendente z tendente a ℓ ”

Vale infatti il seguente rilevante Teorema:

TEOREMA SUL LIMITE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA, O “TEOREMA DI SOSTITUZIONE”
(i simboli c, ℓ, L potranno indicare un numero finito, oppure $+\infty$, o $-\infty$, o ∞)

Supponiamo di voler calcolare il $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x))$.

Supponiamo inoltre che siano verificate le seguenti due ipotesi: I. $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$ II. $\lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = L$

Allora avremo (TESI): $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = \lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = L$

Dimostrazione

La tesi è che $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = L$, cioè che $\forall I_L \exists I_c$ tale che $x \in I_c - \{c\} \rightarrow f(g(x)) \in I_L$.

Fissiamo dunque, ad arbitrio, un $\bar{I}_L$. Per l'ipotesi II), in corrispondenza di questo $\bar{I}_L$ esisterà un $\bar{I}_\ell$ tale che

$$(*) \quad z \in \bar{I}_\ell - \{\ell\} \rightarrow f(z) \in \bar{I}_L$$

Per l'ipotesi I), in corrispondenza di questo $\bar{I}_\ell$ esisterà poi un $\bar{I}_c$ tale che

$$(**) \quad x \in \bar{I}_c - \{c\} \rightarrow g(x) \in \bar{I}_\ell$$

Ci rendiamo ora conto di una difficoltà.

(**) ci dice che la funzione g (quella che viene applicata per prima), quando opera sugli x di $\bar{I}_c - \{c\}$, genera valori che stanno in $\bar{I}_\ell$;

(*) afferma che quando la funzione f opera su valori che stanno in $\bar{I}_\ell$, genera valori che stanno in $\bar{I}_L$

CON UNA POSSIBILE ECCEZIONE:

quando $z = \ell$, il valore $f(z)$ potrebbe anche
a) non esistere oppure b) stare FUORI da $\bar{I}_L$.

Se non intervenisse questa possibile eccezione, la tesi sarebbe dimostrata, e $\bar{I}_c$ sarebbe l'intorno di c di cui si voleva provare l'esistenza.

abbiamo scoperto che, per assicurare la validità della tesi, OCCORRE UN'IPOTESI SUPPLEMENTARE, ossia che

III. esista un intorno J_c di c , per ogni x del quale (escluso, tutt'al più, c), sia certamente $g(x) \neq \ell$

Se, dunque, vale l'ipotesi supplementare III, avremo che

per ogni x di $\bar{I}_c \cap J_c - \{c\}$ risulterà contemporaneamente $g(x) \in \bar{I}_\ell$ e $x \in J_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \neq \ell$, ossia

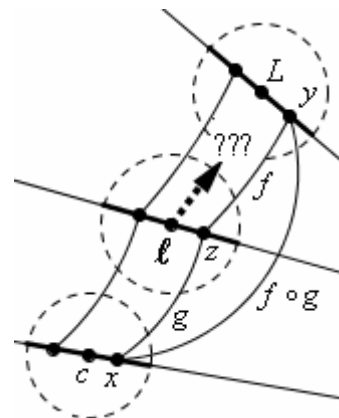
(***) $x \in \bar{I}_c \cap J_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \in \bar{I}_\ell - \{\ell\}$.

Quindi avremo, combinando (***) con (*),

$$x \in \bar{I}_c \cap J_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \in \bar{I}_\ell - \{\ell\} \Rightarrow f(g(x)) \in \bar{I}_L.$$

In corrispondenza dell' $\bar{I}_L$ arbitrariamente fissato, si è quindi provato che esiste un intorno di c (si tratta di $\bar{I}_c \cap J_c$) per ogni x del quale, eccettuato al più $x = c$ se c è finito, risulta $f(g(x)) \in \bar{I}_L$.

La tesi è dimostrata. Ma C'È STATO BISOGNO DELL'IPOTESI SUPPLEMENTARE III.



OSSERVAZIONE 1: la scarsa incidenza dell'ipotesi supplementare

E' pur vero che questa ipotesi supplementare è quasi sempre verificata, a meno di andare a scomodare situazioni particolarissime.

Consideriamo ad esempio la funzione

$$g(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} + 4.$$

Essa è tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4 = \ell.$$

Osserviamo che $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ assume, in qualsiasi intorno dell'ascissa $c = 0$, infinite volte il valore 0 e quindi $g(x)$ assume, in qualsiasi intorno dell'ascissa $c = 0$, infinite volte il valore 4.

Consideriamo poi la funzione

$$f(z) = \begin{cases} 50 & \text{con } z \neq 4 \\ 100 & \text{con } z = 4 \end{cases}$$

Avremo

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(z) = 50 = L$$

ma

$$f(4) = 100.$$

Se ora noi costruiamo la funzione composta $f(g(x))$, vediamo che essa assume, in ogni intorno di $c = 0$, infinite volte il valore 50 e infinite volte il valore 100, quindi non tenderà a nessun limite se facciamo tendere x a 0.

NON è quindi verificata la tesi del Teorema, ossia

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = L,$$

per il fatto che il teorema stesso non è applicabile, non valendo l'ipotesi supplementare III.

Ma che funzione strana abbiamo dovuto chiamare in causa per poter costruire questo controesempio!

Osserviamo ancora che, nel caso ℓ sia infinito,
il problema dell'ipotesi supplementare semplicemente non si pone.

OSSERVAZIONE 2: l'ipotesi supplementare è superflua se f è continua in ℓ .

Possiamo fare anche un'altra osservazione.

Abbiamo avuto bisogno dell'ipotesi supplementare **III** quando ci siamo accorti che mancavano del tutto, nell'ipotesi originaria del teorema, condizioni sul comportamento della funzione $f(z)$ IN $z = \ell$; il valore $f(\ell)$ poteva anche

- a) non esistere
- b) esistere ma non coincidere con L ..

Queste due circostanze avrebbero portato il valore $f(g(x))$, nel caso fosse $g(x) = \ell$, rispettivamente

- a) a non esistere
- b) a collocarsi, purché $\bar{I}_L$ venisse preso sufficientemente piccolo, FUORI dall'intorno $\bar{I}_L$, anche qualora il punto x tale che $g(x) = \ell$ appartenesse a $\bar{I}_c - \{c\}$.

Se però $\ell \in \mathbb{R}$ e $f(z)$ è CONTINUA in $z = \ell$, allora si ha

$$L = \lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = f(\ell)$$

e il valore $f(\ell)$ esiste ed è automaticamente contenuto in qualsiasi intorno di L , quindi non "rischia" più di non esistere, né di stare al di fuori dell'intorno $\bar{I}_L$.

In definitiva:

**l'ipotesi supplementare III è del tutto superflua nel caso
 ℓ sia un valore finito e la funzione f sia continua in ℓ .**

COROLLARIO 1

**SE la funzione $g(x)$ è continua in x_0 e la funzione $f(z)$ è continua in $g(x_0)$,
ALLORA la funzione composta $f(g(x))$ è continua in x_0 .**

Dimostrazione

Infatti, sotto le predette ipotesi di continuità, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \wedge \lim_{z \rightarrow g(x_0)} f(z) = f(g(x_0))$$

e ciò implica, per il Teorema sul Limite di una Funzione Composta appena dimostrato (la cui applicazione, data la continuità di f , non richiede l'ipotesi supplementare III),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

ossia la continuità in x_0 della funzione composta $f(g(x))$.

Potremmo ricordare più facilmente questo importante Corollario enunciandolo nel modo seguente, piuttosto vago ma utile, appunto, per tenere a mente il concetto:

la funzione ottenuta componendo due funzioni continue è ancora una funzione continua.

OSSERVAZIONE 3 (uno “slogan” importante!)

Se $\ell \in \mathbb{R}$ e una funzione f è CONTINUA in ℓ , cioè $\lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = f(\ell)$,

allora, presa una qualsivoglia funzione $g(x)$ tale che $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$, il Teorema di Sostituzione (senza bisogno dell' “ipotesi supplementare”, data la continuità della f in ℓ) ci assicura che

$$\lim_{x \rightarrow c} f\left(\underbrace{g(x)}_{\ell}\right) = f(\ell) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) \quad \text{e, compattando la scrittura,} \quad (*) \quad \lim_{x \rightarrow c} f\left(\underbrace{g(x)}_{\ell}\right) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right)$$

il che autorizza a formulare il seguente “slogan” (vago, ma efficace):

**le funzioni continue sono tutte e sole quelle funzioni per le quali il simbolo di limite
si può portare da “fuori” a “dentro” il simbolo di funzione, e viceversa.**

La frasetta dev'essere utilizzata come un rimando all'uguaglianza (*): insomma,

lo “slogan” condensa l'affermazione che

**“una funzione f è continua in un punto $\ell \in \mathbb{R}$ se e solo se per la f
vale l'uguaglianza (1), comunque si prenda una funzione g che tende a ℓ ” (NOTA).**

La proposizione si ricorda bene se si pensa che generalizza l'ovvia biimplicazione seguente:

$$f \text{ continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

NOTA: abbiamo appena fatto vedere che, se f è continua in ℓ ,

allora, qualunque sia la funzione $g(x)$ tendente a ℓ , vale la (1);

se, viceversa, per una data funzione f vale la (1) qualunque sia la funzione $g(x)$ tendente a ℓ ,

allora, preso il caso particolare $g(x) = x$, e facendo tendere x a $c = \ell$ (da cui $g(x) = x \rightarrow \ell$), avremo

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow \ell} x\right) = f(\ell)$$

quindi la f sarà continua in ℓ .

COROLLARIO 2

Una funzione della forma $F(x) = [f(x)]^{g(x)}$,

se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue ciascuna sul proprio dominio, è continua sul suo dominio; in particolare, una potenza ad esponente irrazionale x^r ($r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) è una funzione continua su tutto il suo dominio.

Dimostrazione

Immediatamente deducibile dal Teorema sul Limite della Funzione Composta utilizzando l'identità

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

e tenendo presenti teoremi già acquisiti, in particolare la continuità della funzione logaritmica.

11. LIMITI DI FUNZIONI ALGEBRICHE (=POLINOMI, RAPPORTI DI POLINOMI, RADICALI)

La **definizione generale di “funzione algebrica”** non è semplicissima, e non vogliamo occuparcene qui.

Comunque, sono **“algebriche”**, fra l'altro, tutte le funzioni nella cui espressione compaiono esclusivamente operazioni **“algebriche”** ossia **addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, potenze, radici**, mentre sono dette **“trascendenti”** le funzioni costruite attraverso **logaritmi, esponenziali, funzioni goniometriche**.

Fra le **funzioni algebriche di utilizzo più comune** ci sono

- **i polinomi** (= funzioni algebriche razionali “interi”)
- **i rapporti di polinomi** (= funzioni algebriche razionali “fratte”, ossia “con la x a denominatore”)
- **le funzioni algebriche irrazionali**, ossia quelle nelle quali x compare almeno una volta sotto radice.

POLINOMI E RAPPORTI DI POLINOMI

Regola per il calcolo del limite di un polinomio, quando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

Alla tendenza di x a $+\infty$ o $-\infty$, un polinomio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ tende sempre all'INFINITO.

