10. FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO

$$\boxed{f \text{ continua in } x_0 \overset{def.}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

oppure:

$$\boxed{f \text{ continua in } x_0 \overset{def.}{\Leftrightarrow} \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)}$$

Il concetto è veramente fondamentale e quindi andiamo ad analizzarlo nei dettagli.

Dunque una funzione è continua in un punto x_0 se e solo se, per definizione:

- è definita in x_0
- tende a limite, per x che tende a x_0;
- tale limite coincide col valore che la funzione assume con $x = x_0$

Possiamo anche dire che

$$f \text{ continua in } x_0 \overset{def.}{\Leftrightarrow} \text{esistono sia } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ che } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ e sono entrambi uguali a } f(x_0)$$

Diciamo che per le funzioni che si utilizzano più frequentemente
(ottenute operando in svariati modi su funzioni algebriche, goniometriche, logaritmiche, esponenziali …)
la continuità è "la norma", mentre la discontinuità è "l'eccezione".
Per questo motivo, il concetto di continuità si comprende meglio attraverso i CONTROesempi,
cioè gli esempi di DIScontinuità.

I TRE TIPI DI DISCONTINUITÀ

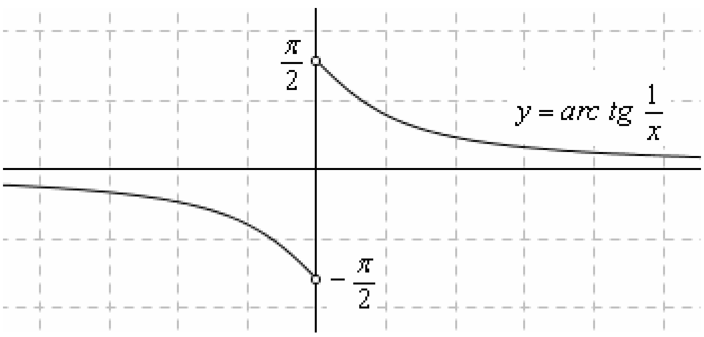
Si ha una **discontinuità di 1^a specie o di tipo "salto"**
quando esistono, al tendere di x a x_0, sia il limite sinistro che il limite destro,
e sono entrambi finiti, ma sono diversi fra loro,
cosicché nell'attraversamento dell'ascissa x_0 si ha, appunto, un "salto",
uguale alla differenza fra il limite destro e quello sinistro.
Esempi:

$$f(x) = arc\ tg\ \frac{1}{x}.$$

Questa funzione $f(x)$
ha una discontinuità di 1^a specie, o di tipo "salto",
in $x_0 = 0$, in quanto

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Il salto vale dunque $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

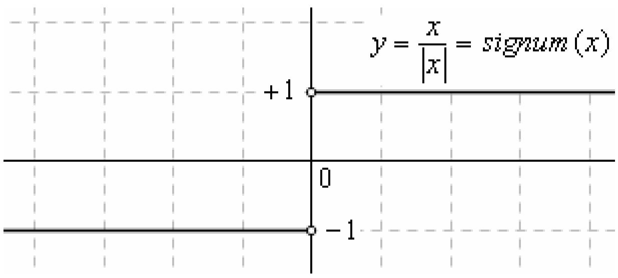


$$g(x) = \frac{x}{|x|} = signum(x)$$

Questa funzione $g(x)$
ha una discontinuità di 1^a specie, o di tipo "salto",
in $x_0 = 0$:

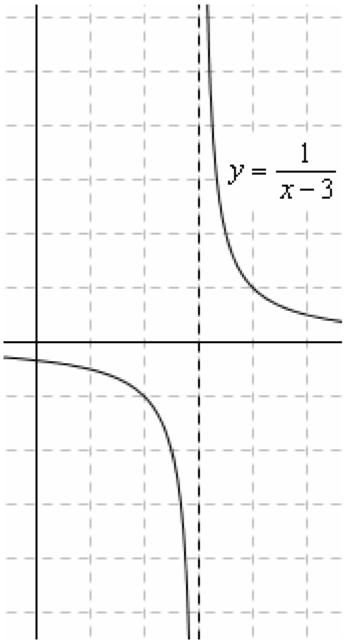
$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} g(x) = +1$$

