

11. LIMITI DI FUNZIONI ALGEBRICHE (=POLINOMI, RAPPORTI DI POLINOMI, RADICALI)

La **definizione generale di “funzione algebrica”** non è semplicissima, e non vogliamo occuparcene qui.

Comunque, sono “algebriche”, fra l’altro, **tutte le funzioni nella cui espressione compaiono esclusivamente operazioni “algebriche”** ossia **addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, potenze, radici**, mentre sono dette “trascendenti” le funzioni costruite attraverso **logaritmi, esponenziali, funzioni goniometriche**.

Fra le **funzioni algebriche di utilizzo più comune** ci sono

- **i polinomi** (= funzioni algebriche razionali “intere”)
- **i rapporti di polinomi** (= funzioni algebriche razionali “fratte”, ossia “con la x a denominatore”)
- **le funzioni algebriche irrazionali**, ossia quelle nelle quali x compare almeno una volta sotto radice.

POLINOMI E RAPPORTI DI POLINOMI

Regola per il calcolo del limite di un polinomio, quando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

All tendere di x a $+\infty$ o $-\infty$, un polinomio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ tende sempre all’INFINITO.

E per stabilire il *segno* di questo infinito, si può procedere in due modi:

- raccogliere x elevato all’esponente più alto
- considerare esclusivamente il comportamento del termine di grado massimo a_0x^n (occorrerà tenere conto del segno del coeff. e, qualora x tenda a $-\infty$, della parità o disparità dell’esponente)

$$\text{Infatti } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{x^n}_{\infty} \left(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{x}}_0 + \dots + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}}_0 + \underbrace{\frac{a_n}{x^n}}_0 \right)$$

- Il contenuto della parentesi tende dunque ad a_0 ;
- il fattore esterno x^n tende a ∞ , precisamente: $\begin{cases} +\infty & \text{se } x \rightarrow +\infty \text{ oppure anche } x \rightarrow -\infty \text{ ma } n \text{ è pari;} \\ -\infty & \text{se } x \rightarrow -\infty \text{ e } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Il valore del limite

- a) sarà perciò infinito
- b) avrà un segno determinato da considerazioni molto elementari, illustrate dagli esempi che seguono
- c) coinciderà sempre con il valore di $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 + 5x^2 - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^3}_0 \left(4 + \underbrace{\frac{5}{x}}_0 - \underbrace{\frac{7}{x^3}}_0 \right) = +\infty$$

...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende $\underbrace{4x^3}_{+\infty}$
il termine di grado più elevato

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 + 5x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^4}_0 \left(2 + \underbrace{\frac{5}{x}}_0 \right) = +\infty$$

...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende $\underbrace{2x^4}_{+\infty}$
il termine di grado più elevato

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^3}_{-\infty} \left(2 + \underbrace{\frac{5}{x}}_0 \right) = -\infty$$

...Anche semplicemente chiedendosi a cosa tende $\underbrace{2x^3}_{-\infty}$
il termine di grado più elevato

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3 + 12x^2 + 9x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^3}_{-\infty} \left(-7 + \underbrace{\frac{12}{x}}_0 + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_0 + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_0 \right) = +\infty$$

...Anche semplicemente considerando il termine di grado più elevato $\underbrace{-7x^3}_{-\infty}$

Regola per il calcolo del limite di un rapporto di polinomi, quando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

Il valore del $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$ può essere:

- se prevale il grado del numeratore: ∞ , con un segno determinato dalla "regola dei segni" applicata considerando soltanto i termini di grado massimo a numeratore e denominatore** (occorrerà tenere conto dei segni dei coefficienti e, qualora x tenda a $-\infty$, della parità o disparità della differenza fra gli esponenti)
- se prevale il grado del denominatore: 0**
- se num. e denom. hanno ugual grado: $\frac{a_0}{b_0}$ (= rapporto tra i coeff. dei due termini di grado massimo)**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m} \right)} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} =$$

$$= \frac{a_0}{b_0} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

NOTA: entro ciascuna parentesi, tutti i termini, tranne il primo, sono "evanescenti" (= tendenti a 0)

Più ancora della catena sopra riportata, ti saranno da guida i seguenti esempi.