E per stabilire il *segno* di questo infinito, si può procedere in due modi:

- raccogliere x elevato all'esponente più alto
- considerare esclusivamente il comportamento del termine di grado massimo a_0x^n (occorrerà tenere conto del segno del coeff. e, qualora x tenda a $-\infty$, della parità o disparità dell'esponente)

$$\text{Infatti } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{x^n}_{\downarrow \infty} \left(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{x}}_{\downarrow 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{a_n}{x^n}}_{\downarrow 0} \right)$$

- Il contenuto della parentesi tende dunque ad a_0 ;
- il fattore esterno x^n tende a ∞ , precisamente: $\begin{cases} +\infty & \text{se } x \rightarrow +\infty \text{ oppure anche } x \rightarrow -\infty \text{ ma } n \text{ è pari;} \\ -\infty & \text{se } x \rightarrow -\infty \text{ e } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Il valore del limite

- a) sarà perciò infinito
- b) avrà un segno determinato da considerazioni molto elementari, illustrate dagli esempi che seguono
- c) coinciderà sempre con il valore di $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 + 5x^2 - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^3}_{\downarrow +\infty} \left(4 + \underbrace{\frac{5}{x}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\frac{7}{x^3}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende $\underbrace{4x^3}_{\downarrow +\infty}$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 + 5x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^4}_{\downarrow +\infty} \left(2 + \underbrace{\frac{5}{x}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende $\underbrace{2x^4}_{\downarrow +\infty}$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^3}_{\downarrow -\infty} \left(2 + \underbrace{\frac{5}{x}}_{\downarrow 0} \right) = -\infty$$

...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende $\underbrace{2x^3}_{\downarrow -\infty}$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3 + 12x^2 + 9x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^3}_{\downarrow -\infty} \left(-7 + \underbrace{\frac{12}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

...Anche semplicemente considerando il termine di grado più elevato $\underbrace{-7x^3}_{\downarrow -\infty}$

Regola per il calcolo del limite di un rapporto di polinomi, quando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

Il valore del $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$ può essere:

- se prevale il grado del numeratore: ∞ , con un segno determinato dalla “regola dei segni” applicata considerando soltanto i termini di grado massimo a numeratore e denominatore** (occorrerà tenere conto dei segni dei coefficienti e, qualora x tenda a $-\infty$, della parità o disparità della differenza fra gli esponenti)
- se prevale il grado del denominatore: 0**
- se num. e denom. hanno ugual grado: $\frac{a_0}{b_0}$ (= rapporto tra i coeff. dei due termini di grado massimo)**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m} \right)} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} =$$

$$= \frac{a_0}{b_0} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

NOTA : entro ciascuna parentesi,
tutti i termini, tranne il primo,
sono "evanescenti" (= tendenti a 0)

Più ancora della catena sopra riportata, ti saranno da guida i seguenti esempi.

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + x}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{\overbrace{3x^5}^{+\infty} - \overbrace{x^2}^{+\infty} + \overbrace{x}^{+\infty}}^{+\infty}}{\underbrace{\overbrace{4x^3}^{+\infty} - \overbrace{1}^{+\infty}}^{+\infty}} = +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{2x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\overbrace{5 + \frac{3}{x}}^5 \right)}{\cancel{x} \underbrace{\left(\overbrace{2 - \frac{1}{x^2}}^{+\infty} \right)}_{+\infty}} = 0^+$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{x^2}}_{\downarrow 1} \right)}{\underbrace{\cancel{x^2}}_{-\infty}} = 0^-$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\overbrace{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}^3 \right)}{\cancel{x^2} \underbrace{\left(\overbrace{2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}^2 \right)}_{\downarrow 2}} = \frac{3}{2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2}{12 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} \left(\overbrace{2 + \frac{1}{x}}^2 \right)}{\cancel{x^3} \underbrace{\left(\frac{12}{x^3} - 1 \right)}_{\downarrow -1}} = -2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - 6}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\overbrace{7 - \frac{6}{x^2}}^7 \right)}{\underbrace{\cancel{x^3}}_{-\infty}} = 0^-$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 5x}{6x^4 - x^2 + 10} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Immediatamente, con la regola!

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 8}{x^2 - x + 2} = 0^+$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 + x} = -\infty$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x + 2} = 0^-$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = +\infty$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$16) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^2}{5 + x^2} = -1$$

Immediatamente, con la regola!

Regola per il calcolo del limite di un rapporto di polinomi, quando $x \rightarrow x_0$

In questo caso, il calcolo del limite

è immediato ogniqualvolta, sostituendo x_0 al posto di x , il denominatore sia diverso da 0.

Se poi con $x = x_0$ si annulla soltanto il denominatore, il limite è infinito

e per stabilire il segno di questo infinito si dovrà generalmente distinguere fra limite sinistro e destro; a tale scopo, sarà di norma conveniente scomporre in fattori il denominatore, se è di grado sup. al 1°.

Ma può, eccezionalmente, presentarsi una Forma di Indecisione:

ciò avviene nel caso in cui, con $x = x_0$, si annullino contemporaneamente sia il num. che il denom.:

$$A(x_0) = B(x_0) = 0.$$

Quando accade ciò, compare una F.I. [0/0], che si scioglie sempre per **scomposizione e semplificazione**. Infatti:

- essendo $A(x_0) = 0$, per il Teorema del Resto il polinomio $A(x)$ è divisibile per il binomio $(x - x_0)$ e quindi è scomponibile in un prodotto della forma $(x - x_0)A_1(x)$
- ed essendo $B(x_0) = 0$, per il Teorema del Resto il polinomio $B(x)$ è divisibile per il binomio $(x - x_0)$ e quindi è scomponibile in un prodotto della forma $(x - x_0)B_1(x)$

... cosicché si avrà $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{(x - x_0)A_1(x)}{(x - x_0)B_1(x)}$ con la possibilità di semplificare per $(x - x_0)$.

Qualche esempio dei vari tipi:

$$17) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{x - 1} = \frac{9 + 4}{3 - 1} = \frac{13}{2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{(x - 1)^2} = +\infty$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4x + 3} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 4}{(x - 3)(x - 1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 4}{(x - 3)(x - 1)} &= +\infty \end{aligned}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x + 6)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)(x^2 + x + 2)} = \frac{1}{14}$$

RUFFINI

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 3x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 5)(x - 1)}{(x - 1)^3} = -\infty$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} = \infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow \sqrt{2}^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow \sqrt{2}^- \end{cases}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} = 0$$

$$25) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x + 5)(x - 5)}{(x + 5)^2} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x - 5}{x + 5} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x - 5}{x + 5} &= -\infty \end{aligned}$$

INDICAZIONE GENERALE SULLE FORME DI INDECISIONE FIN QUI VISTE



Diciamo che, in linea di principio,
**le forme di indecisione $[\infty - \infty]$ e $[\infty/\infty]$ si affrontano
 “raccolgendo il termine di esponente maggiore
 o, comunque, quello che tende a infinito più rapidamente”,
 mentre per le forme di indecisione $[0/0]$
 “si va a cercare una semplificazione”, attraverso fattorizzazioni, o razionalizzazioni,
 o previa moltiplicazione di numeratore e denominatore per una stessa espressione.
 Naturalmente, nella pratica si terrà sempre conto di **limiti noti già studiati in passato.****

ESERCIZI (... quasi tutti, anche se non tutti, portano Forme di Indecisione ...)

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 25x}{4x^2 + x - 1}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x - 1}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{7x^3 + 6x^2 + 5x + 4}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 6x^3}{3x^3 - 4x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 5x - 3}{-11x^3 + 13x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 14}{x^3}$ 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 9x + 18}{x^2 - x - 2}$ 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^5}$ 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4}{3 + 5x}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4 + x^2 + 1}$ 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 3}$ 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x^2}{x^2 + 3x}$ 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 5} - \frac{x^2}{x + 2} \right)$ 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4}{x - 2}}{x^2 + 7}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{3x - 15}$ 16) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + x - 12}$ 17) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$ 18) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x}{x^2 - 16}$ 19) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{6x^2 - x - 1}$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 2x}$ 21) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2 + 6x}{9x^3 - x}$ 22) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 - 21}{4x + 12} - \frac{x}{x + 3} \right)$ 23) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2}{x - 11}$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} \right)$ 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x^2 - 2x}$ 26) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3}{25 - x^2}$ 27) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x}$ 28) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3}$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ 30) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{(x + 3)^5}$ 31) $\lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{16x^2 - 8x + 1}{32x^2 - 2}$ 32) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^3 - 3x + 2}$
- 33) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$ 34) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 - x^2 - 2}$ 35) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 7x + 1}{x^2 + 7x}$ 36) $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{10x + 15}{4x^3 - 9x}$
- 37) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x}{(x - 8)^3}$ 38) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\pi - x}$ 39) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x}}{\frac{2x}{x^2} + 3}$ 40) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(10x - 19)^6}{x^6 - x^3 + 21}$ 41) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$

RISPOSTE

- 1) $\frac{3}{4}$ 2) 0^+ 3) $+\infty$ 4) -2 5) $+\infty$ 6) 0^- 7) 1 8) 0^+ 9) $-\infty$ 10) 0^- 11) $0 \begin{cases} 0^+ \text{ con } x \rightarrow +\infty \\ 0^- \text{ con } x \rightarrow -\infty \end{cases}$
- 12) -1 13) -3 14) $-\infty$ 15) $\frac{10}{3}$ 16) $-\frac{2}{7}$ 17) -1 18) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow -4^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow -4^- \end{cases}$ non era una F.I.! 19) $\frac{4}{5}$ 20) $\frac{11}{2}$
- 21) 3 22) $-\frac{5}{2}$ 23) -100 non era una F.I.! 24) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow 1^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow 1^- \end{cases}$ non era una F.I.! 25) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow 0^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow 0^- \end{cases}$ non era una F.I.!
- 26) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow 5^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow 5^- \end{cases}$ 27) 0 28) $\frac{1}{2}$ 29) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow 1^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow 1^- \end{cases}$ 30) $-\infty$
- 31) 0 32) 2 33) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow -3^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow -3^- \end{cases}$ 34) $\frac{1}{3}$ 35) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow -7^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow -7^- \end{cases}$
- 36) $\frac{5}{9}$ 37) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow 8^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow 8^- \end{cases}$ 38) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow \pi^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow \pi^- \end{cases}$ 39) $\frac{5}{3}$ 40) $1.000.000$ 41) $\frac{a}{c}$

FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $[\infty - \infty]$

$$26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt[4]{x}}_{+\infty} \right)$$

Abbiamo qui una F. I. $[(+\infty) - (+\infty)]$;

tuttavia, abbiamo fiducia che nel “conflitto” prevalga $\sqrt[3]{x}$ rispetto a $\sqrt[4]{x}$, perché la radice cubica, al tendere all’infinito del radicando, tende all’infinito più rapidamente rispetto alla radice quarta. Ci aspettiamo dunque che il limite valga $+\infty$.

Comunque, per maggiore sicurezza, possiamo procedere come abbiamo fatto nel caso dei polinomi, quando abbiamo raccolto x elevata all’esponente massimo:

essendo $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ e $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$, l’esponente massimo è $1/3$ e raccoglieremo quindi $\sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt[4]{x}}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^4}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(1 - \sqrt[12]{\frac{x^3}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{+\infty} \underbrace{\left(1 - \sqrt[12]{\frac{1}{x}} \right)}_0 = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{5\sqrt[7]{x^2}}_{+\infty} - \underbrace{2\sqrt[3]{x}}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x^{\frac{2}{7}} - 2x^{\frac{1}{3}} \right) \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left(5x^{\frac{2}{7} - \frac{1}{3}} - 2 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left(5x^{\frac{2}{7} - \frac{1}{3}} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^{\frac{1}{3}}}_{+\infty} \underbrace{\left(5x^{-\frac{1}{21}} - 2 \right)}_0 = -\infty \end{aligned}$$

NOTA 1

Qui siamo di fronte a un “polinomio con esponenti frazionari” e, siccome $2/7 < 1/3$, abbiamo fiducia che prevalga il termine $-2x^{1/3}$, trascinando il limite a $-\infty$. Comunque, per maggior sicurezza, procediamo raccogliendo x elevata all’esponente più alto.

$$28) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{4x}_{+\infty} \right) = +\infty \quad \text{Immediato: non si trattava di una Forma di Indecisione}$$

$$\begin{aligned} 29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{4x}_{+\infty} \right) &\stackrel{\text{NOTA 2}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - 4x \right) \stackrel{\text{NOTA 3}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 4x \right) \stackrel{\text{NOTA 4}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 4x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 4 \right)}_0 = -\infty \end{aligned}$$

NOTA 2: F.I. $[(+\infty) - (+\infty)]$

NOTA 3: Importantissimo ricordare che $\boxed{\sqrt{x^2 y} = |x| \sqrt{y}}$.