Il salto della $g(x)$ nell'origine vale 2

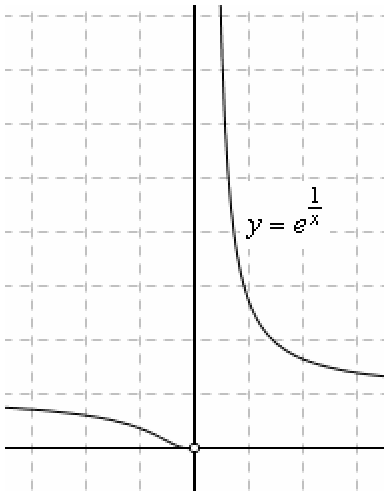


Si ha una **discontinuità di 2^a specie**
quando, al tendere di x a x_0, almeno uno fra i due limiti sinistro e destro
o non esiste, oppure esiste ma è infinito.
Esempi:

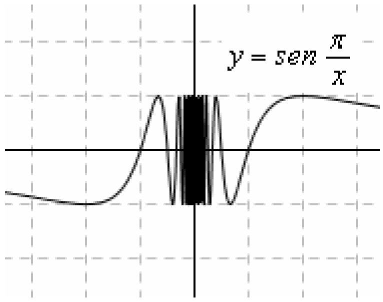
$y = \dfrac{1}{x-3}$
ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 3$
(limiti sinistro e destro infiniti)



$y = e^{\frac{1}{x}}$
ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 0$
(il limite destro è infinito)



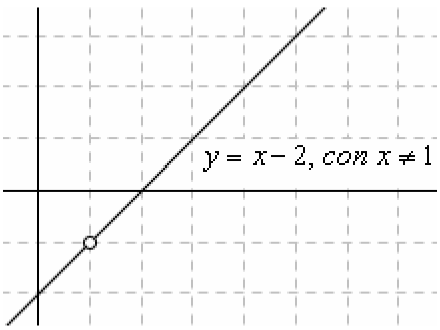
$y = sen\,\dfrac{\pi}{x}$
ha una discontinuità di 2^a specie
in $x_0 = 0$
(il limite non esiste)



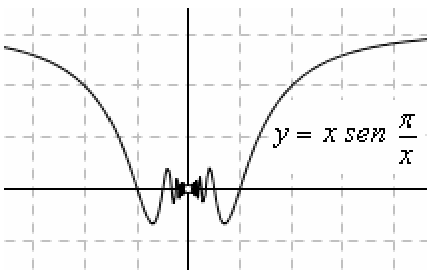
Si ha una **discontinuità di 3^a specie (discontinuità di tipo "buco", discontinuità "eliminabile")**
quando, al tendere di x a x_0,
la funzione tende ad un limite finito $\ell \in \mathbb{R}$,
che però non coincide con $f(x_0)$,
- o per il fatto che $f(x_0) \neq \ell$
- oppure per il fatto che $f(x_0)$ non esiste, cioè la funzione non è definita in x_0.

Esempi:

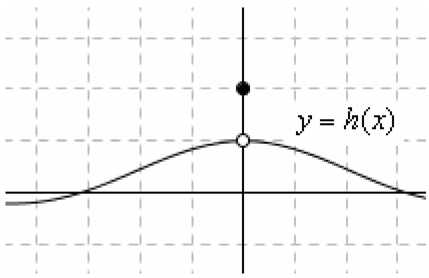
$y = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} =$
$= x-2,\ ma\ con\ x \neq 1$
("retta col buco":
discontinuità di 3^a specie
in $x = 1$)



$h(x) = x\ sen\dfrac{\pi}{x}$
$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0,$
ma $h(0)$ non esiste
(discontinuità di 3^a specie
in $x = 0$)



$s(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,x}{x} & con\ x \neq 0 \\ 2 & con\ x = 0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to 0} s(x) = 1,$
ma $s(0) = 2$



DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN INSIEME

Una funzione $y = f(x)$ si dice continua in un insieme E (o "su di un insieme E"),
se è continua *in ogni punto di* E.