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + x}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{\overbrace{\overbrace{3x^5}^{+\infty}}^{+\infty}}^3}^{+\infty} \left(3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)}{\underbrace{\overbrace{4x^3}^4}_{-\infty} \left(4 - \frac{1}{x^3} \right)} = +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{2x^3-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\overbrace{5 + \frac{3}{x}}^5 \right)}{\underbrace{\cancel{x^2} \left(\underbrace{2 - \frac{1}{x^2}}_{+\infty} \right)}_{+\infty}} = 0^+$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{x^2}}_{-\infty} \right)}{\underbrace{\cancel{x^2} \left(1 \right)}_{-\infty}} = 0^-$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^2+4x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\overbrace{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}^3 \right)}{\cancel{x^2} \left(\underbrace{2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}_{\downarrow} \right)} = \frac{3}{2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+x^2}{12-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} \left(\overbrace{2 + \frac{1}{x}}^2 \right)}{\cancel{x^3} \left(\underbrace{\frac{12}{x^3} - 1}_{-1} \right)} = -2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2-6}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\overbrace{7 - \frac{6}{x^2}}^7 \right)}{\underbrace{\cancel{x^3} \left(-\infty \right)}_{-\infty}} = 0^-$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4+5x}{6x^4-x^2+10} = \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

Immediatamente, con la regola!

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-8}{x^2-x+2} = 0^+$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+2}{x^2+x} = -\infty$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+2} = 0^-$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+1}{x^3+x^2+x+1} = +\infty$$

Immediatamente, con la regola e l'osservazione dei segni!

$$16) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{5+x^2} = -1$$

Immediatamente, con la regola!

Regola per il calcolo del limite di un rapporto di polinomi, quando $x \rightarrow x_0$

In questo caso, il calcolo del limite

è immediato ogniquilvolta, sostituendo x_0 al posto di x , il denominatore sia diverso da 0.

Se poi con $x = x_0$ si annulla soltanto il denominatore, il limite è infinito

e per stabilire il segno di questo infinito si dovrà generalmente distinguere fra limite sinistro e destro; a tale scopo, sarà di norma conveniente scomporre in fattori il denominatore, se è di grado sup. al 1°.

Ma può, eccezionalmente, presentarsi una Forma di Indecisione:

ciò avviene nel caso in cui, con $x = x_0$, si annullino contemporaneamente sia il num. che il denom.:

$$A(x_0) = B(x_0) = 0.$$

Quando accade ciò, compare una F.I. [0/0], che si scioglie sempre per **scomposizione e semplificazione**. Infatti:

- essendo $A(x_0) = 0$, per il Teorema del Resto il polinomio $A(x)$ è divisibile per il binomio $(x - x_0)$ e quindi è scomponibile in un prodotto della forma $(x - x_0)A_1(x)$
- ed essendo $B(x_0) = 0$, per il Teorema del Resto il polinomio $B(x)$ è divisibile per il binomio $(x - x_0)$ e quindi è scomponibile in un prodotto della forma $(x - x_0)B_1(x)$

... cosicché si avrà $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{(x - x_0)A_1(x)}{(x - x_0)B_1(x)}$ con la possibilità di semplificare per $(x - x_0)$.

Qualche esempio dei vari tipi:

$$17) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{x - 1} = \frac{9 + 4}{3 - 1} = \frac{13}{2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{(x - 1)^2} = +\infty$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4x + 3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 4}{(x - 3)(x - 1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 4}{(x - 3)(x - 1)} = +\infty$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x + 6)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)(x^2 + x + 2)} = \frac{1}{14}$$

RUFFINI

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 3x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 5)(x - 1)}{(x - 1)^3} = -\infty$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} = \infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow \sqrt{2}^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow \sqrt{2}^- \end{cases}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} = 0$$

$$25) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x + 5)(x - 5)}{(x + 5)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x - 5}{x + 5} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x - 5}{x + 5} = -\infty$$