L’uguaglianza senza il valore assoluto, ossia la $\sqrt{x^2 y} = x \sqrt{y}$, sussiste soltanto quando si sa che è $x \geq 0$ (o quando si vogliono considerare solo valori di x che siano ≥ 0);

invece l’uguaglianza $\sqrt{x^2 y} = |x| \sqrt{y}$ è valida senza condizioni.

Noi, a dire il vero, nel passaggio successivo **scioglieremo** il valore assoluto, proprio per il fatto che, essendo $x \rightarrow +\infty$, nel nostro contesto è lecito supporre x positiva; tuttavia abbiamo preferito non saltare il passaggio col valore assoluto, che sarà fondamentale negli esercizi in cui $x \rightarrow -\infty$.

NOTA 4: Si può scrivere x al posto di $|x|$ perché, essendo $x \rightarrow +\infty$, possiamo supporre x positivo (= possiamo limitarci a considerare solamente i valori positivi di x).

$$\begin{aligned}
30) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - x \right) \stackrel{\text{NOTA 4}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\overbrace{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}^0 - \underbrace{1}_1 \right)}_{+\infty} = [\infty \cdot 0] \text{ Forma di Indecisione!!!!}
\end{aligned}$$

NOTA 4

Come già per il limite precedente, è $x \rightarrow +\infty$ quindi si può scrivere x al posto di $|x|$

Contrariamente all'esercizio precedente, la **F.I. non si è sciolta**, ma si è invece trasformata in **un'altra F.I.** Siamo costretti a **riprendere il limite daccapo, risolvendolo con una strategia diversa.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(-3 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{x} \rightarrow -3}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \rightarrow 2} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Nell'esercizio seguente, a, b sono due costanti reali:

$$\begin{aligned}
31) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx}}_{-\infty} - \underbrace{x}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} - x \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + ax^2 + bx - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{\sqrt[3]{x^6 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)} + x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^2} + x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(a + \frac{b}{x} \right) \rightarrow a}{\cancel{x^2} \left[\sqrt[3]{\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}} + 1 \right] \rightarrow 3} = \frac{a}{3}
\end{aligned}$$

INDICAZIONE GENERALE SULLE FORME DI INDECISIONE FIN QUI VISTE

Lo ribadiamo, perché è davvero importante tenerlo sempre presente: in linea di principio,

le forme di indecisione $[\infty - \infty]$ e $[\infty/\infty]$

si affrontano “racchiudendo il termine di esponente maggiore o, comunque, quello che tende a infinito più rapidamente”,

mentre per le forme di indecisione $[0/0]$

“si va a cercare una semplificazione”, attraverso fattorizzazioni, o razionalizzazioni, o previa moltiplicazione di numeratore e denominatore per una stessa espressione.

Naturalmente, nella pratica si terrà sempre conto di **limiti noti già studiati in passato.**

Gli esempi successivi, oltre a quelli già visti, illustrano e confermano quanto detto.



FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$32) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x+4\sqrt{x}}}^{+\infty}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2+1}}_{+\infty}} \quad \text{E' una F. I. } \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Il numeratore può essere scritto come $x^{1/2} + x^{1/4}$ e quindi pensato come un “polinomio” di “grado” $1/2$ (abbiamo usato le virgolette perché, dati gli esponenti frazionari, si dovrebbe piuttosto parlare di *pseudo*-polinomio, e *pseudo*-grado).
 Il denominatore può essere scritto come $x^{2/3} + 1$ e il suo “grado” è quindi $2/3$.
 Prevale il “grado” del denominatore e la frazione *DOVREBBE* perciò tendere a 0.
 Per confermare questa nostra congettura, operiamo come con un rapporto di polinomi “classici”, raccogliendo sia a numeratore che a denominatore x elevato all’esponente massimo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x+4\sqrt{x}}}^{+\infty}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2+1}}_{+\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt[3]{x^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \frac{1 + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{x^3}{x^4}} \frac{1 + 4\sqrt{\frac{x}{x^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt[6]{\frac{1}{x}}}_{\downarrow 0} \frac{\overbrace{1 + 4\sqrt{\frac{1}{x}}}^{1}}{\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}_{\downarrow 1}} = 0$$

$$33) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} + \sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x-2} + 8x}$$

Possiamo fare un “pronostico” sul valore di questo limite ragionando come segue:

poiché $x \rightarrow +\infty$, nel radicale $\sqrt{9x^2+1}$ il termine $+1$ si fa irrilevante e si avrà $\sqrt{9x^2+1} \approx \sqrt{9x^2} = 3x$ e così pure nel radicale $\sqrt{x^2+x}$ il contributo di x appare trascurabile rispetto al termine “caratterizzante” x^2 , per cui sarà $\sqrt{x^2+x} \approx \sqrt{x^2} = x$. E allo stesso modo, a denominatore, $\sqrt{x^2-x-2} \approx \sqrt{x^2} = x$.

$$\text{Pertanto IPOTIZZIAMO che risulti } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9x^2+1}}^{\approx 3x} + \overbrace{\sqrt{x^2+x}}^{\approx x}}{\underbrace{\sqrt{x^2-x-2}}_{\approx x} + 8x} = \frac{4}{9}$$

D’altra parte, un tal ragionamento non può pretendere di essere rigoroso: **necessita di una conferma formale.**
ATTENZIONE, INFATTI:

se ci fossimo fidati di congetture di questo tipo, di fronte al precedente esercizio $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x+2} - x)$

avremmo potuto ritenere erroneamente che il limite fosse uguale a 0, mentre si è poi trovato che vale $-3/2$.
 Procediamo pertanto per raccoglimenti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9x^2+1} + \sqrt{x^2+x}}^{+\infty}}{\underbrace{\sqrt{x^2-x-2} + 8x}_{+\infty}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} + 8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8x} \quad \text{NOTA 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}^{\sqrt{9}=3} + \overbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}^1}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}_{\downarrow 1} + 8} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

NOTA 1 : $x \rightarrow +\infty$ per cui $|x| = x$

Vediamo ora come cambiano le cose se si prende la stessa frazione di prima ma si fa tendere x a $-\infty$ anziché a $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 34) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} + \sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x-2} + 8x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} + 8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} + 8x} \quad \text{NOTA 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} + 8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} + 8\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}^{-\sqrt{9}=-3} \overbrace{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}^{-1}}{\underbrace{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{-1} + 8} = -\frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

NOTA 2: $x \rightarrow -\infty$ per cui $|x| = -x$

$$\begin{aligned}
 35) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{4+\frac{5}{x}}}^{\sqrt{4}=2}}{\underbrace{3+\frac{2}{x}}_3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Il precedente esercizio avrebbe potuto anche essere svolto coi passaggi che seguono:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{\sqrt{(3x+2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{(3x+2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{9x^2+12x+4}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 36) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2} \quad \text{NOTA 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{5}{x}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{-\sqrt{4+\frac{5}{x}}}^{-\sqrt{4}=-2}}{\underbrace{3+\frac{2}{x}}_3} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

NOTA 3:

Qui $x \rightarrow -\infty$,
perciò $x < 0$
e $|x| = -x$

L'ultimo esercizio avrebbe potuto anche essere svolto coi passaggi seguenti:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} &\stackrel{\text{NOTA 4}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-|3x+2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-\sqrt{|3x+2|^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-\sqrt{(3x+2)^2}} = \\
 &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{(3x+2)^2}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{9x^2+12x+4}} = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

NOTA 4:

Poiché $x \rightarrow -\infty$, è $3x+2 < 0$; sarebbe dunque sbagliato, in questo contesto, scrivere $3x+2 = \sqrt{(3x+2)^2}$!

Infatti tale uguaglianza avrebbe il primo membro negativo

e il secondo membro positivo in quanto risultato di un'estrazione di radice quadrata.

In pratica, solamente un'espressione positiva si può trasformare nella radice del suo quadrato:

per questo motivo, volendo portare l'espressione negativa $3x+2$ sotto radice,

scriveremo $3x+2 = -|3x+2| = -\sqrt{|3x+2|^2} = -\sqrt{(3x+2)^2}$.

FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $\left[\frac{0}{0} \right]$

$$37) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{x\sqrt{x}-1}^0}{\underbrace{x^2-1}_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1} \cdot \frac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{(x^2-1)(x\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \overbrace{(x^2+x+1)}^3}{\underbrace{(x+1)}_2 \cancel{(x-1)} \underbrace{(x\sqrt{x}+1)}_2} = \frac{3}{4}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x}+1}^0}{\underbrace{x+1}_0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}_{+1} + 1} = \frac{1}{3}$$

ESERCIZI (... non tutti portano a Forme di Indecisione ...)

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3})$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x} + \sqrt[5]{x} - \sqrt[4]{x})$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{3x} - \sqrt[4]{x})$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x})$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x^3})$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 3x)$

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 3x)$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x^2 + x} - x)$

11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2x)$

12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} + x\sqrt{7})$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{3x^2 + x})$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 8x - 7} - 3x - 2)$

17) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 8x - 7} - 3x - 2)$

18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x + 5} - 2x)$

19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x} - x)$

20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x} - x)$

21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x)$

22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x)$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5\sqrt[3]{x^3 - x} - 4x)$

24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x + 1)$

25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - \frac{1}{10}x^2 \right)$

26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-7} - \sqrt{4x+5})$

27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-9})$

28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})$

29) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}) \quad \begin{matrix} a > 0 \\ c > 0 \end{matrix}$