CONTINUITÀ SUL LORO DOMINIO DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Sono continue su tutto il loro dominio (= in tutti i punti del loro dominio) le seguenti funzioni:
(qualche dimostrazione è riportata più avanti, le altre dimostrazioni sono omesse)

funzione	dominio
$f(x)=k$	$D=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D=\mathbb{R}$
$f(x)=P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$	$D=\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ con $P_i(x)$ polinomi	$D=\left\{x\in\mathbb{R}\ \text{tali che}\ P_2(x)\neq 0\right\}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$D=\left\langle\begin{array}{ll}[0,+\infty) & \text{se } n \text{ è pari}\\ \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari}\end{array}\right.$
$f(x)=sen\,x$	$D=\mathbb{R}$
$f(x)=cos\,x$	$D=\mathbb{R}$
$f(x)=tg\,x=\dfrac{sen\,x}{cos\,x}$	$D=\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ con\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
$f(x)=cotg\,x=\dfrac{cos\,x}{sen\,x}$	$D=\mathbb{R}-\left\{k\pi,\ con\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
$f(x)=arc\,sen\,x$	$D=[-1,1]$; valori in $[-\pi/2,\pi/2]$
$f(x)=arc\,cos\,x$	$D=[-1,1]$; valori in $[0,\pi]$
$f(x)=arc\,tg\,x$	$D=(-\infty,+\infty)$; valori in $(-\pi/2,\pi/2)$
$f(x)=arc\,cotg\,x$	$D=(-\infty,+\infty)$; valori in $(0,\pi)$
$f(x)=a^x\ con\ a>0$, in particolare $y=e^x$	$D=\mathbb{R}$
$f(x)=log_a x\ con\ a>0,\ a\neq 1$, in particolare $y=\ln x$	$D=(0,+\infty)$

DIMOSTRAZIONE DELLA CONTINUITÀ DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Osservazione preliminare: poiché $\boxed{f\ continua\ in\ x_0 \overset{def.}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$

per dimostrare che una data funzione $f(x)$ è continua in x_0 si imposterà la disequazione $\boxed{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}$

con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di x_0

(come abbiamo già più volte sottolineato, non è necessario che l'intorno trovato sia circolare, perché, comunque, qualsiasi intorno di un punto contiene sempre un intorno circolare di quel punto)

- **Dimostriamo che la funzione costante $\boxed{f(x)=k}$ è continua per ogni $x_0\in\mathbb{R}$**

La tesi è: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} k=k,\ \forall x_0\in\mathbb{R}}$

Osservazione: il contenuto del teorema è molto banale: ce ne scusiamo col lettore.

Dimostrazione

Consideriamo un qualunque $x_0\in\mathbb{R}$. Impostiamo la disequazione: $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
per stabilire da quali valori di x è verificata. Essa diventa, nella fattispecie: $|k-k|<\varepsilon$
e ci rendiamo immediatamente conto che è verificata qualunque fosse l' x considerato in partenza, vale a dire su tutto $\mathbb{R}$; quindi la disequazione posta è verificata su tutto un intorno di x_0.

- **Dimostriamo che la funzione identica $\boxed{f(x)=x}$ è continua per ogni $x_0\in\mathbb{R}$**

Tesi: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}}$

Osservazione: anche questo teorema invoca indulgenza per la banalità del suo contenuto.

Dimostrazione

Consideriamo un qualunque $x_0\in\mathbb{R}$. Impostiamo la disequazione: $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
Essa diventa, nella fattispecie: $|x-x_0|<\varepsilon$ ed è verificata per $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, che è un intorno di x_0.
In pratica, il $\delta=\delta(\varepsilon)$ può essere preso uguale a ε (o, a maggior ragione, $<\varepsilon$).

- **Una funzione polinomiale** $\boxed{P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}$ **è continua per ogni** $x_0\in\mathbb{R}$**,**

  cioè: $\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n\right)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+...+a_{n-1}x_0+a_n}$

  Dim. Conseguenza di teoremi precedenti:

  ✓ la funzione identica $f(x)=x$ è continua per ogni $x_0\in\mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0} x=x_0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}$

  ✓ $\lim_{x\to c} f(x)=\ell \Rightarrow \lim_{x\to c} kf(x)=k\ell \quad (\ell,\, k\in\mathbb{R})$

  ✓ $\lim_{x\to c} f(x)=\ell \Rightarrow \lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n=\ell^n \quad (n\in\mathbb{N}^*,\, \ell\in\mathbb{R})$

  ✓ il limite di una somma algebrica di più funzioni è uguale alla somma dei limiti, supposto che tutti questi limiti esistano e siano finiti