INDICAZIONE GENERALE SULLE FORME DI INDECISIONE FIN QUI VISTE



Diciamo che, in linea di principio,
**le forme di indecisione $[\infty - \infty]$ e $[\infty/\infty]$ si affrontano
 “raccolgendo il termine di esponente maggiore
 o, comunque, quello che tende a infinito più rapidamente”,
 mentre per le forme di indecisione $[0/0]$
 “si va a cercare una semplificazione”, attraverso fattorizzazioni, o razionalizzazioni,
 o previa moltiplicazione di numeratore e denominatore per una stessa espressione.**
 Naturalmente, nella pratica si terrà sempre conto di **limiti noti già studiati in passato.**

ESERCIZI (... quasi tutti, anche se non tutti, portano Forme di Indecisione ...)

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 25x}{4x^2 + x - 1}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x - 1}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{7x^3 + 6x^2 + 5x + 4}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 6x^3}{3x^3 - 4x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 5x - 3}{-11x^3 + 13x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 14}{x^3}$ 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 9x + 18}{x^2 - x - 2}$ 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^5}$ 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4}{3 + 5x}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4 + x^2 + 1}$ 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 3}$ 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x^2}{x^2 + 3x}$ 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 5} - \frac{x^2}{x + 2} \right)$ 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4}{x - 2}}{x^2 + 7}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{3x - 15}$ 16) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + x - 12}$ 17) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$ 18) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x}{x^2 - 16}$ 19) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{6x^2 - x - 1}$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 2x}$ 21) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{2 + 6x}{9x^3 - x}$ 22) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 - 21}{4x + 12} - \frac{x}{x + 3} \right)$ 23) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2}{x - 11}$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} \right)$ 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x^2 - 2x}$ 26) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3}{25 - x^2}$ 27) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x}$ 28) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3}$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ 30) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{(x + 3)^5}$ 31) $\lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{16x^2 - 8x + 1}{32x^2 - 2}$ 32) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^3 - 3x + 2}$
- 33) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$ 34) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 - x^2 - 2}$ 35) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 7x + 1}{x^2 + 7x}$ 36) $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{10x + 15}{4x^3 - 9x}$
- 37) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x}{(x - 8)^3}$ 38) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\pi - x}{2}}{\pi - x}$ 39) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5 - 4}{x^2}}{\frac{x}{2x + 3}}$ 40) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(10x - 19)^6}{x^6 - x^3 + 21}$ 41) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$

RISPOSTE

- 1) $\frac{3}{4}$ 2) 0^+ 3) $+\infty$ 4) -2 5) $+\infty$ 6) 0^- 7) 1 8) 0^+ 9) $-\infty$ 10) 0^- 11) $0 \begin{cases} 0^+ \text{ con } x \rightarrow +\infty \\ 0^- \text{ con } x \rightarrow -\infty \end{cases}$
- 12) -1 13) -3 14) $-\infty$ 15) $\frac{10}{3}$ 16) $-\frac{2}{7}$ 17) -1 18) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow -4^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow -4^- \end{cases}$ *non era una F.I.!* 19) $\frac{4}{5}$ 20) $\frac{11}{2}$
- 21) 3 22) $-\frac{5}{2}$ 23) -100 *non era una F.I.!* 24) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow 1^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow 1^- \end{cases}$ *non era una F.I.!* 25) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow 0^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow 0^- \end{cases}$ *non era una F.I.!*
- 26) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow 5^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow 5^- \end{cases}$ 27) 0 28) $\frac{1}{2}$ 29) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow 1^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow 1^- \end{cases}$ 30) $-\infty$
- 31) 0 32) 2 33) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow -3^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow -3^- \end{cases}$ 34) $\frac{1}{3}$ 35) $\infty \begin{cases} -\infty \text{ con } x \rightarrow -7^+ \\ +\infty \text{ con } x \rightarrow -7^- \end{cases}$
- 36) $\frac{5}{9}$ 37) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow 8^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow 8^- \end{cases}$ 38) $\infty \begin{cases} +\infty \text{ con } x \rightarrow \pi^+ \\ -\infty \text{ con } x \rightarrow \pi^- \end{cases}$ 39) $\frac{5}{3}$ 40) $1.000.000$ 41) $\frac{a}{c}$

FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $[\infty - \infty]$

$$26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt[4]{x}}_{+\infty} \right)$$

Abbiamo qui una F. I. $[(+\infty) - (+\infty)]$;

tuttavia, abbiamo fiducia che nel “conflitto” prevalga $\sqrt[3]{x}$ rispetto a $\sqrt[4]{x}$, perché la radice cubica, al tendere all’infinito del radicando, tende all’infinito più rapidamente rispetto alla radice quarta. Ci aspettiamo dunque che il limite valga $+\infty$.

Comunque, per maggiore sicurezza, possiamo procedere come abbiamo fatto nel caso dei polinomi, quando abbiamo raccolto x elevata all’esponente massimo:

essendo $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ e $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$, l’esponente massimo è $1/3$ e raccoglieremo quindi $\sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt[4]{x}}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^4}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(1 - \sqrt[12]{\frac{x^3}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{+\infty} \underbrace{\left(1 - \sqrt[12]{\frac{1}{x}} \right)}_0 = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{5\sqrt[7]{x^2}}_{+\infty} - \underbrace{2\sqrt[3]{x}}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x^{\frac{2}{7}} - 2x^{\frac{1}{3}} \right) \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left(5 \frac{x^{\frac{2}{7}}}{x^{\frac{1}{3}}} - 2 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \left(5x^{\frac{2}{7} - \frac{1}{3}} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^{\frac{1}{3}}}_{+\infty} \underbrace{\left(5x^{-\frac{1}{21}} - 2 \right)}_0 = -\infty \end{aligned}$$

NOTA 1

Qui siamo di fronte a un “polinomio con esponenti frazionari” e, siccome $2/7 < 1/3$, abbiamo fiducia che prevalga il termine $-2x^{1/3}$, trascinando il limite a $-\infty$. Comunque, per maggior sicurezza, procediamo raccogliendo x elevata all’esponente più alto.

$$28) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{4x}_{+\infty} \right) = +\infty \quad \text{Immediato: non si trattava di una Forma di Indecisione}$$

$$\begin{aligned} 29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{4x}_{+\infty} \right) &\stackrel{\text{NOTA 2}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - 4x \right) \stackrel{\text{NOTA 3}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 4x \right) \stackrel{\text{NOTA 4}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 4x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 4 \right)}_0 = -\infty \end{aligned}$$

NOTA 2: F.I. $[(+\infty) - (+\infty)]$

NOTA 3: Importantissimo ricordare che $\sqrt{x^2 y} = |x| \sqrt{y}$.

L’uguaglianza senza il valore assoluto, ossia la $\sqrt{x^2 y} = x \sqrt{y}$, sussiste soltanto quando si sa che $x \geq 0$ (o quando si vogliono considerare solo valori di x che siano ≥ 0);

invece l’uguaglianza $\sqrt{x^2 y} = |x| \sqrt{y}$ è valida senza condizioni.

Noi, a dire il vero, nel passaggio successivo **scioglieremo** il valore assoluto, proprio per il fatto che, essendo $x \rightarrow +\infty$, nel nostro contesto è lecito supporre x positiva; tuttavia abbiamo preferito non saltare il passaggio col valore assoluto, che sarà fondamentale negli esercizi in cui $x \rightarrow -\infty$.