30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-4} - \sqrt[3]{x+7})$

31) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3} - x)$

32) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+5}$

33) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{5-4\sqrt[3]{x}}$

34) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x}+3}$

$$35) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

$$37) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[5]{x}}$$

$$39) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+5}}{x + \sqrt[3]{3x-1}}$$

$$41) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{4x^2-3x}}$$

$$43) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+3x}}{\sqrt{16x^2-25} + \sqrt{9x^2+16}}$$

$$45) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x+x}}$$

$$47) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+7}{\sqrt{x^2+x+9}}$$

$$49) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x-x}}{\sqrt{9x^2+1}}$$

$$51) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2+x+4}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}$$

$$53) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+4} + x}{\sqrt{x^2+2x+4} - x}$$

$$55) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

$$56) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$$

$$59) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$$

$$60) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[4]{x+1}}{4\sqrt[4]{x}+5}$$

$$40) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x+1} + \sqrt{4x-1}}{\sqrt{x} + 2\sqrt{x-3}}$$

$$42) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x^2-3x}}$$

$$44) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x+x}}$$

$$46) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$48) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x-1} + 3x}{\sqrt{x^2+x-2} - 2x}$$

$$50) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x} + x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$52) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}}$$

$$54) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$57) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$$

$$58) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$$

$$61) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x}$$

$$62) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x}$$

RISPOSTE

$$1) -\infty \quad 2) -\infty \quad 3) -\infty \quad 4) -\infty \quad 5) -\infty \quad 6) +\infty \quad 7) -\infty \quad 8) +\infty$$

$$9) \frac{1}{2} \quad 10) +\infty \quad 11) -\frac{5}{4} \quad 12) -\infty \quad 13) 0 \quad 14) -\frac{1}{2} \quad 15) +\infty \quad 16) -\frac{10}{3}$$

$$17) +\infty \quad 18) -\infty \quad 19) 0 \quad 20) 0 \quad 21) -\frac{1}{3} \quad 22) -\frac{1}{3} \quad 23) +\infty \quad 24) \frac{5}{3} \quad 25) -\infty$$

$$26) -\infty \quad 27) 0 \quad 28) 0 \quad 29) +\infty \text{ se } a > c, -\infty \text{ se } a < c, 0 \text{ se } a = c$$

$$30) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-4} - \sqrt[3]{x+7}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-4} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt{x-4}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-4} \cdot \left(1 - \underbrace{\sqrt[6]{\frac{(x+7)^2}{(x-4)^3}}}_{\downarrow 0}\right) = +\infty$$

$$31) \frac{1}{4} \quad 32) \frac{3}{2} \quad 33) -\frac{1}{4} \quad 34) 2 \quad 35) 1 \quad 36) 0 \quad 37) +\infty \quad 38) \frac{3}{4} \quad 39) 0 \quad 40) \frac{5}{3}$$

$$41) \frac{3}{2} \quad 42) \frac{1}{2} \quad 43) -\frac{2}{7} \quad 44) \frac{1}{2} \quad 45) -\infty \quad 46) 1 \quad 47) -1 \quad 48) -5 \quad 49) 0 \quad 50) 1 \quad 51) 0$$

$$52) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-3}} + \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x-3)^2}}}_{\downarrow +\infty} + \underbrace{\sqrt[12]{\frac{(x-1)^3}{(x-3)^4}}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

$$53) 0 \quad 54) \frac{1}{2} \quad 55) \frac{1}{3} \quad 56) \frac{1}{4} \quad 57) +\infty \quad 58) 0 \quad 59) \sqrt{2}-1 \quad 60) 0 \quad 61) -\infty \quad 62) 1$$

12. LIMITI DI FUNZIONI TRASCENDENTI, LIMITI “NOTEVOLI”

FUNZIONI GONIOMETRICHE

LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ F.I. $\left[\frac{0}{0} \right]$

Dimostrazione

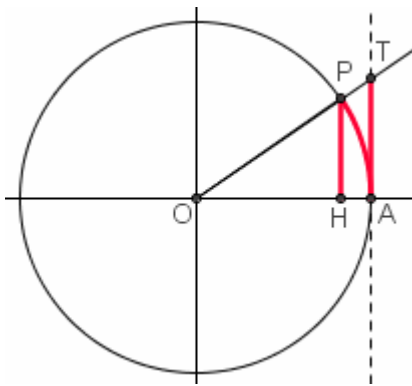
Prima di tutto, osserviamo che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è pari: infatti

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

Pertanto il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e da ciò si trae che basterà dimostrare la relazione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Consideriamo dunque un valore di x positivo (e sufficientemente piccolo: per lo meno minore di $\pi/2$), e consideriamo la figura seguente:



NOTA:

$HP < \widehat{AP}$ era già stata giustificata nel corso della dimostrazione del limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

In quanto alla disuguaglianza $\widehat{AP} < AT$, essa può essere giustificata nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{area settore } OAP &< \text{area triangolo } OAT \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\widehat{AP} \cdot OA}{2} &< \frac{AT \cdot OA}{2} \rightarrow \widehat{AP} < AT \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\text{arco } \widehat{AP} = x \quad HP = \sin x \quad AT = \tan x$$

e vale la doppia disuguaglianza (vedi NOTA accanto alla figura):

$$HP < \widehat{AP} < AT \quad \text{ossia} \quad \sin x < x < \tan x$$

da cui, dividendo per $\sin x$ (stiamo supponendo $\sin x$ positivo, quindi i versi rimangono invariati):

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \quad \text{ossia} \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

e passando ai reciproci

(il che è possibile, perché le tre quantità in gioco sono >0 , ma come è noto comporta un cambiamento di verso):

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ovvero, trascrivendo da destra verso sinistra:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Ora, per $x \rightarrow 0^+$, il 1° anello della catena ($\cos x$) tende a 1; l'ultimo è addirittura costantemente uguale a 1; quindi, per il “Teorema “dei Due Carabinieri”, segue la tesi.

UN ALTRO LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ F.I. $\left[\frac{0}{0} \right]$

Dimostrazione:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \overbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}^{1} \cdot \overbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}^{1/2} = \frac{1}{2}$$

Esempi (potrai notare che in essi si applica anche quello che abbiamo chiamato il “Teorema di Sostituzione”)

INDICAZIONE GENERALE SULLE FORME DI INDECISIONE FIN QUI VISTE

Diciamo che, in linea di principio, le forme di indecisione $[\infty - \infty]$ e $[\infty/\infty]$ si affrontano “raccolgendo il termine di esponente maggiore o, comunque, quello che tende a infinito più rapidamente”,

mentre **per le forme di indecisione $[0/0]$**

“si va a cercare una semplificazione”, attraverso fattorizzazioni, o razionalizzazioni, o previa moltiplicazione di numeratore e denominatore per una stessa espressione.

Naturalmente, nella pratica si **terrà sempre conto di limiti noti già studiati in passato.**

Negli esempi che seguono verrà anche applicato, esplicitamente o implicitamente, il **“teorema di sostituzione”**.



ESERCIZI SVOLTI SUI LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$39) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \stackrel{3x=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_1 \cdot 3 = 3$$

$$40) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \cdot \alpha \stackrel{\alpha x=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_1 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$41) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{x}_0 = 0$$

Abbiamo scritto $\frac{\sin x^2}{x^2}$ sottintendendo una sostituzione di variabile:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \stackrel{\substack{x^2=t \\ \text{Con } x \rightarrow 0, \\ \text{si ha } t \rightarrow 0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Si può parlare di **sostituzione “implicita” di variabile**. Ce ne serviremo sovente.

$$42) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{\substack{\arcsin x = t \\ x = \sin t \\ x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1$$

$$43) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{1/2} \cdot \underbrace{x}_0 = 0$$

$$44) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Abbiamo diviso numeratore e denominatore per x (proprietà invariantiva) e utilizzato il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ ricavato appena sopra

$$45) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2}}_{1/2} \cdot 9 = \frac{9}{2}$$

$$46) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos x^2}{x^4}}_{1/2} \cdot \underbrace{x^3}_0 = 0$$

$$47) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{x} - 1}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1 - \cos \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \sqrt[3]{x}} \right] = - \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^2}}_{1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}_{\infty} = \infty \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt[3]{x} - 1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos \sqrt[3]{x} - 1}{x} = +\infty \end{array} \right.$$

ESERCIZI (risposte e suggerimenti più sotto: tienili coperti!!! ☺)

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} 5\pi x}{\operatorname{sen} \pi x}$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$ | 9) $\lim_{x \rightarrow k} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} k}{x - k}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ | 10) $\lim_{x \rightarrow k} \frac{\cos x - \cos k}{x - k}$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} 4x}{x - \operatorname{sen} 2x}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{2x}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{\cos x}}$ |
| 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x}$ | 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} 4\pi x}{\operatorname{sen} \pi x}$ | 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ |

RISPOSTE

- 1) 0 2) 1 3) 0 4) 1 5) 3 6) 3 7) -4 8) 5 9) $\cos k$ 10) $-\operatorname{sen} k$ 11) -5 12) 4 13) 0 14) $-\frac{1}{2}$

SUGGERIMENTI

- 1) Al tendere di x a ∞ , $\frac{1}{x}$ tende a 0 mentre $\operatorname{sen} x$ si mantiene limitato fra -1 e $+1$...
- 2) Questo non è altro che il ben noto limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
- 3) Al tendere di x a ∞ , il fattore x tende a 0 mentre l'altro fattore si mantiene limitato fra -1 e $+1$...
- 4) Poni $x = \frac{1}{z}$ e ritroverai un limite notevole ben noto: quando $x \rightarrow \infty$, sarà $z = \frac{1}{x} \rightarrow 0$...
- 5) Abbiamo visto che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$
- 6) Dividi per x sia il numeratore che il denominatore,
e tieni conto del limite, già da noi stabilito, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$
- 7) e 8) Poni $x = z + 1$. Quando x tende a 1, z tende a 0 ...
- 9) e 10) Formule di prostaferesi ...
- 11) Dividi sia il numeratore che il denominatore per x
- 12) Moltiplica sia il numeratore che il denominatore per $1 + \sqrt{\cos x}$
- 13) $\frac{1 - \cos^2 x}{x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot x = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 \cdot x$
- 14) $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ ecc.

NUOVE FORME DI INDECISIONE (CON POTENZE)

Oltre alle F.I. già rilevate in passato,
ci si può rendere conto che ne esistono altre,
legate alle potenze

$$[f(x)]^{g(x)}.$$

Esse sono:

$$\boxed{[0^0] \quad [\infty^0] \quad [1^\infty]}$$

Cerchiamo di comprendere il motivo per cui si tratta di “Forme di Indecisione”.

$$[0^0]$$

Abbiamo una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$, con $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$

Il tendere a 0 della base “vorrebbe” far tendere la potenza:

- a 0, in caso di esponente positivo;
- a ∞ , in caso di esponente negativo.

D'altra parte c'è anche il tendere a 0 dell'esponente, che “vorrebbe” invece far tendere la potenza a 1.

Il “conflitto” è responsabile dell'indecisione.

$$[\infty^0]$$

Qui abbiamo una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$, con $f(x) \rightarrow \infty$ e $g(x) \rightarrow 0$

La base tende a ∞ , e questo “vorrebbe” far tendere la potenza:

- a ∞ , in caso di esponente positivo;
- a 0, in caso di esponente negativo.

Ma c'è anche, nello stesso tempo,

il tendere a 0 dell'esponente, che “vorrebbe” invece far tendere la potenza a 1.

Il “conflitto” è responsabile dell'indecisione.

$$[1^\infty]$$

Abbiamo una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$, con $f(x) \rightarrow 1$ e $g(x) \rightarrow \infty$

Il tendere a 1 della base “vorrebbe” far tendere la potenza a 1;

d'altra parte, appunto, la base $f(x)$ non è UGUALE a 1, bensì è “VICINA” a 1.

- Se $f(x)$ è leggermente *superiore* a 1,
il tendere all'infinito dell'esponente “vorrebbe” far tendere la potenza:
 - ✓ a $+\infty$, se l'esponente tende all'infinito positivo;
 - ✓ a 0, se l'esponente tende all'infinito negativo;
 si ha comunque, in entrambi i casi,
un conflitto rispetto a quella “propensione” a tendere a 1,
di cui si parlava all'inizio.
- Se $f(x)$ è leggermente *inferiore* a 1,
il tendere all'infinito dell'esponente “vorrebbe” far tendere la potenza:
 - ✓ a 0, se l'esponente tende all'infinito positivo;
 - ✓ a $+\infty$, se l'esponente tende all'infinito negativo;
 si ha in ognuno dei due casi
un conflitto rispetto a quella “propensione” a tendere a 1,
di cui si parlava all'inizio.

E a questo punto, scusatemi un attimo soltanto, perché devo fare un salto in banca.

Un problema di soldi porta al numero di Nepéro e .

Cosa vuol dire depositare 1000 euro “all’interesse annuo del 5%” ?

Vuol dire che la cifra depositata (il “capitale”, o “montante iniziale”),

dopo 12 mesi esatti frutterà un interesse uguale ai $5/100$ di 1000, ossia $0,05 \cdot 1000$, cioè un interesse di euro 50.