  ✓ $\lim_{x\to c} f(x)=\ell \Rightarrow \lim_{x\to c}\left[f(x)+k\right]=\ell+k,\ \ \ell, k\in\mathbb{R}$

- **Dimostriamo che una funzione algebrica razionale fratta** $\boxed{f(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}}$ **con** $P_i(x)$ **polinomi,**

  è continua su tutto il suo dominio (che è poi l'insieme degli x_0 che non annullano il denominatore $P_2(x)$)

  Dim. Conseguenza di teoremi precedenti:

  ✓ una funzione polinomiale $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ è continua per ogni $x_0\in\mathbb{R}$

  ✓ il limite del quoziente di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti (supposto che entrambi esistano e siano finiti, e che il limite della funzione a denom. sia $\neq 0$).

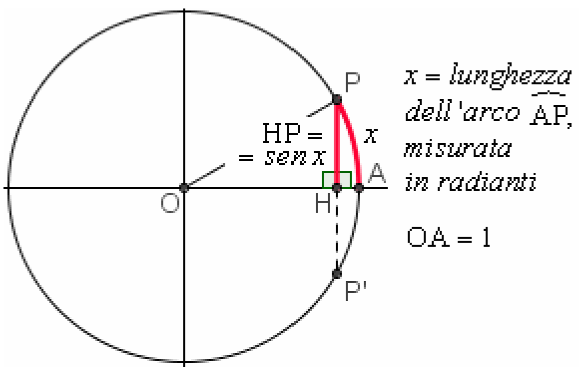
- **Dimostriamo che la funzione "seno"** $\boxed{f(x)=sen\,x}$ **è continua per ogni** $x_0\in\mathbb{R}$

  Per la dimostrazione, occorre preliminarmente provare che: a) $\lim_{x\to 0} sen\,x=0$; b) $\lim_{x\to 0} cos\,x=1$

a) Dimostriamo che $\lim_{x\to 0} sen\,x=0$.

Vogliamo far vedere che la disequazione $|sen\,x-0|<\varepsilon$ (ossia $|sen\,x|<\varepsilon$),
con ε numero positivo arbitrariamente prefissato, è verificata in tutto un intorno dell'ascissa $x_0=0$.
Ma osserviamo la figura qui sotto: essa ci mostra che risulta sempre $|sen\,x|<|x|$
quindi, qualora si abbia $|x|<\varepsilon$, cioè: qualora x appartenga all'intorno di centro $x_0=0$ e raggio $\delta=\varepsilon$,
è certamente, a maggior ragione, $|sen\,x|<\varepsilon$.
La tesi è dimostrata: insomma, in corrispondenza di qualsivoglia $\varepsilon>0$ prefissato,
il $\delta=\delta(\varepsilon)$ che va bene esiste: basta prendere $\delta=\varepsilon$ (o $\delta<\varepsilon$).

NOTA: a partire dalla disuguaglianza $|sen\,x|<|x|$, avremmo potuto anche utilizzare il "2° teorema del confronto"



x è la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AP}$, misurato in radianti;
$sen\,x$ è la misura del segmento HP.
Il segmento PP' è più corto dell'arco che va da P a P'
(questa disuguaglianza, ovvia all'intuizione, può essere comunque dedotta dalla def. di lunghezza di una curva, la quale porta con sé come conseguenza il fatto che "fra tutti i cammini che congiungono due punti, quello rettilineo è il più breve").
Quindi $2\,sen\,x<2x$ da cui $sen\,x<x$.
Abbiamo supposto, per semplicità, $x>0$; se il segno di x è arbitrario, vale invece la relazione $|sen\,x|<|x|$

b) In quanto al limite $\lim_{x\to 0} cos\,x=1$, esso si può dedurre da $\lim_{x\to 0} sen\,x=0$

tenendo conto delle formule goniometriche e di teoremi sui limiti, già acquisiti.

BENE! Siamo a questo punto finalmente pronti per la dimostrazione del nostro asserto:
"la funzione "seno" $f(x)=sen\,x$ è continua per ogni $x_0\in\mathbb{R}$ ".