NOTA 4: Si può scrivere x al posto di $|x|$ perché, essendo $x \rightarrow +\infty$, possiamo supporre x positivo (= possiamo limitarci a considerare solamente i valori positivi di x).

$$\begin{aligned}
 30) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - x \right) \stackrel{\text{NOTA 4}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\overset{0}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}}_{\downarrow 1} - \underbrace{x}_{\uparrow +\infty} \right) = [\infty \cdot 0] \text{ Forma di Indecisione!!!!}
 \end{aligned}$$

NOTA 4

Come già per il limite precedente, è $x \rightarrow +\infty$ quindi si può scrivere x al posto di $|x|$

Contrariamente all'esercizio precedente, la **F.I. non si è scelta**, ma si è invece trasformata in **un'altra F.I.** Siamo costretti a **riprendere il limite daccapo, risolvendolo con una strategia diversa.**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(-3 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{2}{x} \rightarrow -3}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \rightarrow 2} = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Nell'esercizio seguente, a, b sono due costanti reali:

$$\begin{aligned}
 31) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx}}_{-\infty} - \underbrace{x}_{+\infty} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} - x \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + ax^2 + bx - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{\sqrt[3]{(x^3 + ax^2 + bx)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx} + x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{\sqrt[3]{\left[x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) \right]^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{\sqrt[3]{x^6 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)} + x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^2} + x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(a + \frac{b}{x} \right) \rightarrow a}{\cancel{x^2} \left[\sqrt[3]{\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}} + 1 \right] \rightarrow 3} = \frac{a}{3}
 \end{aligned}$$

INDICAZIONE GENERALE SULLE FORME DI INDECISIONE FIN QUI VISTE

Lo ribadiamo, perché è davvero importante tenerlo sempre presente: in linea di principio,

le forme di indecisione $[\infty - \infty]$ e $[\infty/\infty]$

si affrontano "raccolgendo il termine di esponente maggiore o, comunque, quello che tende a infinito più rapidamente",

mentre per le forme di indecisione $[0/0]$

"si va a cercare una semplificazione", attraverso fattorizzazioni, o razionalizzazioni, o previa moltiplicazione di numeratore e denominatore per una stessa espressione.

Naturalmente, nella pratica si terrà sempre conto di **limiti noti già studiati in passato.**

Gli esempi successivi, oltre a quelli già visti, illustrano e confermano quanto detto.



FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$32) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x+4\sqrt{x}}}^{+\infty}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2+1}}_{+\infty}} \quad \text{E' una F. I. } \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Il numeratore può essere scritto come $x^{1/2} + x^{1/4}$ e quindi pensato come un “polinomio” di “grado” 1/2 (abbiamo usato le virgolette perché, dati gli esponenti frazionari, si dovrebbe piuttosto parlare di *pseudo*-polinomio, e *pseudo*-grado).

Il denominatore può essere scritto come $x^{2/3} + 1$ e il suo “grado” è quindi 2/3.

Prevale il “grado” del denominatore e la frazione *DOVREBBE* perciò tendere a 0.

Per confermare questa nostra congettura, operiamo come con un rapporto di polinomi “classici”, raccogliendo sia a numeratore che a denominatore x elevato all’esponente massimo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x+4\sqrt{x}}}^{+\infty}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2+1}}_{+\infty}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt[3]{x^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \frac{1 + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{x^3}{x^4}} \frac{1 + 4\sqrt{\frac{x}{x^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt[6]{\frac{1}{x}}}_{\downarrow 0} \frac{\overbrace{1 + 4\sqrt{\frac{1}{x}}}^{1}}{\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}_{\downarrow 1}} = 0$$

$$33) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} + \sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x-2} + 8x}$$

Possiamo fare un “pronostico” sul valore di questo limite ragionando come segue:

poiché $x \rightarrow +\infty$, nel radicale $\sqrt{9x^2+1}$ il termine +1 si fa irrilevante e si avrà $\sqrt{9x^2+1} \approx \sqrt{9x^2} = 3x$

e così pure nel radicale $\sqrt{x^2+x}$ il contributo di x appare trascurabile rispetto al termine “caratterizzante” x^2 , per cui sarà $\sqrt{x^2+x} \approx \sqrt{x^2} = x$. E allo stesso modo, a denominatore, $\sqrt{x^2-x-2} \approx \sqrt{x^2} = x$.

$$\text{Pertanto IPOTIZZIAMO che risulti } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9x^2+1}}^{\approx 3x} + \overbrace{\sqrt{x^2+x}}^{\approx x}}{\underbrace{\sqrt{x^2-x-2} + 8x}_{\approx x}} = \frac{4}{9}$$

D’altra parte, un tal ragionamento non può pretendere di essere rigoroso: **necessita di una conferma formale.** ATTENZIONE, INFATTI:

se ci fossimo fidati di congetture di questo tipo, di fronte al precedente esercizio $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x+2} - x)$

avremmo potuto ritenere erroneamente che il limite fosse uguale a 0, mentre si è poi trovato che vale $-3/2$.

