I LIMITI

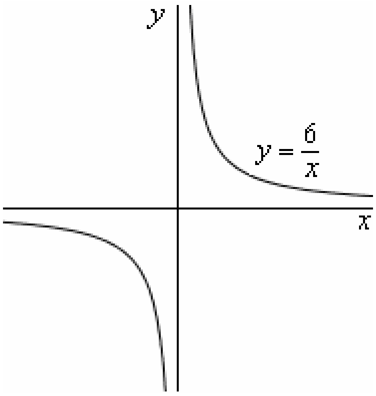
1. UNA RAPIDA INTRODUZIONE

Nella funzione $y=\frac{6}{x}$
quando x diventa *grande grande*
($x=1000,\ x=1000000,\ \ldots$)
la y corrispondente
diventa *piccola piccola*,
"si schiaccia a zero",
si avvicina "*moltissimo*" a 0.

Ciò può essere espresso,
in simboli, con la scrittura

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0}$$

che si legge:



"il limite, per x che tende a $+\infty$, della quantità $\frac{6}{x}$, è zero".

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0}$$

IL SIMBOLO DI LIMITE

$$\lim_{x\to \boxed{\text{qui scrivo a cosa tende } x}} \boxed{\text{qui scrivo l'espressione della funzione}} = \boxed{\text{qui scrivo a cosa tende } y}$$

"*per x che tende a ...*"

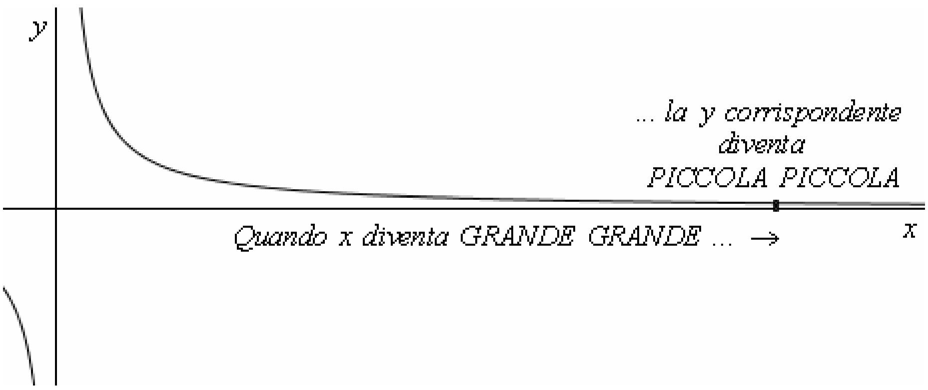
"tende" significa "si avvicina"

Cosa devo guardare, intuitivamente, per determinare un limite?

1) Posso guardare il grafico …

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=?$$

Faccio tendere x a $+\infty$,
ossia mi sposto, sull'asse x,
molto ma molto a destra …
… e vedo cosa fa la y.
In questo caso,
la y corrispondente
diventa piccola piccola!
Tende a 0! Il limite è 0.



2) Oppure, anche senza grafico,
faccio assumere alla x valori molto ma molto grandi
e mi chiedo quali valori assume la y corrispondente.
Tali valori della y sono piccolissimi!
Il limite è dunque 0.

$$x=1000 \ \rightarrow\ y=\frac{6}{1000}=0{,}006$$

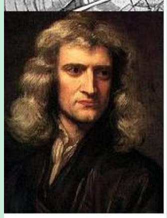
$$x=1000000 \ \rightarrow\ y=\frac{6}{1000000}=0{,}000006$$

**Ma dopo questa brevissima introduzione intuitiva,
quei verbi, avverbi e aggettivi che abbiamo utilizzato
("tendere", "avvicinarsi", "moltissimo", "piccola", "grande" …)
dovranno essere meglio precisati e, soprattutto,
inequivocabilmente QUANTIFICATI.**

**Inoltre le situazioni in cui si può parlare di "limite" sono assai svariate,
e quell' "avvicinarsi", quel "tendere", della *y* ad un certo valore,
può realizzarsi in modalità fra loro differenti.**

**Abbi pazienza, ti sottoporrò ora una sequenza di ESEMPI,
che saranno un "ANTIPASTO" PREZIOSO,
PRIMA DI ARRIVARE ALLA DEFINIZIONE,
perché ti faranno entrare a contatto con le curiose problematiche in gioco
e ti permetteranno così di capire per qual motivo,
nonostante questioni di questo tipo
si siano presentate agli studiosi fin dall'antichità classica,
una definizione soddisfacente di "limite" sia emersa soltanto nel XIX secolo,
a coronamento di un'avventura intellettuale millenaria,
appassionante quanto impegnativa.**


