3. QUANDO IL LIMITE E' … BANALE: LA "CONTINUITA'"

Nel caso di una funzione reale di variabile reale,
quando si fa tendere x ad un valore finito x_0 appartenente al dominio D della funzione,
il caso di gran lunga più frequente è che la y tenda ad un altro valore finito,
quello che si ottiene, banalmente, assegnando a x il valore x_0,
ossia ponendo $x = x_0$ nell'espressione della funzione e svolgendo i calcoli.
Si dice allora che la funzione in esame è "continua in x_0":

$$y = f(x) \text{ continua in } x_0 \in \mathrm{D} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Lo ribadiamo: **la continuità, per le funzioni di uso comune, è la "regola", la discontinuità è l'eccezione.**

Ad esempio, una funzione polinomiale è continua in ogni punto x_0 del suo dominio (che è poi tutto $\mathbb{R}$).
Nella figura qui a destra è rappresentata la funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

che ha appunto questa proprietà:

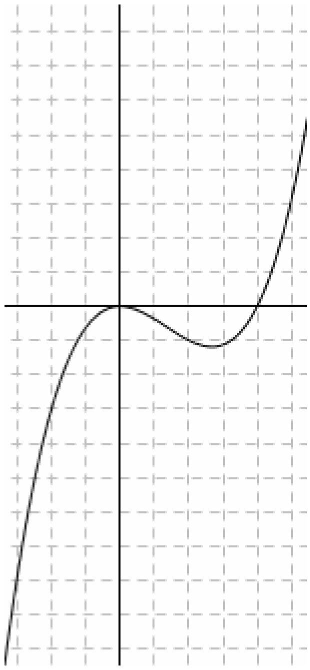
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) = f(2) = \frac{1}{8}\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) = f(1) = \frac{1}{8}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) = f(0) = \frac{1}{8}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) = f(-3) = \frac{1}{8}\cdot(-27) - \frac{1}{2}\cdot 9 = -\frac{27}{8} - \frac{9}{2} = \frac{-27-36}{8} = -\frac{63}{8}$$

ecc. ecc. ecc.



Continuità su di un intervallo =
= continuità in ogni punto di quell'intervallo.

La continuità di una funzione *su tutto un intervallo* può essere descritta, in modo poco "matematico" ma molto intuitivo, come "la possibilità di disegnare il grafico senza mai distaccare la matita dal foglio"

A volte si parla di "**continuità a sinistra**" **o** "**a destra**" in un punto x_0:

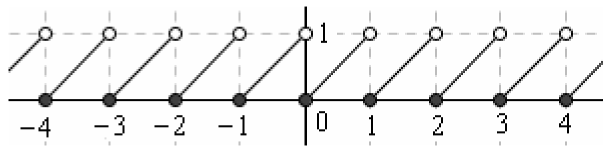
$$y = f(x) \text{ continua a sinistra in } x_0 \in \mathrm{D} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$y = f(x) \text{ continua a destra in } x_0 \in \mathrm{D} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

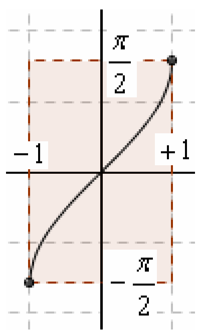
Ad esempio, la funzione "mantissa" $y = m(x)$ è continua a destra, ma è discontinua a sinistra, in corrispondenza di ogni valore x_0 intero.

$$\lim_{x\to 3^+} m(x) = 0 = f(3);$$

$$\textit{invece } \lim_{x\to 3^-} m(x) = 1 \neq f(3)$$



Ancora: la funzione $y = arc\ sen\ x$ è continua su tutto il suo dominio $\mathrm{D} = [-1, +1]$.
In corrispondenza delle due estremità del dominio, è più corretto parlare di continuità "unilaterale": continuità a destra, in $x = -1$; continuità a sinistra, in $x = +1$



$$\lim_{x\to -1^+} arc\ sin\ x = -\frac{\pi}{2} = arc\ sin\ (-1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} arc\ sin\ x = \frac{\pi}{2} = arc\ sin\ (+1)$$