Procediamo pertanto per raccoglimenti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9x^2+1} + \sqrt{x^2+x}}^{+\infty}}{\underbrace{\sqrt{x^2-x-2} + 8x}_{+\infty}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} + 8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8x} \quad \text{NOTA 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}^{\sqrt{9}=3} + \overbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}^{1}}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8}_{\downarrow 1}} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

NOTA 1 : $x \rightarrow +\infty$ per cui $|x| = x$

Vediamo ora come cambiano le cose se si prende la stessa frazione di prima ma si fa tendere x a $-\infty$ anziché a $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 34) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} + \sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x-2} + 8x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9 + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} + 8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8x} \quad \text{NOTA 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{-\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}^{-\sqrt{9}=-3} \quad \overbrace{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}^{-1}}{\underbrace{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 8}_{-1}} = -\frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

NOTA 2: $x \rightarrow -\infty$ per cui $|x| = -x$

$$\begin{aligned}
 35) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{5}{x}\right)}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}{\cancel{x}\left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}^{\sqrt{4-2}}}{\underbrace{3 + \frac{2}{x}}_3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Il precedente esercizio avrebbe potuto anche essere svolto coi passaggi che seguono:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{\sqrt{(3x+2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{(3x+2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{9x^2+12x+4}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 36) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{5}{x}\right)}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}{3x+2} \quad \text{NOTA 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}{x\left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{-\sqrt{4 + \frac{5}{x}}}^{-\sqrt{4}=-2}}{\underbrace{3 + \frac{2}{x}}_3} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

NOTA 3:

Qui $x \rightarrow -\infty$,
perciò $x < 0$
e $|x| = -x$

L'ultimo esercizio avrebbe potuto anche essere svolto coi passaggi seguenti:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+2} &\stackrel{\text{NOTA 4}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-|3x+2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-\sqrt{|3x+2|^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{-\sqrt{(3x+2)^2}} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{(3x+2)^2}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{4x^2+5x}{9x^2+12x+4}} = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

NOTA 4:

Poiché $x \rightarrow -\infty$, è $3x+2 < 0$; sarebbe dunque sbagliato, in questo contesto, scrivere $3x+2 = \sqrt{(3x+2)^2}$!

Infatti tale uguaglianza avrebbe il primo membro negativo

e il secondo membro positivo in quanto risultato di un'estrazione di radice quadrata.

In pratica, solamente un'espressione positiva si può trasformare nella radice del suo quadrato: per questo motivo, volendo portare l'espressione negativa $3x+2$ sotto radice,

scriveremo $3x+2 = -|3x+2| = -\sqrt{|3x+2|^2} = -\sqrt{(3x+2)^2}$.

FUNZIONI CONTENENTI RADICALI: F.I. $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$

$$37) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{x\sqrt{x}-1}^0}{\underbrace{x^2-1}_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1} \cdot \frac{x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{(x^2-1)(x\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \overbrace{(x^2+x+1)}^3}{\underbrace{(x+1)}_2 \cancel{(x-1)} \underbrace{(x\sqrt{x}+1)}_2} = \frac{3}{4}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x}+1}^0}{\underbrace{x+1}_0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}_{+1} + 1} = \frac{1}{3}$$

ESERCIZI (... non tutti portano a Forme di Indecisione ...)