Archimede


Newton


Weierstrass

2. UNA RASSEGNA DI ESEMPI

Esempio 1

Fra le molte affascinanti formule che la Geometria ci propone, ce n'è anche una che permette,
nota la lunghezza ℓ_n del lato del poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r,
di ricavare la lunghezza ℓ_{2n} del lato del poligono regolare inscritto, avente numero di lati **doppio**.
Tale formula, ricavabile utilizzando in modo opportuno i teoremi di Pitagora e di Euclide, è la seguente:

$$\ell_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell_n{}^2}}$$

Supponiamo che la nostra circonferenza abbia raggio **unitario**: prendiamo, insomma, $r = 1$.
Partiamo dall'**esagono** regolare inscritto: $n = 6$.
E' noto che il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio: si ha dunque $\ell_6 = r = 1$.
Bene! Applicando ora la formula, potremo subito ricavare la misura del lato del **dodecagono** regolare inscritto:

$$\ell_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517638...$$

E iterando il procedimento, saremo poi in grado di calcolare le lunghezze
dei **lati dei poligoni regolari inscritti, aventi 24 lati, 48 lati, 96 lati …** :

$$\ell_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_{12}{}^2}} = 0{,}261052...$$

$$\ell_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_{24}{}^2}} = 0{,}130806...$$

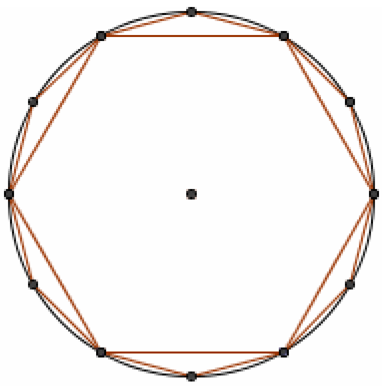
$$\ell_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_{48}{}^2}} = 0{,}065438...$$

Nella tabella seguente ci siamo serviti della conoscenza di $\ell_6, \ell_{12}, \ell_{24}, \ell_{48}, \ell_{96}, ...$
per ricavare i **perimetri** dei rispettivi poligoni:

$$(2p)_6 = \ell_6 \cdot 6 = 6, \quad (2p)_{12} = \ell_{12} \cdot 12 = 6{,}211657..., \quad (2p)_{24} = \ell_{24} \cdot 24 = 6{,}265257...$$

n	*lato*	*perimetro*	*n*	*lato*	*Perimetro*
6	**1**	**6**	768	**0,008181208…**	**6,283167784…**
12	**0,51763809…**	**6,211657082…**	1536	**0,004090613…**	**6,283180926…**
24	**0,261052384…**	**6,265257227…**	3072	**0,002045307…**	**6,283184212…**
48	**0,130806258…**	**6,278700406…**	6144	**0,001022654…**	**6,283185033…**
96	**0,065438166…**	**6,282063902…**	12288	**0,000511327…**	**6,283185237…**
192	**0,032723463…**	**6,282904945…**	…	…	…
384	**0,016362279…**	**6,283115216…**	…	…	…

La tabella mostra che **quando il numero di lati diventa molto alto,
il valore del perimetro, pur aumentando sempre,
presenta una tendenza a "stabilizzarsi"
in prossimità di un valore leggermente superiore a 6,28.**



Ciò è perfettamente comprensibile se pensiamo che,
**all'aumentare del numero di lati,
il poligono regolare inscritto tende a "riempire" sempre più il cerchio,
e quindi il suo perimetro tende ad approssimare sempre più
la lunghezza della circonferenza, ossia il numero**
$\mathbf{2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi = 6{,}283185...}$.

Considerata ora la successione

$$\begin{aligned}
a_1 &= \textit{perimetro dell'esagono regolare inscritto} = 6 \\
a_2 &= \textit{perimetro del dodecagono regolare inscritto} = 6{,}211657082... \\
a_3 &= \textit{perimetro del poligono regolare inscritto, con 24 lati} = 6{,}265257227... \\
a_4 &= \textit{perimetro del poligono regolare inscritto, con 48 lati} = 6{,}278700406... \\
&...
\end{aligned}$$

se si vuole indicare il fatto che

"il valore della quantità a_k, per valori molto alti di k, è assai prossimo al numero 2π"

si potrà utilizzare la scrittura: $\boxed{\lim_{k \to \infty} a_k = 2\pi}$

che si leggerà **"il limite, al tendere di k a infinito, di a_k, è 2π "**

Esempio 2

Consideriamo la successione il cui termine generale è

$$\boldsymbol{c_n = \frac{n+1}{n}, \quad con\ n = 1,\ 2,\ 3,\ ...}$$

I primi elementi della successione valgono:

$$c_1 = \frac{1+1}{1} = 2; \quad c_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5; \quad c_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} = 1{,}33333333...; \quad ...$$

Cosa accade al numero c_n quando *n* diventa molto, ma molto grande?