Poniamo la tesi sotto la forma $\lim_{h\to 0} sen(x_0+h)=sen\,x_0$. Provare questa relazione è ora semplicissimo …

… basterà infatti combinare la formula di addizione $sen(x_0+h)=sen\,x_0\,cos\,h+cos\,x_0\,sen\,h$
coi risultati precedenti $\lim_{x\to 0} sen\,x=0$ e $\lim_{x\to 0} cos\,x=1$, applicati con h al posto di x.

OPERAZIONI CON FUNZIONI CONTINUE

Dai teoremi sui limiti e dalla definizione di continuità segue che:

La somma, la differenza, il prodotto di due funzioni continue in uno stesso punto x_0 sono pure funzioni continue in x_0

$$f,\, g \text{ continue in } x_0 \;\Rightarrow\; f+g,\; f-g,\; f\cdot g \text{ continue in } x_0$$

La potenza con esponente intero positivo di una funzione continua in x_0 è pure una funzione continua in x_0

$$f \text{ continua in } x_0 \;\Rightarrow\; \left[f(x)\right]^n \text{ continua in } x_0 \;\left(n\in\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}\right)$$

Il quoziente di due funzioni continue in x_0 è pure una funzione continua in x_0, purché la funzione a divisore non si annulli in x_0

$$f,\, g \text{ continue in } x_0 \text{ e } g(x_0)\neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{f}{g} \text{ continua in } x_0$$

Il valore assoluto di una funzione continua in x_0 è pure una funzione continua in x_0

$$f \text{ continua in } x_0 \;\Rightarrow\; \left|f(x)\right| \text{ continua in } x_0$$

L'INVERSA DI UNA FUNZIONE CONTINUA

Si può inoltre dimostrare (noi ci limitiamo ad enunciarlo) il seguente

Teorema sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua:

SE una funzione $f(x)$ è continua su di un insieme E, ed è invertibile su E, ALLORA la sua funzione inversa f^{-1} è continua sull'insieme $f(E)$

(col simbolo $f(E)$ si indica l'insieme delle immagini dei punti di E, attraverso la f).

La **continuità, su tutto il loro dominio, delle inverse delle funzioni circolari (si dice anche: "funzioni goniometriche inverse"):**
arc sen x, arc cos x, arc tg x, arc cotg x **,**
può essere considerata come conseguenza del precedente Teorema sulla continuità della funzione inversa, essendo stata preliminarmente provata la continuità delle rispettive funzioni dirette *sen x, cos x, tg x, cotg x* .

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI, E IN PARTICOLARE DI FUNZIONI CONTINUE

Resta da considerare la cosiddetta COMPOSIZIONE DI FUNZIONI.
Ce ne siamo occupati i un paragrafo apposito del capitolo "Verso l'analisi";
ricapitoliamo qui il succo del discorso.

Esempi di funzioni composte sono:

$$y=\cos 3x,\quad y=e^{\operatorname{sen} x},\quad y=\ln^2 x=(\ln x)^2,\quad y=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,\quad y=\sqrt{x^2-x-6}$$

Prendendo, ad esempio $y=\cos 3x$, si vede che in essa ci sono due "componenti":
la funzione "triplo", che da x fa passare a $3x$; e la funzione "coseno", che da questo $3x$ ci porta a $\cos 3x$.

$$x \xrightarrow{3(*)} 3x \xrightarrow{\cos(*)} \cos 3x$$

Il generale, applicando a x prima una funzione g e poi al risultato così ottenuto una seconda funzione f, si ha:

$$x \xrightarrow{g(*)} g(x) \xrightarrow{f(*)} f\big(g(x)\big)=(f\circ g)(x)$$

IMPORTANTE: LA FUNZIONE CHE È STATA APPLICATA PER ULTIMA VIENE SCRITTA PER PRIMA!

Chiamando z il numero intermedio si avrà:

$$x \xrightarrow{g(*)} z=g(x) \xrightarrow{f(*)} y=f(z)=f\big(g(x)\big)=(f\circ g)(x)$$

Se le due funzioni componenti $z=g(x)$, $y=f(z)$ sono tali che:
g è continua in un dato punto x, e f è a sua volta continua in quel punto z, tale che $z=g(x)$,
cosicché in qualche modo le due continuità si "saldino", ci possiamo domandare:
sarà certamente continua (nel punto x) anche la funzione composta $y=f(z)=f\big(g(x)\big)$?
La risposta (affermativa), è discussa nelle impegnative pagine seguenti,
le quali giustificano anche i procedimenti di "sostituzione " ("implicita" od "esplicita")
ai quali spesso occorre fare ricorso nel calcolo di un limite.

