6. ESERCIZI SUI LIMITI DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO

A dire il vero, qualcuno potrebbe sostenere che assegnare esercizi, a questo livello, sia prematuro.

Eh sì, perché noi fino ad ora abbiamo dato una presentazione dell'argomento "limiti" *puramente intuitiva*, ma *NON* abbiamo ancora fissato definizioni precise, e non abbiamo ancora dimostrato alcun teorema.

Purtuttavia, prima di affrontare i paragrafi successivi, che saranno dedicati proprio a questa definizione e a questi teoremi, sembra opportuno, dal punto di vista didattico, fare un po' di "pratica" per vedere se i concetti espressi nel precedente approccio intuitivo sono stati compresi.

Ti propongo allora una rassegna di esercizietti, nei quali ragionerai un po' "alla buona" basandoti su quanto detto fin qui e facendo considerazioni di puro "buon senso"; vedrai che riuscirai comunque a determinare i risultati corretti, anche se, in effetti, saranno solo i paragrafi seguenti a giustificare in modo razionalmente impeccabile procedimenti e conclusioni.

Facciamo qualche esempio.

ESEMPIO 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-5}{x-2}=?$

Quando faccio tendere x a 2, cioè quando faccio assumere a x valori prossimi a 2,

♪ il valore del numeratore $x-5$ si avvicinerà a $2-5=-3$

♫ mentre il denominatore $x-2$ si avvicinerà a $2-2=0$.

Dal punto di vista pratico, "operativo", possiamo illustrare tutto ciò con degli "ovali" o dei "rettangolini" (oppure servendoci di opportune parentesi) e delle "freccette", nel modo seguente:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overset{\displaystyle -3}{\uparrow}\atop (x-5)}{\underset{\displaystyle 0}{\downarrow}\atop \!\!(x-2)}=?\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\overset{-3}{\uparrow}\atop \boxed{x-5}}{\boxed{x-2}\atop \underset{0}{\downarrow}}=?\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x-5}^{\overset{-3}{\uparrow}}}{\underbrace{x-2}_{\underset{0}{\downarrow}}}=?$$

Ma allora, il valore della frazione, *a cosa* si avvicinerà?
Un numero vicinissimo a -3, diviso per un numero vicinissimo a 0, dà un numero grandissimo:

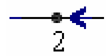
$$\frac{-3}{0}=\infty \quad\text{nel senso di}\quad \frac{\textit{un numero vicinissimo a } -3}{\textit{un numero vicinissimo a } 0}=\textit{un numero grandissimo (in valore assoluto)}.$$

Avremo dunque

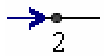
$$\lim_{x\to 2}\frac{x-5}{x-2}=\infty \qquad \left(\frac{-3}{0}=\infty\right)$$

ma ATTENZIONE: NON sarebbe corretto, vedendo a numeratore quel segno "−", dire che il limite è $-\infty$.
Infatti, il denominatore $x-2$, che si avvicina a 0, può tendere a 0:

♪ per valori positivi (se facciamo assumere a x valori prossimi a 2 ma maggiori di 2, ad esempio: $x=2{,}01$; $x=2{,}0000001$; ... insomma: se facciamo tendere a x a 2 "da destra")



♫ oppure per valori negativi (se facciamo assumere a x valori prossimi a 2 ma minori di 2, ad esempio: $x=1{,}99$; $x=1{,}9999999$; ... insomma: se facciamo tendere a x a 2 "da sinistra")



E' perciò ESATTO scrivere $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\overset{-3}{\uparrow}\atop\boxed{x-5}}{\boxed{x-2}\atop\underset{0}{\downarrow}}=\infty$

ma, SE VOGLIAMO ESSERE PIÙ PRECISI, DOVREMO DISTINGUERE I DUE CASI del limite destro ($x\to 2^+$) e del limite sinistro ($x\to 2^-$)

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{-3}{\uparrow}\atop\boxed{x-5}}{\boxed{x-2}\atop\underset{0^+}{\downarrow}}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{-3}{\uparrow}\atop\boxed{x-5}}{\boxed{x-2}\atop\underset{0^-}{\downarrow}}=-\infty$$

Osserviamo che, nel primo caso, avremmo avuto, più precisamente, $\overset{-3^+}{\uparrow}\atop\boxed{x-5}$

e nel secondo caso invece $\overset{-3^-}{\uparrow}\atop\boxed{x-5}$

ma sarebbe stato DEL TUTTO INUTILE fare la distinzione, in quanto, comunque, *tanto* un numero leggermente maggiore di -3 *quanto* un numero leggermente minore di -3 sono *negativi*!

ESEMPIO 2) $\lim_{x\to -5} \frac{\sqrt{x+9}}{x+3} = ?$

Avremo: $$\lim_{x\to -5} \frac{\overset{\sqrt{4}=2}{\overset{\uparrow}{\boxed{\sqrt{x+9}}}}}{\underset{-2}{\underset{\downarrow}{\boxed{x+3}}}} = -1$$

Si è trattato di un caso banale,
non si è presentata nessuna delle situazioni speciali trattate nel paragrafo dedicato alle "pseudo-uguaglianze".

ESEMPIO 3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+7}{x^2-1} = ?$

Sia il numeratore che il denominatore tendono all'infinito: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{+\infty}{\overset{\uparrow}{\boxed{3x+7}}}}{\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^2-1}}}} = ?$

E quindi siamo di fronte a una forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

IMPORTANTE

Noi **nei risultati alla fine della rassegna,**
qualora l'esercizio porti ad una Forma di Indeterminazione,

- scriveremo innanzitutto che si è trovata, appunto, una forma indeterminata (F.I.),
- poi ne scriveremo anche il "tipo" (in questo caso, $[\infty/\infty]$)
- e infine riporteremo pure il valore corretto del limite,

dalla individuazione del quale, tuttavia, LO STUDENTE È PER ORA "ESENTATO"
in quanto, in generale, essa presuppone conoscenze che verranno dai PARAGRAFI SUCCESSIVI.

E' pur vero che almeno in alcune di questi situazioni *si potrebbe fin d'ora*,
ragionando come si crede opportuno,
o basandosi su tecniche esposte alle pagine precedenti,
tentare di stabilire quanto valga il limite in questione.

Nel nostro specifico ultimo esempio, per il fatto che il Denominatore ha grado maggiore del Numeratore,
si capisce che D tenderà all'infinito più rapidamente rispetto ad N e che quindi il limite sarà 0:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{+\infty}{\overset{\uparrow}{\boxed{3x+7}}}}{\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^2-1}}}} = 0$$

PIU'
RAPIDA-
MENTE

… oppure si potrebbe procedere per raccoglimenti,
come in un caso dello stesso tipo esaminato qualche pagina addietro:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{+\infty}{\overset{\uparrow}{\boxed{3x+7}}}}{\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x^2-1}}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(3+\overset{0}{\overset{\uparrow}{\boxed{\frac{7}{x}}}}\right)}{\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{x}}}\,{}^{\cancel{2}}\left(1-\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{1}{x^2}}}}\right)} = 0$$

In altre situazioni la determinazione del limite è assai più problematica.