E' ben facile rispondere: **c_n si avvicina al valore 1**. Infatti

$$c_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

e la quantità $\frac{1}{n}$, al crescere di *n*, si fa sempre più piccola (= tende a zero), per cui

il numero

$$\boldsymbol{c_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}}$$

assumerà, se *n* viene preso grandissimo, valori molto, ma molto prossimi a 1.
Possiamo esprimere questo fatto scrivendo

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1}$$

Esempio 3

Consideriamo la funzione $y = f(x) = \frac{sen\,x}{x}$ dove *x* indica la misura in radianti di un arco.

Ad esempio, l'arco il cui angolo al centro corrispondente è di 30° misura, in radianti, $\frac{\pi}{6}$;

e con $x = \frac{\pi}{6}$ *si ha* $\frac{sen\,x}{x} = \frac{sen\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi} = \frac{3}{3{,}1415927...} = 0{,}9549296...$

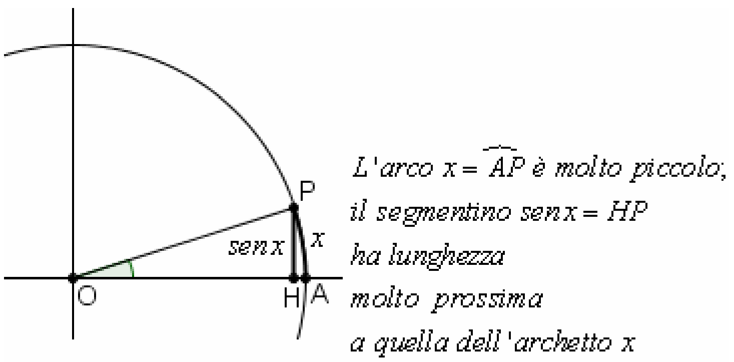
Ancora: l'arco, il cui angolo al centro corrispondente misura 18° (in radianti, $\pi/10$),
ha per seno la metà del lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza goniometrica.
Ma dalla Geometria si conosce che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza
è uguale alla sezione aurea del raggio (che, nel caso della circonferenza goniometrica, è unitario);
e la sezione aurea di un segmento si ottiene moltiplicando il segmento stesso per il fattore $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pertanto con $x = \frac{\pi}{10}$ *avremo* $sen\,x = sen\,\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, *da cui*

$$\frac{sen\,x}{x} = \frac{sen\frac{\pi}{10}}{\frac{\pi}{10}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\pi}{10}} = \frac{0{,}3090169...}{0{,}3141592...} = 0{,}9836315...$$

Per valori piccoli (= prossimi a 0) dell'arco *x*,
il segmentino $sen\,x$
quasi si confonde con l'archetto *x*:
il valore di $sen\,x$ è
leggermente inferiore, ma *molto vicino,*
al valore di *x*.

Pertanto, con *x* molto piccolo,
il valore del rapporto $\frac{sen\,x}{x}$
è molto prossimo a 1.



Ad esempio, con $x=0,001$ (l’arco x è un millesimo di radiante, ossia: l’arco x, rettificato, dà luogo ad un segmentino che è esattamente la millesima parte del raggio), si ha

$$sen\,x = sen\;0,001 = 0,00099999983... \quad \text{da cui} \quad \frac{sen\,x}{x} = \frac{sen\;0,001}{0,001} = 0,99999983...$$

Il fatto che la funzione $y=\frac{sen\,x}{x}$ assuma valori molto prossimi a 1

quando l’arco x è molto prossimo a 0, si può esprimere attraverso la scrittura

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1}$$

che si legge

“il limite, per x che tende a zero, di $\frac{sen\,x}{x}$, è uguale a 1”.

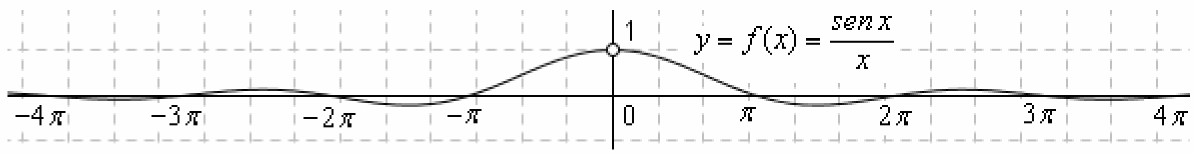
Osserviamo che, mentre gli esempi 1 e 2 riguardavano il limite di una **successione** (= sequenza) **numerica**, qui abbiamo invece considerato il limite di una **funzione di variabile reale**.

Riprenderemo il discorso “successioni” alla fine del capitolo,
concentrandoci di qui in avanti sulle funzioni di variabile reale
(*poco cambia per le successioni, che possono essere considerate funzioni con dominio* $\mathbb{N}$ *o* $\mathbb{N}^*$).