SOSTITUZIONE DI VARIABILE NELL'AMBITO DEL CALCOLO DI UN LIMITE

Obiettivo di questo paragrafo è di dimostrare che, eseguendo esercizi sui limiti,
è corretto effettuare "sostituzioni di variabile", esplicite o implicite, come negli esempi seguenti:

Sostituzione implicita: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \overbrace{5x}^{\substack{0\\ \uparrow}}}{\underbrace{5x}_{\to 0}} = 1;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \overbrace{\dfrac{x}{x^2+1}}^{\substack{0+\\ \uparrow}} = -\infty$

Sostituzione esplicita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x} = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 \quad (5x = z;\ \textit{quando } x\to 0 \textit{ anche } z\to 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x^2+1} = \lim_{z\to 0^+}\ln z = -\infty \quad \left(\frac{x}{x^2+1} = z;\ \textit{quando } x\to+\infty,\ z\to 0^+\right)$$

Ciò si riassume dicendo che:

"se la funzione f di cui vogliamo calcolare il limite dipende, a sua volta, da una funzione $g(x)$ che, quando x tende a c, tende ad un limite ℓ (finito o infinito), possiamo comportarci come se avessimo, al posto di $g(x)$, una variabile indipendente z tendente a ℓ"

Vale infatti il seguente rilevante Teorema:

TEOREMA SUL LIMITE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA, O "TEOREMA DI SOSTITUZIONE"
(i simboli c, ℓ, L potranno indicare un numero finito, oppure $+\infty$, o $-\infty$, o ∞)

Supponiamo di voler calcolare il $\lim\limits_{x\to c} f\left(g(x)\right)$.

Supponiamo inoltre che siano verificate le seguenti due ipotesi: I. $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$ II. $\lim\limits_{z\to \ell} f(z) = L$

Allora avremo (TESI): $\lim\limits_{x\to c} f\left(g(x)\right) = \lim\limits_{z\to\ell} f(z) = L$

Dimostrazione

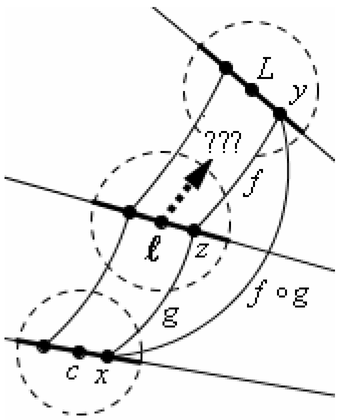
La tesi è che $\lim\limits_{x\to c} f\left(g(x)\right) = L$, cioè che $\forall \mathrm{I}_L\ \exists \mathrm{I}_c$ *tale che* $x \in \mathrm{I}_c - \{c\} \to f\left(g(x)\right) \in \mathrm{I}_L$.

Fissiamo dunque, ad arbitrio, un $\overline{\mathrm{I}}_L$. Per l'ipotesi II), in corrispondenza di questo $\overline{\mathrm{I}}_L$ esisterà un $\overline{\mathrm{I}}_\ell$ tale che

(*) $z \in \overline{\mathrm{I}}_\ell - \{\ell\} \to f(z) \in \overline{\mathrm{I}}_L$

Per l'ipotesi I), in corrispondenza di questo $\overline{\mathrm{I}}_\ell$ esisterà poi un $\overline{\mathrm{I}}_c$ tale che

(**) $x \in \overline{\mathrm{I}}_c - \{c\} \to g(x) \in \overline{\mathrm{I}}_\ell$



Ci rendiamo ora conto di una difficoltà.

(**) ci dice che la funzione g (quella che viene applicata per prima), quando opera sugli x di $\overline{\mathrm{I}}_c - \{c\}$, genera valori che stanno in $\overline{\mathrm{I}}_\ell$;

(*) afferma che quando la funzione f opera su valori che stanno in $\overline{\mathrm{I}}_\ell$, genera valori che stanno in $\overline{\mathrm{I}}_L$
CON UNA POSSIBILE ECCEZIONE:
quando $z = \ell$, il valore $f(z)$ potrebbe anche
a) non esistere oppure b) stare *FUORI* da $\overline{\mathrm{I}}_L$.