In quel momento, il “montante” salirà dunque a euro 1050.

Dopo altri 12 mesi, la banca verserà al cliente un nuovo interesse, ottenuto dal calcolo $0,05 \cdot 1050 = 52,5$

e il montante salirà a euro 1102,5.

(In realtà, gli interessi vengono “capitalizzati”, cioè vengono aggiunti al montante

per dar luogo al nuovo montante più alto su cui verrà calcolato il nuovo interesse,

non a intervalli di 12 mesi a partire dall’apertura del conto bancario,

bensi - in genere - a scadenze diverse che dipendono dal contratto banca/cliente.

Comunque tu puoi, per meglio fissare le idee, riconfermare alla lettera il discorso fatto prima,

semplicemente supponendo che la somma iniziale di euro 1000 sia stata depositata proprio il 1° di Gennaio

e che la “capitalizzazione” avvenga al termine di ogni anno solare

(in tutto il discorso, per mitigarne la complessità, introdurremo qualche ipotesi piuttosto poco “realistica”,

che ti prego di valutare con elasticità ed “indulgenza”).

Adesso poniamo uguale a 1 il montante iniziale.

Indichiamo con p l’interesse percentuale (nell’esempio di partenza era $p = 0,05$).

Dopo 1 anno ...??? Allo scadere di 1 anno avremo un montante uguale a $(1 + p)$:

possiamo anche dire che in 1 anno il montante, che valeva inizialmente 1,

subisce una moltiplicazione per $(1 + p)$

Dopo 2 anni ...??? Allo scadere di 2 anni il nuovo montante $(1 + p)$ verrà a sua volta moltiplicato per $(1 + p)$

perché a quello che è il nuovo montante $(1 + p)$ andranno aggiunti gli interessi

calcolati su QUEL montante, che ammontano a $(1 + p) \cdot p$, quindi avremo

$$M = (1 + p) + (1 + p) \cdot p = (1 + p) \cdot (1 + p) = (1 + p)^2$$

Dopo 3 anni ...??? Allo scadere di 3 anni il nuovo montante $(1 + p)^2$ verrà a sua volta moltiplicato per $(1 + p)$

e si avrà il montante $M = (1 + p)^3$

Dopo n anni ...??? Allo scadere di n anni il montante varrà $M = (1 + p)^n$

Ho depositato, oggi 1° Gennaio, un montante 1.

Se dopo 6 mesi esatti volessi estinguere il conto, cosa ritirerei?

Ritirerei $1 + p/2$, perché invece dell’interesse p

(che avrei ottenuto se avessi lasciato i soldi sul conto per 12 mesi) la banca me ne darebbe solo la metà.

Ma a questo punto ho un’idea.

Per far fruttare meglio i miei soldi, farò così:

estingerò il conto dopo 6 mesi, ritirerò il montante $1 + p/2$,

riaprirò un nuovo conto depositando questa somma $1 + p/2$

e per i rimanenti 6 mesi dell’anno percepirò un interesse calcolato non più sul montante 1,

ma sul montante superiore $1 + p/2$!

Alla fine dei 12 mesi, il mio montante sarà maggiore che se io avessi lasciato “dormire”

il montante 1 per tutto l’anno, senza compiere l’operazione intermedia!

Questo peraltro da un punto di vista pratico non è così semplice:

infatti, ogniqualvolta si estingue un conto, si deve pagare una certa somma di denaro alla banca

per il lavoro che gli impiegati devono fare riguardo alle procedure di chiusura,

e analogamente avviene quando si apre un nuovo conto,

per cui, viste le due “cifre fisse” da pagare per la doppia operazione

(estinzione del conto vecchio/apertura del nuovo),

bisogna vedere se la “furbata” sarebbe conveniente.

Ma facciamo finta che tali tariffe fisse di apertura e chiusura del conto siano nulle.

Pensiamo insomma a cosa accadrebbe se la banca ci desse la possibilità di “capitalizzare istantaneamente”,

a “costo zero”, gli interessi, cioè:

frazionasse l’anno in periodi di tempo Δt piccolissimi, e allo scadere di ogni Δt

aumentasse il montante dell’interesse maturato nel tempo Δt , e così via...

come se allo scadere di ogni intervallino di tempo Δt venisse chiuso un conto

e ne venisse aperto un altro col montante leggermente superiore - “a costo zero”, ripeto,

nel senso che supponiamo che la banca ci abbuoni le somme da pagare per l’estinzione+riapertura del conto.

Quanto percepiremmo dopo 1 anno, se la banca ci trattasse così bene?

Per rispondere a questa domanda, divideremo il periodo di tempo di 1 anno in n sottoperiodi da $1/n$ di anno, calcoleremo il montante maturato alla fine dell'anno (che dipenderà da n), poi faremo tendere n a infinito. Dunque, indicando con M_k il montante dopo k periodi da $1/n$ di anno, avremo:

$$M_0 = 1$$

$$M_1 = 1 + \frac{p}{n}$$

$$M_2 = \left(1 + \frac{p}{n}\right) + \left(1 + \frac{p}{n}\right) \cdot \frac{p}{n} = \left(1 + \frac{p}{n}\right) \left(1 + \frac{p}{n}\right) = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^2$$

$$M_3 = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^3$$

...

$$M_n = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

Dobbiamo ora calcolare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$, CHE E' UNA FORMA DI INDECISIONE [1°]

Per semplicità, poniamo $p=1$ (che corrisponderebbe a un interesse “da sogno”: il 100% annuo! Ma noi siamo a questo punto interessati all'aspetto puramente matematico della questione) e proponiamoci di studiare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ che si presenta come una F.I. [1°]}$$

Bene! Si può dimostrare che

vale il seguente limite notevole: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ **dove il simbolo e indica un numero irrazionale, detto “numero di Nepéro”, le cui prime cifre decimali sono 2,71828...**

Dimostrazione

Non la esponiamo nei particolari; citiamo solamente gli strumenti matematici che consentono di effettuarla.

Si può provare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è:

- strettamente crescente ($a_{n+1} > a_n, \forall n$)
- e superiormente limitata ($a_n < 3, \forall n$)

Per il “Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone”, adattato alle “successioni”, la successione tenderà perciò, al tendere di n a $+\infty$, ad un limite finito. Tale limite viene per l'appunto indicato col simbolo e .

Si dimostra che e è irrazionale; anzi, è addirittura “trascendente”, ossia non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali.

Si può poi dimostrare che, anche se al posto di una variabile discreta n abbiamo una variabile continua x (e inoltre: tanto per $x \rightarrow +\infty$ quanto per $x \rightarrow -\infty$), risulta sempre:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ritorniamo ora al nostro problema bancario, per determinare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$. Dunque:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n/p}\right)^{\frac{n}{p} \cdot p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n/p}\right)^{\frac{n}{p}} \right\}^p \stackrel{(z=n/p)}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z}_{\rightarrow e} \right\}^p = e^p$$

Ad esempio, con $p=0,05$ (interesse annuo del 5%), se il nostro patrimonio iniziale fosse di 1 euro,

- in regime “normale” allo scadere di 1 anno ritireremmo 1,05 euro
- mentre in regime di “capitalizzazione istantanea degli interessi” ritireremmo euro $e^{0,05} = 1,05127...$

LIMITI “IMPARENTATI” COL LIMITE CHE DEFINISCE IL NUMERO e

Partendo dal $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, che possiamo scrivere come $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$,

si può dimostrare, con opportune e non difficili applicazioni del “Teorema di Sostituzione” (analogamente a quanto abbiamo fatto poc’anzi con il problema delle capitalizzazioni istantanee ad interesse p), che sussistono i seguenti limiti notevoli:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\beta x}\right)^x = e^{\frac{1}{\beta}}, \beta \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta x}\right)^x = e^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*$
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	
$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$

... ai quali se ne potrebbero aggiungere altri ... ma tutto sommato non è assolutamente il caso, perché

i limiti notevoli sopra elencati, “figli” del limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$,

e tutte le varianti che si potrebbero escogitare ponendo, ad esempio, mx o $\sqrt{x}$ anziché x ad esponente, **più che essere studiati a memoria si devono saper “ricostruire” tramite procedimenti opportuni basati sostanzialmente su sostituzioni (esplicite o, meglio implicite), così come abbiamo fatto sul problema delle capitalizzazioni istantanee ad interesse p .**

$$\text{Esempio: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)^{2x^2 \cdot \frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)^{2x^2}}_e \underbrace{\left[\frac{1}{2x}\right]}_{\rightarrow 0} = e^0 = 1$$

ALTRI LIMITI NOTEVOLI

LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$

Dimostrazione: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \underbrace{\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}}_e = 1$

LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$

Dimostrazione

Semplice: basta utilizzare la formula per il cambiamento di base onde ricondursi ad un logaritmo in base e , poi tener conto del limite notevole precedente.

Ricordiamo che la formula per il cambiamento di base è: $\log_a k = \frac{\log_b k}{\log_b a}$ e avremo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{\log_e a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log_e a} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \log_a e \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\rightarrow 1} = \log_a e$$

NOTA: scambiando la base con l’argomento, il logaritmo si muta nel reciproco: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$F.I. \left[\frac{0}{0} \right]$
---	-----------------------------------

Dimostrazione:

Vogliamo determinare il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$. Facciamo la posizione $e^x - 1 = t$ e avremo: $e^x = 1 + t \rightarrow x = \ln(1 + t)$

Al tendere di x a 0, la variabile t tenderà anch'essa a 0. Avremo dunque:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\frac{t}{\ln(1+t)}}}_{\rightarrow 1} = 1$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sfruttato il limite notevole precedente.

LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$F.I. \left[\frac{0}{0} \right]$
---	-----------------------------------

Dimostrazione: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\ln a})^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\rightarrow 1} \cdot \ln a = \ln a$

dove abbiamo sfruttato, nell'ultimo passaggio, il limite precedente effettuando una sostituzione implicita: $x \ln a = z$

LIMITE NOTEVOLE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k \quad k \in \mathbb{R}$	$F.I. \left[\frac{0}{0} \right]$
--	-----------------------------------

Dimostrazione:

Con k intero positivo, la dimostrazione si potrebbe effettuare semplicemente sviluppando la potenza di binomio; ma noi siamo interessati al caso ben più generale $k \in \mathbb{R}$.

Allora, cerchiamo di ricondurci a due limiti notevoli già acquisiti, nel modo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+x)^k} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{k \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{k \ln(1+x)} - 1}{k \ln(1+x)}}_{\downarrow 1} \cdot k \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\downarrow 1} = k$$

Del limite notevole precedente, vorrei mettere in rilievo il seguente caso particolare:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = \frac{1}{2}$
--

... che avrebbe potuto pure essere trattato in modo autonomo, tramite “razionalizzazione del numeratore”.

C'è poi tutta una famiglia di limiti notevoli, che esprimono, per così dire, la "maggior forza" della funzione esponenziale e la "maggior debolezza" della funzione logaritmica, rispetto a qualsiasi funzione algebrica.

Per quanto riguarda le dimostrazioni, si potrebbero effettuare fin da questo momento, ma con una certa fatica.