Se tracciamo (vedi figura sottostante) il grafico della funzione $y=f(x)=\frac{sen\,x}{x}$, avremo che,

quando x si avvicina (stiamo “viaggiando” sull’asse delle ascisse) al valore 0,
la y corrispondente si avvicina al valore 1.

Osserviamo che con $x=0$ la funzione $y=\frac{sen\,x}{x}$ non è definita.



Ancora con riferimento alla funzione $y=f(x)=\frac{sen\,x}{x}$, possiamo rilevare,

come ci suggeriscono tanto l’osservazione del grafico quanto semplici considerazioni quantitative,
che quando ci spostiamo sull’asse x “molto a destra” (x tendente all’infinito positivo)
oppure “molto a sinistra” (x tendente all’infinito negativo),
la y corrispondente continua ad andare su e giù intorno all’ordinata 0,
avvicinandosi e allontanandosi periodicamente da essa,
ma con **oscillazioni smorzate, la cui ampiezza diventa piccola a piacere.**
E’ allora del tutto spontaneo utilizzare le scritture

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}\frac{sen\,x}{x}=0;\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{sen\,x}{x}=0}$$

Poiché il tendere a 0 della funzione $\frac{sen\,x}{x}$, quando x tende all’infinito positivo o negativo,

avviene “per oscillazioni”, NON sarebbe corretto affermare che

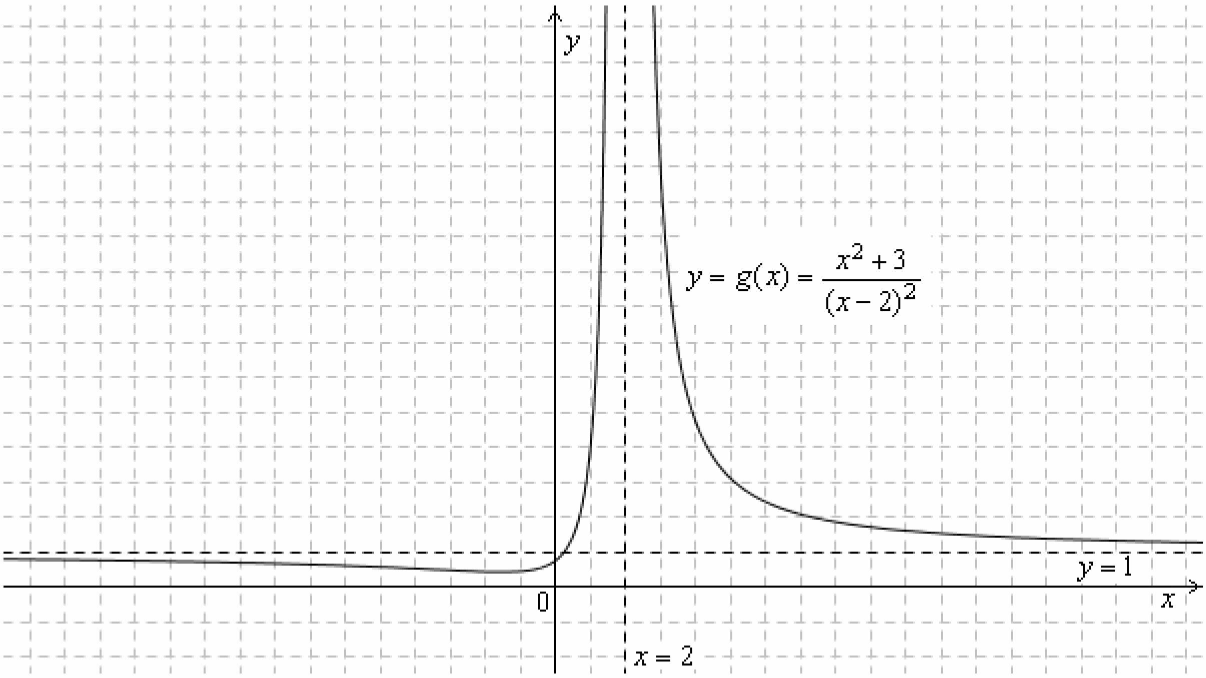
“quanto più x è grande in valore assoluto, tanto più il valore di $\frac{sen\,x}{x}$ è prossimo a 0”.

Al crescere di x in valore assoluto, *abbiamo una y corrispondente che si avvicina “**GLOBALMENTE**” a 0, ma il suo avvicinarsi a 0 NON ha un carattere “monotòno”.*

Osservazioni come questa sono molto importanti:
quando, più avanti, tenteremo di descrivere il concetto di limite in modo generale e preciso,
il nostro compito sarà tutt’altro che semplice, in quanto dovremo elaborare una definizione
nella quale possano rientrare anche situazioni del tipo di quella appena considerata,
in cui la *y*, pur presentando quella che noi “sentiamo” essere una “tendenza a limite”,
non mostra un comportamento “unidirezionale”.