Se non intervenisse questa possibile eccezione, la tesi sarebbe dimostrata,
e $\overline{\mathrm{I}}_c$ sarebbe l'intorno di c di cui si voleva provare l'esistenza.
abbiamo scoperto che, per assicurare la validità della tesi,
OCCORRE UN'IPOTESI SUPPLEMENTARE, ossia che

III. esista un intorno J_c di c, per ogni x del quale (escluso, tutt'al più, c), sia certamente $g(x) \neq \ell$

Se, dunque, vale l'ipotesi supplementare III, avremo che
per ogni x di $\overline{\mathrm{I}}_c \cap \mathrm{J}_c - \{c\}$ risulterà contemporaneamente $g(x) \in \overline{\mathrm{I}}_\ell$ e $x \in \mathrm{J}_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \neq \ell$, ossia
(***) $x \in \overline{\mathrm{I}}_c \cap \mathrm{J}_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \in \overline{\mathrm{I}}_\ell - \{\ell\}$.
Quindi avremo, combinando (***) con (*),

$$x \in \overline{\mathrm{I}}_c \cap \mathrm{J}_c - \{c\} \Rightarrow g(x) \in \overline{\mathrm{I}}_\ell - \{\ell\} \Rightarrow f\left(g(x)\right) \in \overline{\mathrm{I}}_L.$$

In corrispondenza dell' $\overline{\mathrm{I}}_L$ arbitrariamente fissato, si è quindi provato che esiste un intorno di c
(si tratta di $\overline{\mathrm{I}}_c \cap \mathrm{J}_c$) per ogni x del quale, eccettuato al più $x = c$ se c è finito, risulta $f\left(g(x)\right) \in \overline{\mathrm{I}}_L$.
La tesi è dimostrata. Ma C'È STATO BISOGNO DELL'IPOTESI SUPPLEMENTARE III.

OSSERVAZIONE 1: la scarsa incidenza dell’ipotesi supplementare

E’ pur vero che questa ipotesi supplementare è quasi sempre verificata,
a meno di andare a scomodare situazioni particolarissime.

Consideriamo ad esempio la funzione

$$g(x) = x \cdot sen\frac{\pi}{x} + 4 .$$

Essa è tale che

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 4 = \ell .$$

Osserviamo che $sen\frac{\pi}{x}$ assume, in qualsiasi intorno dell’ascissa $c = 0$, infinite volte il valore 0
e quindi $g(x)$ assume, in qualsiasi intorno dell’ascissa $c = 0$, infinite volte il valore 4.

Consideriamo poi la funzione

$$f(z) = \begin{cases} 50 & con \ z \neq 4 \\ 100 & con \ z = 4 \end{cases}$$

Avremo

$$\lim_{x\to 4} f(z) = 50 = L$$

ma

$$f(4) = 100 .$$

Se ora noi costruiamo la funzione composta $f(g(x))$, vediamo che essa assume,
in ogni intorno di $c = 0$, infinite volte il valore 50 e infinite volte il valore 100,
quindi non tenderà a nessun limite se facciamo tendere x a 0.

NON è quindi verificata la tesi del Teorema, ossia

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = L ,$$

per il fatto che il teorema stesso non è applicabile, non valendo l’ipotesi supplementare III.
Ma che funzione strana abbiamo dovuto chiamare in causa per poter costruire questo controesempio!

Osserviamo ancora che, nel caso ℓ sia infinito,
il problema dell’ipotesi supplementare semplicemente non si pone.

OSSERVAZIONE 2: l’ipotesi supplementare è superflua se f è continua in ℓ.

Possiamo fare anche un’altra osservazione.

Abbiamo avuto bisogno dell’ipotesi supplementare **III** quando ci siamo accorti che mancavano del tutto,
nell’ipotesi originaria del teorema, condizioni sul comportamento della funzione $f(z)$ IN $z = \ell$;
il valore $f(\ell)$ poteva anche

a) non esistere
b) esistere ma non coincidere con L ,.

Queste due circostanze avrebbero portato il valore $f(g(x))$, nel caso fosse $g(x) = \ell$, rispettivamente

a) a non esistere
b) a collocarsi, purché $\bar{I}_L$ venisse preso sufficientemente piccolo, FUORI dall’intorno $\bar{I}_L$,
anche qualora il punto x tale che $g(x) = \ell$ appartenesse a $\bar{I}_c - \{c\}$.