Noi preferiamo invece rinviarle, perché, quando più avanti avremo acquisito il Teorema di De l'Hospital (realmente strepitoso!) gli stessi risultati si potranno stabilire molto facilmente e piacevolmente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \text{ per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \text{ per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty \text{ per ogni } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

ESERCIZI SVOLTI SUL LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$48) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4} \cdot 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}}_{\downarrow e} \right]^4 = e^4$$

Abbiamo scritto

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}}_{\downarrow e}$$

sottintendendo una sostituzione di variabile
(sostituzione "**implicita**" di variabile):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}} \stackrel{x/4=t}{\text{Con } x \rightarrow \infty, \text{ si ha } t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$49) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x \cdot (-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}}_{\downarrow e} \right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$50) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{\beta x}{\alpha}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{\beta x}{\alpha}}\right)^{\frac{\beta x}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{\beta x}{\alpha}}\right)^{\frac{\beta x}{\alpha}}}_{\downarrow e} \right]^{\frac{\alpha}{\beta}} = e^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$51) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{\substack{1/x=t \\ x=1/t \\ x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \quad \text{Notevole, da ricordare!} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

$$52) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+(-x))^{\frac{1}{-x} \cdot (-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(1+(-x)\right)^{\frac{1}{-x}}}_e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$53) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{2+x}_2 \right)^{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}} = \begin{cases} +\infty & \text{con } x \rightarrow 0^+ \\ 0^+ & \text{con } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

NON ERA UNA FORMA DI INDECISIONE!!!

... non è che per caso avevi abboccato come un pesce mettendoti ad applicare chissà quali artifici?

La prima cosa da fare, di fronte ad un esercizio sui limiti, è sempre di controllare se si tratta di una F.I. oppure no.

$$54) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{1+2x}_1 \right)^{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}}_e^2 = e^2$$

$$55) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{1+\frac{1}{x^2}}_1 \right)^{x^2 \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}_e^{\frac{1}{x^2} \rightarrow 0} = 1$$

$$56) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{\sqrt[3]{x}}}_{1/e}^{\sqrt[3]{x^2} \rightarrow +\infty}$$

NOTA: $0^+ \quad e \approx 2,718 \rightarrow \frac{1}{e} \approx 0,368 < 1$

$$57) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{x+3}{x+4}}_1 \right)^{x \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x+4}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \rightarrow e^3}{\left(1+\frac{4}{x}\right)^x \rightarrow e^4} = \frac{1}{e}$$

ESERCIZI SVOLTI SUI LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$58) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \ln x \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} x-1=t \\ x=1+t \\ x \rightarrow 1, \\ t \rightarrow 0 \end{array}$

$$59) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = -1$$

$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \ln(1-x) \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -x=t \\ x=-t \end{array}$

$$60) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ e^{\sin x} - 1 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \sin x \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ 1 \end{array}$

$$61) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+(-x))^{\frac{1}{2}} - 1}{-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$$

$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \sqrt{1-x}-1 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1-x \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} -x \\ \downarrow \\ \frac{1}{2} \end{array}$

LA RISOLUZIONE DELLE FORME DI INDECISIONE

$$[0^0], [\infty^0], [1^\infty]$$

Mentre le forme $[1^\infty]$ vanno di norma ricondotte al limite notevole che definisce il numero e ,
di fronte a una $[0^0]$ o a una $[\infty^0]$ conviene in generale applicare l'identità

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

dopodiché basterà sciogliere, ad esponente,
una F.I. relativa al prodotto di due funzioni,
come illustrato dagli esempi seguenti.

$$62) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3 \ln x + 4}} [0^0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3 \ln x + 4}} \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{3 \ln x + 4} \cdot \ln \frac{1}{x}}$$

Ora ad esponente abbiamo

$$\frac{2}{3 \ln x + 4} \cdot \ln \frac{1}{x}$$

$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ 2 \\ \downarrow \\ 0^+ \end{array} \quad \begin{array}{c} -\infty \\ \uparrow \\ \ln \frac{1}{x} \\ \downarrow \\ 0^+ \end{array}$

e potremo sciogliere l'indecisione,
per quanto riguarda l'esponente,
come segue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 \ln x + 4} \cdot \ln \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 \ln x + 4} \cdot (-\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln x}{3 \ln x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x} \left(3 + \frac{4}{\ln x} \right)} = -\frac{2}{3}$$

$\begin{matrix} 0 \\ \uparrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} -\infty \\ \uparrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0^+ \\ \downarrow \end{matrix}$

$$\text{da cui } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{2}{3 \ln x + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{3 \ln x + 4} \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$

$\begin{matrix} -2/3 \\ \uparrow \end{matrix}$

63) Se $a > 0, c > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax+b)^{\frac{1}{\ln(cx+d)}} \stackrel{[\infty^0]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left[(ax+b)^{\frac{1}{\ln(cx+d)}} \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln(cx+d)} \cdot \ln(ax+b)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(ax+b)}{\ln(cx+d)}}$$

Ora ad esponente abbiamo $\frac{\ln(ax+b)}{\ln(cx+d)}$ e potremo sciogliere l'indecisione sull'esponente così:

$\begin{matrix} +\infty \\ \uparrow \end{matrix}$
 $\frac{\ln(ax+b)}{\ln(cx+d)}$
 $\begin{matrix} \downarrow \\ +\infty \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ax+b)}{\ln(cx+d)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(a + \frac{b}{x} \right) \right]}{\ln \left[x \left(c + \frac{d}{x} \right) \right]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\ln x + \ln \left(a + \frac{b}{x} \right)}^{\ln a}}{\underbrace{\ln x + \ln \left(c + \frac{d}{x} \right)}_{\ln c}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\ln x} \left[1 + \frac{\ln \left(a + \frac{b}{x} \right)}{\ln x} \right]}{\cancel{\ln x} \left[1 + \frac{\ln \left(c + \frac{d}{x} \right)}{\ln x} \right]} = 1 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \ln a \\ \uparrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax+b)^{\frac{1}{\ln(cx+d)}} = e^{\frac{\ln(ax+b)}{\ln(cx+d)}} \rightarrow 1 = e$$

ESERCIZI (risposte e suggerimenti nella pagina a fianco: tienili coperti!!! ☺)

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^x$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^x$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{3x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{x+3}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^x$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{2x+3}{x+5}}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+4) - \ln(4x+1))$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+3x)}{x}$ (Log è il logaritmo in base 10)
- 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{2^x} + 1}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{1}{2^x} + 1}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{\sin x}$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{x}$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[7]{x}}{1 - x}$

RISPOSTE

1) 1 2) $\frac{1}{e}$ 3) $\frac{1}{e^3}$ 4) $\frac{1}{e}$ 5) $\frac{1}{e}$ 6) 0 7) e 8) 0

9) $\ln \frac{1}{4} = -\ln 4$ 10) 3 11) $3 \operatorname{Log} e = \frac{3}{\ln 10}$ 12) 1 13) 2 14) 0 15) 1 16) -1 17) $-\frac{2}{3}$ 18) $\frac{1}{7}$

SUGGERIMENTI

1) Non è una forma di indecisione!

2) Dividi sia “sopra” che “sotto” per $x \dots$

3) $a^{3x} = (a^x)^3$

4) $a^{x+3} = a^x \cdot a^3$

5) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}$

6) La frazione entro parentesi tende a 2 ...

7) $(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} = (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \left[(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$

8) Il contenuto della parentesi tende a 0, l'esponente tende a 2

9) $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3$

11) Analogo al precedente

12) $x[\ln(x+1) - \ln x] = x \cdot \ln \frac{x+1}{x} = x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 \dots$

14) e 15) Non sono forme di indecisione

16) $\frac{e^{-x} - 1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{e^{-x} - 1}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = -\frac{\frac{e^{-x} - 1}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$

17) $\frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{x} = \frac{\sqrt[3]{1+(-2x)} - 1}{-2x} \cdot (-2)$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[7]{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[7]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[7]{1+(x-1)} - 1}{x - 1}$ (quando $x \rightarrow 1$, $x - 1 \rightarrow 0$)

13. UNA RACCOLTA CONCLUSIVA DI ESERCIZI

(con risposte alla fine della rassegna, seguite dagli svolgimenti completi!)

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{\frac{1}{x}} + b}{ce^{\frac{1}{x}} + d}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ae^{\frac{1}{x}} + b}{ce^{\frac{1}{x}} + d}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \operatorname{sen} bx}{cx + \operatorname{sen} dx}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + \operatorname{sen} bx}{cx + \operatorname{sen} dx}$

5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x+4}{5x+6} \right)^x$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{x+3}{1-2x}}$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x^2 - 1}$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2}{x^2 - 1}$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^3}{x^2 - 1}$

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+2}{x^2-x+1}}$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2+2}{x^2-x+1}}$

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^3+2}{x^2-x+1}}$

15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^3+2}{x^2-x+1}}$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x^2-x}$

17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x^2-x}$

18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3+1}{x^2-x}$

19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3+1}{x^2-x}$

20) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x^2-x}$

21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)^x$

22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2-1} \right)^x$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right)^x$

24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3}$

25) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\pi - x}$

26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

27) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2}{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}$

28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot |x-1|}{2x^2+1}$

29) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot |x-1|}{2x^2+1}$

30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1} - \sqrt{x^2 + b_2 x + c_2} \right)$

31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{\ln(1 + \beta x)}$

... E TERMINIAMO QUESTA RASSEGNA
CON DUE ESERCIZI DAVVERO DIFFICILI,
CHE PROPONIAMO IN FORMA "GUIDATA".

$$32) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad [0^0]$$

Applicando la nota identità

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

avremo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\boxed{x \ln x}}.$$

Ma per quanto riguarda l'esponente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

*perché il logaritmo,
come dimostreremo,
tende all'infinito
meno rapidamente
di ogni funzione algebrica*

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \dots$$

$$33) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad [0^0]$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\ln x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left[\left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\ln x}} \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln \frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} \cdot [-\ln(x+1)]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\boxed{\frac{\ln(x+1)}{\ln x}}} \end{aligned}$$

Ma è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x} = \dots$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \dots$$

RISPOSTE

- 1) $\frac{a}{c}$ 2) $\frac{b}{d}$ 3) $\frac{a+b}{c+d}$ 4) $\frac{a}{c}$ 5) $\begin{cases} 0 & \text{con } x \rightarrow +\infty \\ +\infty & \text{con } x \rightarrow -\infty \end{cases}$ 6) $+\infty$ 7) $-\infty$ 8) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- 9) $-\infty$ 10) 0 11) $+\infty$ 12) 1 13) e 14) $+\infty$ 15) 0 16) 0 17) $\frac{\pi}{4}$ 18) $\frac{\pi}{2}$ 19) $-\frac{\pi}{2}$
- 20) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \dots = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \dots = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 21) 1 22) 0 23) $+\infty$ 24) ∞ 25) 0 26) 1
- 27) $-\frac{3}{2}$ 28) $\frac{1}{2}$ 29) $-\frac{1}{2}$ 30) $\frac{b_1 - b_2}{2}$ 31) $\frac{\alpha}{\beta}$ 32) 1 33) $\frac{1}{e}$

RISOLUZIONI COMPLETE DEGLI ESERCIZI PRECEDENTI

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a e^{\frac{1}{x}} + b}{c e^{\frac{1}{x}} + d} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{e^{\frac{1}{x}}} \left(a + \frac{b}{e^{\frac{1}{x}}} \right)}{\cancel{e^{\frac{1}{x}}} \left(c + \frac{d}{e^{\frac{1}{x}}} \right)} = \frac{a}{c} \quad \text{in quanto} \quad \left. \frac{b}{e^{\frac{1}{x}}} \right\} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{d}{e^{\frac{1}{x}}} \right\} \rightarrow 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a e^{\frac{1}{x}} + b}{c e^{\frac{1}{x}} + d} = \frac{b}{d}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \sin bx}{cx + \sin dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{ax + \sin bx}{x}}{\frac{cx + \sin dx}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \frac{\sin bx}{x}}{c + \frac{\sin dx}{x}} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \frac{a+b}{c+d}$$

NOTA:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k,$$

come era già noto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin kx}{kx}}_{\substack{1 \\ \text{sostituzione} \\ \text{implicita } kx=t}} \cdot k = k$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + \sin bx}{cx + \sin dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax + \sin bx}{x}}{\frac{cx + \sin dx}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{\sin bx}{x}}{c + \frac{\sin dx}{x}} = \frac{a}{c} \quad (\text{NOTA})$$

$$\text{NOTA: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin kx}{x} = 0.$$

Ciò è intuitivamente evidente, ma comunque dimostriamolo:

$$|\sin kx| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin kx|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|};$$

$$\text{quindi } \left| \frac{\sin kx}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{e poiché } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

sarà anche, per il Secondo Teorema del Confronto, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin kx}{x} = 0$, c.v.d.

$$5) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{3x+4}{5x+6} \right) \stackrel{x \rightarrow \pm \infty}{=} \begin{cases} 0 & \text{con } x \rightarrow +\infty \\ +\infty & \text{con } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Il contenuto della parentesi tende a 3/5

in quanto è ben noto che

il limite, per $x \rightarrow \infty$,

di un quoziente di due polinomi dello stesso grado,

è uguale al rapporto fra i coefficienti dei due termini di grado massimo.