Esempio 4

La figura sottostante mostra il diagramma della funzione $y = g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x-2)^2}$:



L'osservazione del grafico, accompagnata da considerazioni di carattere quantitativo, ci suggerisce che valgono i limiti seguenti:

$$\boxed{\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+3}{(x-2)^2} = +\infty}$$

"il limite di $g(x)$, per x che tende a 2, è $+\infty$" , vale a dire:
quando x è vicinissimo a 2, il valore di $g(x)$, ossia della y corrispondente, tende a $+\infty$ nel senso che si fa altissimo, tanto alto da "sfondare", all'insù, qualunque tetto prefissato.

Un po' di numeri:

x	$y = g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x-2)^2}$
2,5	37
2,1	741
2,05	2881
2,03	7912,…
2,0001	700040001

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{(x-2)^2} = 1}$$

"il limite di $g(x)$, per x che tende a $+\infty$, è 1", vale a dire:
quando x diventa grandissimo (ci stiamo spostando, sull'asse delle ascisse, molto a destra), allora la y corrispondente si avvicina moltissimo a 1.

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{(x-2)^2} = 1}$$

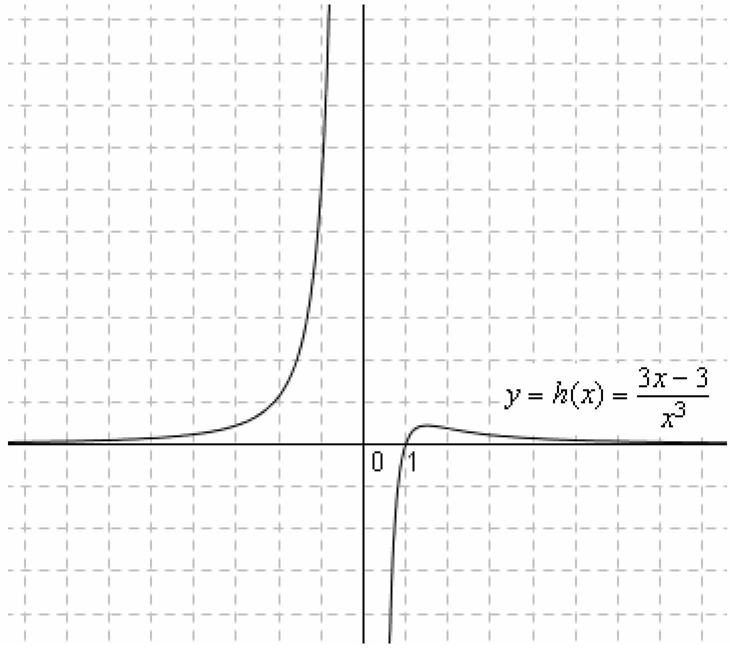
"il limite di $g(x)$, per x che tende a $-\infty$, è 1", vale a dire:
quando x diventa negativo ma molto grande in valore assoluto (ci stiamo spostando, sull'asse delle ascisse, molto a sinistra), allora la y corrispondente si avvicina moltissimo a 1.

Esempio 5

Consideriamo la funzione

$$y = h(x) = \frac{3x-3}{x^3}$$

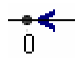
e tracciamone il diagramma.



L'osservazione del grafico
(accompagnata da considerazioni numeriche)
ci suggerisce che:

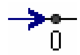
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x-3}{x^3} = -\infty}$$

dove scrivere $x \to 0^+$ significa che si pensa a x tendente a 0 **"da destra", "per valori positivi"**



$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x-3}{x^3} = +\infty}$$

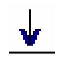
dove scrivere $x \to 0^-$ significa che si pensa a x tendente a 0 **"da sinistra", "per valori negativi"**



$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x-3}{x^3} = 0^+}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x-3}{x^3} = 0^+}$$

dove scrivere che il limite è 0^+ significa indicare che la funzione (= **la *y*) tende a 0 "dall'alto"**

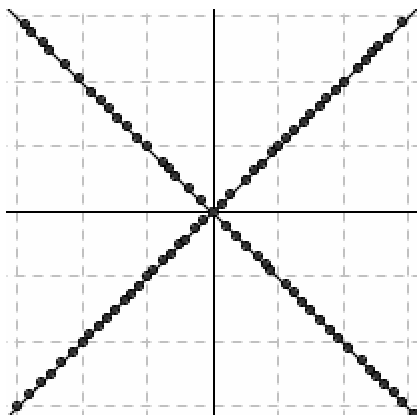


Esempio 6

E' veramente bizzarra la funzione definita nel modo seguente:

$$L(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è razionale } (x \in \mathbb{Q}) \\ -x & \text{se } x \text{ è irrazionale } (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Poiché qualsiasi intervallo della "number line"
contiene sia infiniti numeri razionali,
che infiniti numeri irrazionali,
il grafico della $L(x)$, che è distribuito su due rette,
si presenta tutto "frammentato":
se facciamo variare x sull'asse delle ascisse,
assisteremo ad un frenetico "*saltellare*"
della y corrispondente, da una retta all'altra.