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x^3})$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x} + \sqrt[5]{x} - 4\sqrt{x})$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{3x} - 4\sqrt{x})$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x})$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x^3})$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 3x)$

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 3x)$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x^2 + x} - x)$

11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + 2x)$

12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} + x\sqrt{7})$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{3x^2 + x})$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 8x - 7} - 3x - 2)$

17) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 8x - 7} - 3x - 2)$

18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x + 5} - 2x)$

19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x} - x)$

20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x} - x)$

21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x)$

22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x)$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5\sqrt[3]{x^3 - x} - 4x)$

24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x + 1)$

25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - \frac{1}{10}x^2)$

26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-7} - \sqrt{4x+5})$

27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-9})$

28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})$

29) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}) \quad \begin{array}{l} a > 0 \\ c > 0 \end{array}$

30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-4} - \sqrt[3]{x+7})$

31) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3} - x)$

32) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x} + 4}{2\sqrt{x} + 5}$

33) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{5 - 4\sqrt[3]{x}}$

34) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x}+3}$

35) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

37) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[5]{x}}$

39) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+5}}{x + \sqrt[3]{3x-1}}$

41) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{4x^2-3x}}$

43) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+3x}}{\sqrt{16x^2-25} + \sqrt{9x^2+16}}$

45) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x+x}}$

47) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+7}{\sqrt{x^2+x+9}}$

49) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x-x}}{\sqrt{9x^2+1}}$

51) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2+x+4}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}}$

53) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+4} + x}{\sqrt{x^2+2x+4} - x}$

55) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

56) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$

59) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

60) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

36) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

38) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[4]{x+1}}{4\sqrt[4]{x+5}}$

40) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x+1} + \sqrt{4x-1}}{\sqrt{x} + 2\sqrt{x-3}}$

42) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x^2-3x}}$

44) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x+x}}$

46) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

48) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x-1} + 3x}{\sqrt{x^2+x-2} - 2x}$

50) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x} + x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}}$

52) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}}$

54) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

57) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

58) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2}$

61) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x}$

62) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x}$

RISPOSTE1) $-\infty$ 2) $-\infty$ 3) $-\infty$ 4) $-\infty$ 5) $-\infty$ 6) $+\infty$ 7) $-\infty$ 8) $+\infty$ 9) $\frac{1}{2}$ 10) $+\infty$ 11) $-\frac{5}{4}$ 12) $-\infty$ 13) 0 14) $-\frac{1}{2}$ 15) $+\infty$ 16) $-\frac{10}{3}$ 17) $+\infty$ 18) $-\infty$ 19) 0 20) 0 21) $-\frac{1}{3}$ 22) $-\frac{1}{3}$ 23) $+\infty$ 24) $\frac{5}{3}$ 25) $-\infty$ 26) $-\infty$ 27) 0 28) 0 29) $+\infty$ se $a > c$, $-\infty$ se $a < c$, 0 se $a = c$

30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-4} - \sqrt[3]{x+7}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-4} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt{x-4}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-4} \cdot \left(1 - \underbrace{\sqrt[6]{\frac{(x+7)^2}{(x-4)^3}}}_{\downarrow 0}\right) = +\infty$

31) $\frac{1}{4}$ 32) $\frac{3}{2}$ 33) $-\frac{1}{4}$ 34) 2 35) 1 36) 0 37) $+\infty$ 38) $\frac{3}{4}$ 39) 0 40) $\frac{5}{3}$ 41) $\frac{3}{2}$ 42) $\frac{1}{2}$ 43) $-\frac{2}{7}$ 44) $\frac{1}{2}$ 45) $-\infty$ 46) 1 47) -1 48) -5 49) 0 50) 1 51) 0

52) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-3}} + \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x-3}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x-3)^2}}}_{\downarrow +\infty} + \underbrace{\sqrt[12]{\frac{(x-1)^3}{(x-3)^4}}}_{\downarrow 0}\right) = +\infty$

53) 0 54) $\frac{1}{2}$ 55) $\frac{1}{3}$ 56) $\frac{1}{4}$ 57) $+\infty$ 58) 0 59) $\sqrt{2}-1$ 60) 0 61) $-\infty$ 62) 1