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{+\infty} = +\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{-\infty}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{0^+}} = -\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{x+3}{1-2x}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{1-2x} = -\frac{1}{2}$.

E' ben noto che

il limite, per $x \rightarrow \infty$, di un quoziente di due polinomi dello stesso grado, è uguale al rapporto fra i coefficienti dei due termini di grado massimo

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{0^+} = -\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \underbrace{\frac{x^2}{x^2-1}}_1 = 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \underbrace{\frac{x^3}{x^2-1}}_{+\infty} = +\infty$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+2}{x^2-x+1}} \rightarrow 0 = 1$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2+2}{x^2-x+1}} \rightarrow 1 = e$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^3+2}{x^2-x+1}} \rightarrow +\infty = +\infty$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^3+2}{x^2-x+1}} \rightarrow -\infty = 0$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \underbrace{\frac{x+1}{x^2-x}}_{0^+} = 0$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \underbrace{\frac{x^2+1}{x^2-x}}_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \underbrace{\frac{x^3+1}{x^2-x}}_{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg \underbrace{\frac{x^3+1}{x^2-x}}_{-\infty} = -\frac{\pi}{2}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \arctg \underbrace{\frac{x^2+1}{x^2-x}}_{\substack{1 \\ \uparrow \\ 0}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg \underbrace{\frac{\overbrace{1}^{\uparrow}}{x^2+1}}_{\substack{\downarrow 0^+ \\ x(x-1) \\ \downarrow -1}} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg \underbrace{\frac{\overbrace{1}^{\uparrow}}{x^2+1}}_{\substack{\downarrow 0^- \\ x(x-1) \\ \downarrow -1}} = +\frac{\pi}{2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{x^2}{x^2-1}}_1 \right)^x \rightarrow +\infty \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1+1}{x^2-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right)^{(x^2-1) \cdot \frac{x}{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right)^{x^2-1}}_e \right]^{\frac{x}{x^2-1} \rightarrow 0} = 1$$

$$22) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{0^+} \right)^x \rightarrow +\infty = 0$$

$$23) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{x^3}{x^2-1}}_{+\infty} \right)^x \rightarrow +\infty = +\infty$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{tg^2 x}^0}{\underbrace{x^3}_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{sen^2 x}{cos^2 x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sen^2 x}{x^3} \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sen^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{sen x}{x} \right)^2}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow \infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{cos^2 x}}_{\downarrow 1} = \infty$$

Per SOSTITUZIONE DI VARIABILE.

Poniamo $\pi - x = t$; avremo $x = \pi - t$, con $t \rightarrow 0$:

$$25) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\overbrace{1 + \cos x}^0}{\underbrace{\pi - x}_0} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\pi - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi - t)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos t}{t^2}}_{\rightarrow 1/2} \cdot \underbrace{t}_{\downarrow 0} = 0$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{arctg x}^0}{\underbrace{x}_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{tg t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{tg t}{t}} = 1$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{sen^2 x + sen x - 2}^0}{\underbrace{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{sen^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + sen\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - 2}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{cos^2 t + cost - 2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(cost + 2)(cost - 1)}{t^2} = - \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - cost}{t^2}}_{\downarrow 1/2} \cdot \underbrace{(cost + 2)}_{\downarrow 3} = -\frac{3}{2}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{x \cdot |x-1|}^{+\infty}}{\underbrace{2x^2 + 1}_{+\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-1)}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{x \cdot |x-1|}^{-\infty}}{\underbrace{2x^2 + 1}_{+\infty}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-x)}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x^2}{2x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1} - \sqrt{x^2 + b_2 x + c_2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1} - \sqrt{x^2 + b_2 x + c_2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1} + \sqrt{x^2 + b_2 x + c_2}}{\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1} + \sqrt{x^2 + b_2 x + c_2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + b_1 x + c_1 - x^2 - b_2 x - c_2}{\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1} + \sqrt{x^2 + b_2 x + c_2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)}{\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1} + \sqrt{x^2 + b_2 x + c_2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[(b_1 - b_2) + \frac{c_1 - c_2}{x} \right]}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{b_2}{x} + \frac{c_2}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[(b_1 - b_2) + \frac{c_1 - c_2}{x} \right]}{|x| \sqrt{1 + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2}} + |x| \sqrt{1 + \frac{b_2}{x} + \frac{c_2}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[(b_1 - b_2) + \frac{c_1 - c_2}{x} \right]}{x \left[\left(1 + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \right) + \left(1 + \frac{b_2}{x} + \frac{c_2}{x^2} \right) \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left[(b_1 - b_2) + \frac{c_1 - c_2}{x} \right]}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{b_2}{x} + \frac{c_2}{x^2}} \right)} = \frac{b_1 - b_2}{2}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\ln(1+\alpha x)}^0}{\underbrace{\ln(1+\beta x)}_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}}{\frac{\ln(1+\beta x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\frac{\ln(1+\alpha x)}{\alpha x}}^1 \cdot \alpha}{\underbrace{\frac{\ln(1+\beta x)}{\beta x}}_1 \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \text{ F.I. } [0^0].$$

Applicando la nota identità

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

avremo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\boxed{x \ln x}}.$$

Ma per quanto riguarda l'esponente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

*perché il logaritmo,
come dimostreremo,
tende all'infinito
meno rapidamente
di ogni funzione algebrica*

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\overbrace{x \ln x}^0} = 1$$

$$33) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{0^+} \right)^{\overbrace{\frac{1}{\ln x}}^{0^+}} \rightarrow 0^+ [0^0] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left[\left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\ln x}} \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln \frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} [-\ln(x+1)]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\boxed{\frac{\ln(x+1)}{\ln x}}}$$

Ma è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \underbrace{\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x}}_0 \right] = 1$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\boxed{\frac{\ln(x+1)}{\ln x}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

14 - LE SUCCESSIONI

I. COS'E' UNA "SUCCESSIONE"

La sequenza

$$a_0 = -1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{3}{5} \quad \dots \quad a_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \dots$$

costituisce un esempio di SUCCESSIONE.

Ecco un altro esempio di successione:

$$a_1 = 3 \quad a_2 = \sqrt{3} \quad a_3 = \sqrt[3]{3} \quad a_4 = \sqrt[4]{3} \quad \dots \quad a_n = \sqrt[n]{3} \quad \dots$$

Una successione è dunque una sequenza infinita di numeri reali

(ma potrebbe trattarsi anche di oggetti di altra natura: vettori, funzioni, numeri complessi, figure geometriche...), ciascuno indicabile per mezzo di una lettera (noi nei nostri due esempi abbiamo scelto la lettera a)

munita di un indice, il quale indice potrà assumere i suoi valori

in $\mathbb{N}$ (insieme dei numeri naturali), oppure in un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$.

Nel seguente terzo esempio di successione, i termini sono numeri complessi:

$$z_1 = 1+i \quad z_2 = 1+2i \quad z_3 = 1+3i \quad \dots \quad z_n = 1+ni \quad \dots$$

E infine un quarto esempio. Questa volta ciascun termine della successione è una funzione:

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \quad \dots \quad f_n(x) = x^n \quad \dots$$

Nel seguito ci occuperemo esclusivamente di successioni i cui termini siano numeri

(si parla di "successioni numeriche");

anzi, supporremo sempre che si tratti di numeri reali (come nei primi due esempi).

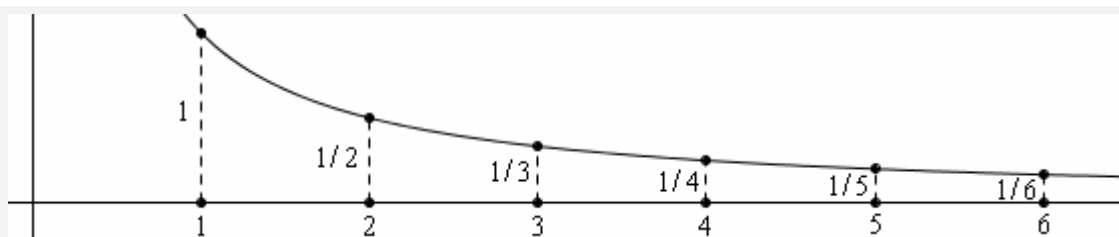
Inoltre, per semplicità, considereremo esclusivamente successioni definite su $\mathbb{N}$, oppure su $\mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ senza lo 0).

**Una successione può essere dunque interpretata come
UNA FUNZIONE AVENTE COME DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{N}$ DEI NUMERI NATURALI,
O UN SUO SOTTOINSIEME INFINITO D:
ad ogni numero naturale n del dominio corrisponde
uno ed un solo ben determinato "termine" (o "elemento") della successione,
per indicare il quale si può usare una lettera fissata dell'alfabeto, munita dell'indice n (es. a_n)**

Per visualizzare graficamente una successione, abbiamo sostanzialmente a disposizione due metodi.

Ognuno presenta vantaggi e svantaggi.

Li illustriamo nel seguente esempio, con riferimento alla successione di termine generale $a_n = \frac{1}{n}$:



Questo tipo di visualizzazione mette bene in evidenza il fatto che una successione è una funzione: a ogni numero naturale (in questo caso, non nullo) n , corrisponde uno e un solo ben determinato valore $a_n = 1/n$.

Il dominio della funzione è $\mathbb{N}^*$.

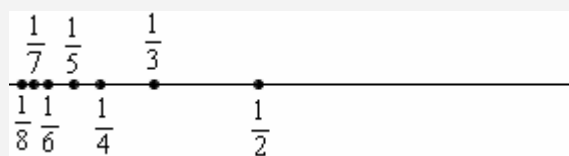
La differenza rispetto alle "normali" funzioni è che

in una successione non abbiamo una variabile **CONTINUA** x , ma una variabile **DISCRETA** n .

Emerge anche con efficacia che, al tendere di n all'infinito, il corrispondente termine a_n tende a 0.

Quest'altra visualizzazione mette bene in evidenza il fatto che i termini della successione costituiscono un insieme numerico:

$$\text{l'insieme } \left\{ a_n = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$



La figura mostra anche molto chiaramente che l'insieme $\{a_n\}$ ammette il punto 0 come punto di accumulazione non appartenente all'insieme).

II. PARTICOLARI, SEMPLICI SUCCESSIONI: LE PROGRESSIONI

A) PROGRESSIONI ARITMETICHE

Si dice “**progressione aritmetica**” una successione di numeri tali che la differenza fra ciascuno di essi e il precedente sia costante (quindi ciascun termine è ottenibile dal precedente addizionandogli una costante).