Cosa possiamo affermare riguardo al comportamento della funzione, per x che tende a 0?
Facendo tendere x a 0, i "saltelli" della y sono sempre più minuscoli come "ampiezza":
la y saltella entro una fascia di ordinate sempre più ristretta, intorno all'ordinata 0.
Anche in questo caso particolarmente strambo, appare dunque ragionevole accettare come corretta la scrittura

$$\boxed{\lim_{x\to 0} L(x) = 0}$$

**Quando dunque ci decideremo, al termine di questa esplorazione preliminare,
a dare una definizione generale, precisa e rigorosa, del concetto di "limite",
dovremo fare in modo che tale definizione non escluda le situazioni come quella appena proposta**.

Esempio 7

$$\boxed{y = m(x) = sen\frac{\pi}{x}}$$

Il dominio di questa funzione è $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
I valori dell'ordinata *y* non possono sconfinare all'esterno dell'intervallo $[-1, 1]$.
Per disegnare il grafico della funzione è utile cercarne le intersezioni con l'asse delle ascisse,
ossia risolvere l'equazione $y = 0$.

$$y = 0 \iff sen\frac{\pi}{x} = 0; \quad \frac{\pi}{x} = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{1}{x} = k \ (k \in \mathbb{Z}); \quad x = \frac{1}{k} \ (k \in \mathbb{Z}^*); \quad x = \pm 1, \ x = \pm\frac{1}{2}, \ x = \pm\frac{1}{3}, \ x = \pm\frac{1}{4} \ldots$$

Quindi la *y* si annulla infinite volte, e anzi si annulla infinite volte nell'intervallo fra l'ascissa –1 e l'ascissa 1.
Le ascisse in corrispondenza delle quali la *y* si annulla … si "addensano" intorno all'ascissa 0.

Seguiamo ora il variare della y, quando x varia da 1 fino a 0.

- *Se facciamo variare x da 1 a 1/2,*
  la quantità $\frac{\pi}{x}$ varierà da $\frac{\pi}{1} = \pi$ a $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

  e perciò, nel frattempo, $y = sen\frac{\pi}{x}$ *dovrà assumere una volta il valore* -1.

- *Se facciamo variare x da 1/2 a 1/3,*
  la quantità $\frac{\pi}{x}$ varierà da $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ a $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

  e perciò, nel frattempo, $y = sen\frac{\pi}{x}$ *dovrà assumere una volta il valore* $+1$.

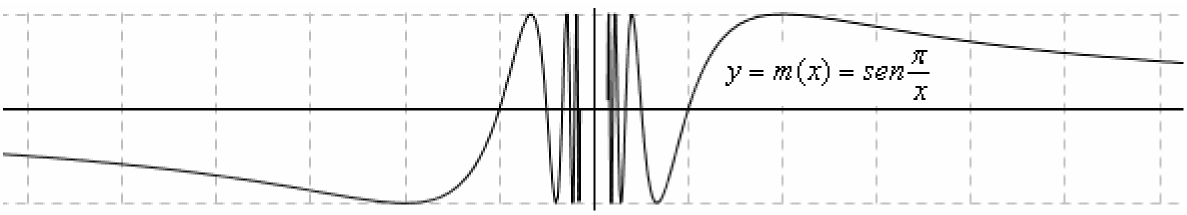
- *Se facciamo variare x da 1/3 a 1/4,*
  la quantità $\frac{\pi}{x}$ varierà da $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$ a $\frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

  e perciò, nel frattempo, $y = sen\frac{\pi}{x}$ *dovrà assumere una volta il valore* -1

- *… e così via …*

Insomma,
facendo decrescere x a partire dal valore $x = 1$, la y corrispondente assumerà, successivamente, i valori:
$0, \ -1, \ 0, \ +1, \ 0, \ -1, \ 0, \ +1, \ldots$

Il grafico sarà perciò il seguente (è chiaro che il prossimità dell'ascissa 0 possiamo solo immaginarcelo!):



Di fronte ora alla scrittura

$$\lim_{x \to 0} sen\frac{\pi}{x} = \ldots$$

come riempiremo i puntini?
Poiché, al tendere di x a 0, la y corrispondente continua ad oscillare
(con "frequenza" delle oscillazioni sempre più frenetica)
percorrendo ad ogni oscillazione *tutta la banda di ordinate* tra –1 e 1,
essa *non si approssima a nessuna specifica ordinata*:
appare ragionevole convenire che il limite proposto NON ESISTE.