Se però $\ell \in \mathbb{R}$ e $f(z)$ è CONTINUA in $z = \ell$, allora si ha

$$L = \lim_{z\to\ell} f(z) = f(\ell)$$

e il valore $f(\ell)$ esiste ed è automaticamente contenuto in qualsiasi intorno di L,
quindi non “rischia” più di non esistere, né di stare al di fuori dell’intorno $\bar{I}_L$.
In definitiva:

l’ipotesi supplementare III è del tutto superflua nel caso
ℓ sia un valore finito e la funzione f sia continua in ℓ.

COROLLARIO 1

SE la funzione $g(x)$ è continua in x_0 e la funzione $f(z)$ è continua in $g(x_0)$,
ALLORA la funzione composta $f(g(x))$ è continua in x_0.

Dimostrazione
Infatti , sotto le predette ipotesi di continuità, si ha

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\wedge \lim_{z\to g(x_0)} f(z)=f\left(g(x_0)\right)$$

e ciò implica, per il Teorema sul Limite di una Funzione Composta appena dimostrato
(la cui applicazione, data la continuità di f, non richiede l'ipotesi supplementare III),

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=f\left(g(x_0)\right)$$

ossia la continuità in x_0 della funzione composta $f\big(g(x)\big)$.

Potremmo ricordare più facilmente questo importante Corollario enunciandolo nel modo seguente,
piuttosto vago ma utile, appunto, per tenere a mente il concetto:

la funzione ottenuta componendo due funzioni continue è ancora una funzione continua.

OSSERVAZIONE 3 (uno "slogan" importante!)

Se $\ell\in\mathbb{R}$ e una funzione f è CONTINUA in ℓ, cioè $\lim\limits_{z\to\ell} f(z)=f(\ell)$,
allora, presa una qualsivoglia funzione $g(x)$ tale che $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\ell$, il Teorema di Sostituzione
(senza bisogno dell' "ipotesi supplementare", data la continuità della f in ℓ) ci assicura che

$$\lim_{x\to c} f\left(\underbrace{g(x)}_{\downarrow\atop \ell}\right)=f\left(\ell\right)=f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$ e, compattando la scrittura, $$\boxed{(*)\quad \lim_{x\to c} f\left(\underbrace{g(x)}_{\downarrow\atop \ell}\right)=f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)}$$

il che autorizza a formulare il seguente "slogan" (vago, ma efficace):
le funzioni continue sono tutte e sole quelle funzioni per le quali il simbolo di limite
si può portare da "fuori" a "dentro" il simbolo di funzione, e viceversa.

La frasetta dev'essere utilizzata come un rimando all'uguaglianza (*): insomma,
lo "slogan" condensa l'affermazione che
"una funzione f è continua in un punto $\ell\in\mathbb{R}$ se e solo se per la f
vale l'uguaglianza (1), comunque si prenda una funzione g che tende a ℓ" (NOTA).

La proposizione si ricorda bene se si pensa che generalizza l'ovvia biimplicazione seguente:

$$\boxed{f \textit{ continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)}$$

NOTA: abbiamo appena fatto vedere che, se f è continua in ℓ,
allora, qualunque sia la funzione $g(x)$ tendente a ℓ, vale la (1);
se, viceversa, per una data funzione f vale la (1) qualunque sia la funzione $g(x)$ tendente a ℓ,
allora, preso il caso particolare $g(x)=x$, e facendo tendere x a $c=\ell$ (da cui $g(x)=x\to\ell$), avremo

$$\lim_{x\to\ell} f(x)=f(\lim_{x\to\ell} x)=f(\ell)$$

quindi la f sarà continua in ℓ.

COROLLARIO 2

Una funzione della forma $F(x)=\left[f(x)\right]^{g(x)}$,
se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue ciascuna sul proprio dominio, è continua sul suo dominio; in particolare,
una potenza ad esponente irrazionale x^r $\left(r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\right)$ è una funzione continua su tutto il suo dominio.

Dimostrazione
Immediatamente deducibile dal Teorema sul Limite della Funzione Composta utilizzando l' identità

$$\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\ln\left[f(x)\right]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

e tenendo presenti teoremi già acquisiti, in particolare la continuità della funzione logaritmica.