La **differenza costante** tra ogni termine di una progressione aritmetica e il precedente si dice “**ragione**” della progressione (indicheremo la ragione col simbolo d , dall’iniziale di “differenza”).

ESEMPI

La successione 2, 7, 12, 17, 22, 27, ... è una progressione aritmetica di ragione $d = 5$.

La successione $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots$ è una progressione aritmetica di ragione $d = -\frac{1}{2}$.

Data una progressione aritmetica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ di ragione d , è facilissimo verificare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} a_k - a_{k-1} &= d \text{ (per definizione)} \\ a_k &= a_{k-1} + d \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_r &= a_s + (r-s)d \end{aligned}$$

Se di una progressione aritmetica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi (ad esempio, soltanto i primi n termini), **parleremo di progressione aritmetica finita**.

Sussiste il seguente

TEOREMA

La somma dei termini di una progressione aritmetica finita è uguale alla semisomma dei termini estremi moltiplicata per il numero dei termini:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \\ a_k + a_{k+1} + \dots + a_n &= \frac{a_k + a_n}{2} \cdot (n - k + 1) \end{aligned}$$

Dimostrazione

La tecnica dimostrativa è perfettamente analoga a quella seguita per ricavare

la “Formula di Gauss” per la somma degli interi da 1 a n : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dunque:

$$\begin{array}{rcccc} S = & a_1 + & a_2 + & \dots & + a_n \\ S = & a_n + & a_{n-1} + & \dots & + a_1 \\ \hline 2S = & (a_1 + a_n) + & (a_1 + a_n) + & \dots & + (a_1 + a_n) \end{array}$$

dove risulta $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ per il fatto che $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$ e così per tutte le altre coppie di termini in colonna: $a_k + a_{n-k} = \dots = a_1 + a_n$

Se ora consideriamo che $2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ addendi}} = n(a_1 + a_n)$

avremo $\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$ C.V.D.

ESERCIZI di applicazione del teorema

Verificare che

- 1) la somma dei primi n numeri dispari: 1, 3, 5, 7, ..., $2n-1$ è uguale a n^2
- 2) la somma dei primi n numeri pari: 2, 4, 6, 8, ..., $2n$ è uguale a $n(n+1)$

B) PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Si dice “progressione geometrica” una successione di numeri tali che il rapporto fra ciascuno di essi e il precedente sia costante (quindi ciascun termine è ottenibile dal precedente moltiplicandolo per una costante).

Il rapporto costante tra ogni termine (escludendo, ovviamente, il primo) e il precedente si dice “**ragione**” della progressione:
lo indicheremo col simbolo q .

ESEMPI

La successione 2, 10, 50, 250, 1250, 6250, ... è una progressione geometrica di ragione $q = 5$.

La successione $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$ è una progressione geometrica di ragione $q = -\frac{1}{2}$.

Se la ragione q vale 1 i termini sono tutti uguali; escluderemo perciò questo caso, privo di interesse.

Se la ragione è positiva tutti i termini sono dello stesso segno; se è negativa, i termini hanno segno alterno.

Noi supporremo sempre, per semplicità, che la ragione q sia positiva e che tutti i termini siano positivi; ciò che diremo potrà essere in qualche modo poi “adattato” al caso in cui i termini abbiano segno alterno, ma adattamenti di questo genere saranno lasciati al lettore.

Data una progressione geometrica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ di ragione q , è facilissimo verificare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \text{ (per definizione)} \rightarrow a_k = a_{k-1} \cdot q$$

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

e, più in generale, $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Se di una progressione geometrica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi (ad esempio, soltanto i primi n termini), parleremo di progressione geometrica finita.

- **Determiniamo ora il valore della somma dei termini di una progressione geometrica finita.**

Cominciamo con l’osservare che

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

quindi il problema si riconduce a quello del calcolo della somma $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

Come si può facilmente verificare, vale la formula di scomposizione

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

e tale formula è vera per tutti gli $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ (NOTA)

NOTA:

Avevamo scritto che, con n pari, quando il nostro obiettivo è di scomporre “ad oltranza” il binomio $a^n - b^n$, l’applicazione della formula è poco conveniente,

ed è consigliabile piuttosto iniziare con una “scomposizione come differenza di quadrati”.

Ma non è una scomposizione “ad oltranza” che ci interessa in questo momento.

Ora, applicando la formula con $a = 1$ e $b = q$, avremo:

$$1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

da cui

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

In definitiva, la somma dei termini di una progressione geometrica finita di ragione q (oppure: **la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q**) è

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ESERCIZIO

Verifica che il prodotto P dei termini di una progressione geometrica finita $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

vale $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

III. SUCCESSIONI MONOTONE (CRESCENTI O DECRESCENTI); LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

• SUCCESSIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

Una successione $\{a_n\}$ si dice crescente (risp.: decrescente) se, per ogni $k \in \mathbb{N}$ (o, eventualmente, $\mathbb{N}^*$) è

$$a_k < a_{k+1} \text{ (risp.: } a_k > a_{k+1}\text{)}.$$

Se al posto di $<$, $>$ scriviamo $\leq$, $\geq$ otteniamo le def. di successione crescente (decrescente) “in senso lato”.

Ad esempio, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente (in senso stretto).

• Successioni limitate e illimitate; estremo superiore e inferiore di una successione; eventuale massimo e minimo di una successione

Tutti questi termini vanno riferiti all'insieme numerico costituito dai termini della successione considerata.

Ad esempio, la successione $\left\{a_n = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ è limitata sia inferiormente

(il suo estremo inferiore è 0) che superiormente (il suo estremo superiore, che ne è anche il massimo, è 1).

Invece la successione $\{a_n = n^2, \text{ con } n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$ è limitata inferiormente,

con estremo inferiore 0 che ne è anche il minimo, ma è illimitata superiormente (l'estremo superiore è $+\infty$).

• LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Una successione, come abbiamo visto, può essere pensata come una particolare funzione:

una funzione il cui dominio sia $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme infinito

(noi prenderemo sempre come dominio $\mathbb{N}$ oppure $\mathbb{N}^*$).

Spesso interessa chiedersi a quale valore tende a_n quando n diventa “molto grande”, “tende all'infinito”.

Ad esempio, è del tutto spontaneo affermare che

la successione $\left\{a_n = \frac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ tende a 0 al tendere di n a $+\infty$

mentre la successione $\left\{a_n = \frac{n+1}{n+2}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$ tende a 1 quando $n \rightarrow +\infty$.

Prima di tutto, osserviamo che il tendere a $+\infty$ di n (variabile “discreta”)

è, sotto un certo aspetto, diverso dal tendere a $+\infty$ di una variabile “continua” x ;

la variabile discreta assume solo CERTI valori, crescendo “a scatti”, “a salti”,

mentre una variabile continua cresce assumendo TUTTI i valori intermedi.

Per il resto, però, *nulla cambia nell'idea di base* che ci conduce alla nozione di limite:

abbiamo una variabile indipendente n (discreta anziché continua),

a cui facciamo assumere valori arbitrariamente alti,

e ci chiediamo che valore tende ad assumere il corrispondente termine a_n della successione.

La definizione precisa di “limite di una successione a_n quando n tende a $+\infty$ ” dovrà essere,

quindi, *perfettamente analoga* a quella di “limite di una funzione $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ ”.

Occorrerà soltanto qualche piccolo adattamento.

Aggiungiamo una banalissima osservazione:

nel caso di una variabile discreta n , i cui valori possono essere soltanto numeri naturali,

sarebbe assurdo pensare di far tendere n a $-\infty$, oppure ad un valore finito: questo è ben ovvio!

Quindi, evidentemente, le uniche definizioni che ci interesseranno saranno quelle di

“limite (finito o infinito) di una successione, quando n tende a $+\infty$ ”.

E per brevità, non essendo possibili equivoci, al posto di $+\infty$ scriveremo semplicemente ∞ .

DE	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$	$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n > \bar{n} \Rightarrow a_n - \ell < \varepsilon)$
FI	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$	$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M)$
NI	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$	$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n > \bar{n} \Rightarrow a_n < -M)$

Una successione si dice:

- **CONVERGENTE** se tende ad un limite finito,
- **DIVERGENTE** se tende a infinito,
- **INDETERMINATA** se non tende ad alcun limite.

Esempio: verificare, applicando la definizione, che la successione $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ tende a 1 per $n \rightarrow \infty$.

Impostiamo la disequazione $\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon$

con l'obiettivo di mostrare che esiste un numero naturale $\bar{n}$ tale che essa sia verificata per tutti gli $n > \bar{n}$.

$$\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon; \quad \left| \frac{n+1-n-2}{n+2} \right| < \varepsilon; \quad \left| -\frac{1}{n+2} \right| < \varepsilon \quad \frac{1}{n+2} < \varepsilon; \quad n+2 > \frac{1}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

Pertanto la verifica richiesta è positivamente conclusa:

si può prendere come $\bar{n}$ un qualsiasi intero fra quelli non inferiori al numero $\frac{1}{\varepsilon} - 2$.

TEOREMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONI

Estendono la loro validità alle successioni, purché si apportino lievi ed ovvie modifiche agli enunciati, i teoremi validi per i limiti delle funzioni. Citiamo in particolare:

- **Teorema di unicità del limite:**

Se una successione, per $n \rightarrow \infty$, tende ad un limite (finito o infinito), questo limite è unico

- **Teorema della permanenza del segno:**

Se una successione a_n , per $n \rightarrow \infty$, tende ad un limite (finito o infinito) diverso da 0, allora esiste un indice $\bar{n}$ tale che, $\forall n > \bar{n}$, il termine a_n mantiene lo stesso segno del limite

- **Teoremi del confronto**

Se esiste un indice $\bar{n}$ tale che, $\forall n > \bar{n}$, si ha $a_n \leq c_n \leq b_n$, e inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$,

allora è anche $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$

... ed enunciati analoghi agli altri due teoremi del confronto dimostrati per le funzioni

- **Teorema sull'esistenza del limite delle successioni monotone:**

Se una successione a_n è monotona (crescente o decrescente), in senso stretto o in senso lato, allora esiste certamente il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$,

e tale limite è uguale all'estremo superiore (se la succ. è crescente) o inferiore (se la succ. è decrescente) dell'insieme numerico $\{a_n\}$.

- **I teoremi sul limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente**

Per inciso, date due succ. a_n e b_n , per loro "somma" si intende la succ. di termine generale $c_n = a_n + b_n$. Analogamente per la differenza, il prodotto e il quoziente.

- **I teoremi sintetizzati da "pseudo-uguaglianze" (es. $1/\infty = 0 \dots$).**

- **Anche per le successioni valgono le stesse "forme di indecisione" già riscontrate per le funzioni.**

□ **E' ESTREMAMENTE UTILE il seguente TEOREMA, che permette di estendere, in un sol colpo, alle successioni, un mucchio di risultati già acquisiti per le funzioni:**

«Data una successione a_n , e presa una funzione $f(x)$

tale che i suoi valori quando x è intero positivo coincidano con quelli della successione,

ossia: tale che si abbia $f(n) = a_n$,

allora, se esiste il $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, sarà anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ »

OSSERVAZIONE

Il teorema vale anche se l'uguaglianza $f(n) = a_n$ vale soltanto "da un certo indice in poi"!

Esempio di applicazione - Determinare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n^3 + 1}$.

Si tratta di una F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, ma, considerata la funzione $y = \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 1}$ la quale,

per valori interi positivi di x , assume gli stessi valori della successione data,

poiché si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 1} = 0$, sarà pure $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n^3 + 1} = 0$.