Esempio 8

$$\boxed{y = n(x) = x \cdot sen\frac{\pi}{x}}$$

Per tracciare il grafico di questa funzione, si può pensare di partire dai grafici di $y = x$ e di $y = sen\,\frac{\pi}{x}$.

Preso un valore di x, l'ordinata corrispondente si otterrà moltiplicando le due ordinate x e $sen\,\frac{\pi}{x}$.

Ma come si modifica l'ordinata x,
allorquando viene moltiplicata alternativamente per i valori $0,\ -1,\ 0,\ +1,\ 0,\ -1,\ 0,\ +1, \ldots$,
nonché per tutti i valori intermedi tra -1 e $+1$?
Facile:

- quando l'ordinata x viene moltiplicata per $+1$, resta invariata
- quando viene moltiplicata per un numero compreso fra 0 e 1, diminuisce
- quando viene moltiplicata per 0, diventa uguale a 0
- quando viene moltiplicata per -1, cambia di segno diventando $-x$
- quando viene moltiplicata per un numero compreso fra 0 e -1,
  cambia di segno e diminuisce in valore assoluto.

… Oppure, si può pensare a come si modifica l'ordinata $sen\,\frac{\pi}{x}$, allorquando viene moltiplicata per x:

- quando l'ordinata originaria è uguale a 1, dopo la moltiplicazione diventa uguale a x;
- quando l'ordinata originaria è uguale a 0, dopo la moltiplicazione resta uguale a 0;
- quando l'ordinata originaria è compresa fra 0 e 1, dopo la moltiplicazione risulta compresa fra 0 e x;
- quando l'ordinata originaria è uguale a -1, dopo la moltiplicazione diventa uguale a $-x$;
- quando l'ordinata originaria è compresa fra 0 e -1, dopo la moltiplicazione risulta compresa fra 0 e $-x$.

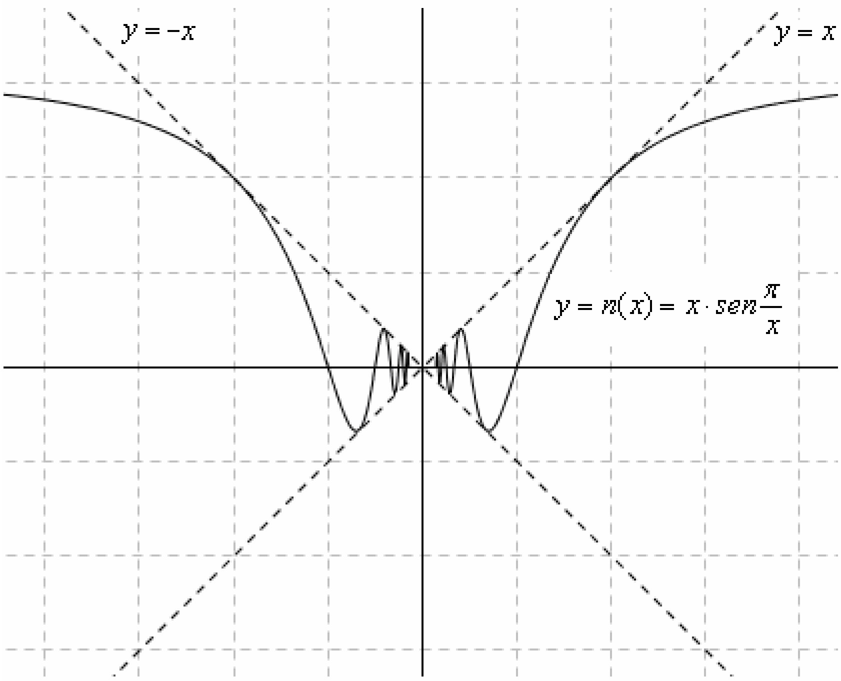
Possiamo anche considerare il fatto che

$$-1 \le sen\frac{\pi}{x} \le 1 \;\Rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} con\ \ x > 0:\ -x \le x \cdot sen\frac{\pi}{x} \le x \\ con\ \ x < 0:\ -x \ge x \cdot sen\frac{\pi}{x} \ge x \end{array} \right.$$

o in alternativa:

$$-1 \le sen\frac{\pi}{x} \le 1 \Rightarrow \left| sen\frac{\pi}{x} \right| \le 1 \Rightarrow |x| \cdot \left| sen\frac{\pi}{x} \right| \le |x| \Rightarrow \left| x \cdot sen\frac{\pi}{x} \right| \le |x|$$

Il grafico sarà perciò quello qui sotto raffigurato
(è chiaro che in prossimità dell'origine possiamo solo immaginarcelo con gli occhi della mente …):



Di fronte ora alla scrittura

$$\lim_{x \to 0} x \cdot sen\frac{\pi}{x} = \ldots$$

è del tutto spontaneo convenire
che il limite valga 0.

Infatti si osserva che

*al tendere di x a 0,
la y corrispondente
continua ad oscillare
(con "frequenza" crescente),
ma le oscillazioni hanno
ampiezza sempre più piccola,
cosicché finiscono per circoscriversi
in fasce di ordinate
sempre più ristrette,
in prossimità dell'ordinata 0.*

Esempio 9a

$y = \text{"parte intera di } x\text{"} = \text{int}(x) = [x] = E(x)$

Questa funzione è definita come segue:

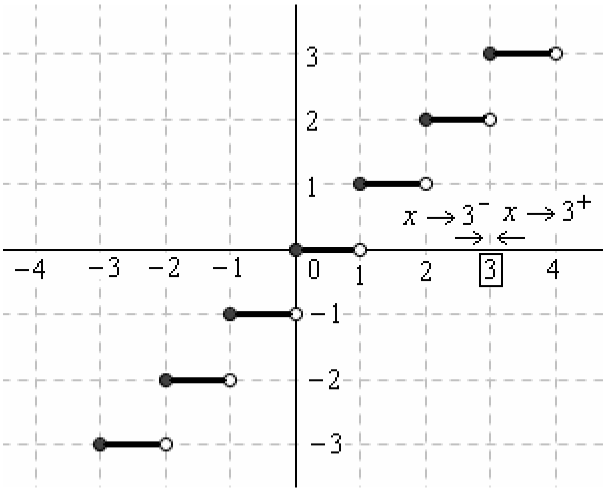
$E(x) = \text{il massimo intero relativo che non supera } x$

Esempi:

$E(7,59) = 7; \quad E(16/3) = 5; \quad E(\sqrt{3}) = 1;$
$E(\pi) = 3; \quad E(5) = 5;$
$E(-0,2) = -1; \quad E(-\pi) = -4;$
$E(-\sqrt{3}) = -2; \quad E(-7) = -7$

Quando facciamo tendere l'ascissa x
ad un valore intero, tanto per fare un esempio a 3,
dobbiamo distinguere fra
"**limite sinistro**" ($x \to 3^-$, x tende a 3 mantenendosi <3)
e "**limite destro**" ($x \to 3^+$, x tende a 3 mantenendosi >3)

$\lim_{x \to 3^-} E(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 3^+} E(x) = 3$



$\lim_{x \to 3^-} E(x) = 2$

$\lim_{x \to 3^+} E(x) = 3$

Esempio 9b

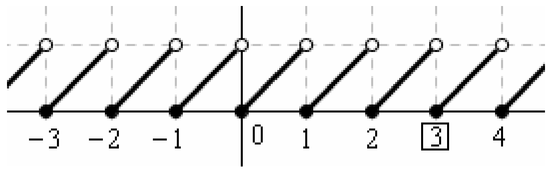
$y = \text{"mantissa di } x\text{"} = m(x)$

è definita come segue:

$m(x) = x - E(x)$

Esempi:

$m(7,59) = 0,59;$
$m(16/3) = m(3,33333...) = 0,33333...;$
$m(\sqrt{3}) = 0,7320508...; \quad m(\pi) = 0,1415927...;$
$m(5) = 0;$
$m(-0,2) = -0,8; \quad m(-\pi) = 0,8584072...;$
$m(-\sqrt{3}) = 0,2679491...; \quad m(-7) = 0$



$\lim_{x \to 3^-} m(x) = 1$

$\lim_{x \to 3^+} m(x) = 0$

Esempio 9c

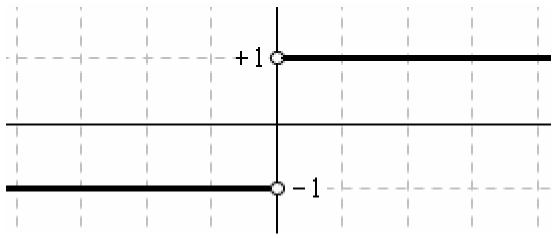
$y = \text{"signum } x\text{"}$

è definita come segue:

$$signum(x) = \begin{cases} +1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \\ non\ esiste\ con\ x = 0 \end{cases}$$

Si può anche scrivere, equivalentemente:

$$signum(x) = \frac{|x|}{x}$$



$\lim_{x \to 0^-} signum(x) = -1$

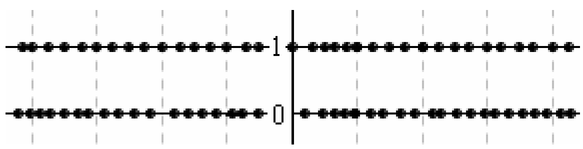
$\lim_{x \to 0^+} signum(x) = 1$

Esempio 10

La funzione di Dirichlet

è definita come segue:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & se\ x\ è\ razionale\ (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & se\ x\ è\ irrazionale\ (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0} D(x) = NON\ ESISTE$

$\lim_{x \to \infty} D(x) = NON\ ESISTE$