14 - LE SUCCESSIONI

I. COS'E' UNA "SUCCESSIONE"

La sequenza

$$a_0 = -1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{3}{5} \quad \ldots \quad a_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \ldots$$

costituisce un esempio di SUCCESSIONE.

Ecco un altro esempio di successione:

$$a_1 = 3 \quad a_2 = \sqrt{3} \quad a_3 = \sqrt[3]{3} \quad a_4 = \sqrt[4]{3} \quad \ldots \quad a_n = \sqrt[n]{3} \quad \ldots$$

Una successione è dunque una sequenza infinita di numeri reali
(ma potrebbe trattarsi anche di oggetti di altra natura: vettori, funzioni, numeri complessi, figure geometriche...), ciascuno indicabile per mezzo di una lettera (noi nei nostri due esempi abbiamo scelto la lettera a)
munita di un indice, il quale indice potrà assumere i suoi valori
in $\mathbb{N}$ (insieme dei numeri naturali), oppure in un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$.

Nel seguente terzo esempio di successione, i termini sono numeri complessi:

$$z_1 = 1+i \quad z_2 = 1+2i \quad z_3 = 1+3i \quad \ldots \quad z_n = 1+ni \quad \ldots$$

E infine un quarto esempio. Questa volta ciascun termine della successione è una funzione:

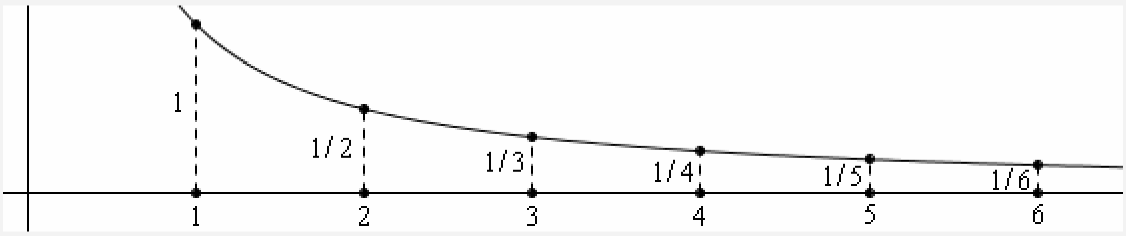
$$f_1(x) = x \quad f(x)_2 = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \quad \ldots \quad f_n(x) = x^n \quad \ldots$$

Nel seguito ci occuperemo esclusivamente di successioni i cui termini siano numeri
(si parla di "successioni numeriche");
anzi, supporremo sempre che si tratti di numeri reali (come nei primi due esempi).
Inoltre, per semplicità, considereremo esclusivamente successioni definite su $\mathbb{N}$, oppure su $\mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ senza lo 0).

Una successione può essere dunque interpretata come
UNA FUNZIONE AVENTE COME DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{N}$ DEI NUMERI NATURALI,
O UN SUO SOTTOINSIEME INFINITO D:
ad ogni numero naturale *n* del dominio corrisponde
uno ed un solo ben determinato "termine" (o "elemento") della successione,
per indicare il quale si può usare una lettera fissata dell'alfabeto, munita dell'indice *n* (es. a_n)

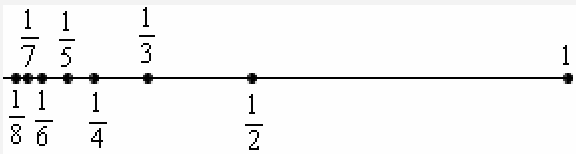
Per visualizzare graficamente una successione, abbiamo sostanzialmente a disposizione due metodi.
Ognuno presenta vantaggi e svantaggi.

Li illustriamo nel seguente esempio, con riferimento alla successione di termine generale $a_n = \frac{1}{n}$:



Questo tipo di visualizzazione mette bene in evidenza il fatto che una successione è una funzione:
a ogni numero naturale (in questo caso, non nullo) *n*, corrisponde uno e un solo ben determinato valore $a_n = 1/n$.
Il dominio della funzione è $\mathbb{N}^*$.
La differenza rispetto alle "normali" funzioni è che
in una successione non abbiamo una variabile **CONTINUA** x, ma una variabile **DISCRETA** *n*.
Emerge anche con efficacia che, al tendere di *n* all'infinito, il corrispondente termine a_n tende a 0.

Quest'altra visualizzazione
mette bene in evidenza
il fatto che i termini della successione
costituiscono un insieme numerico:
l'insieme $\left\{ a_n = \frac{1}{n}, \ \ con\ n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots \right\}$.



La figura mostra anche molto chiaramente che l'insieme $\{a_n\}$ ammette il punto 0 come punto di accumulazione non appartenente all'insieme).

II. PARTICOLARI, SEMPLICI SUCCESSIONI: LE PROGRESSIONI

A) PROGRESSIONI ARITMETICHE

Si dice "progressione aritmetica" una successione di numeri tali che la differenza fra ciascuno di essi e il precedente sia costante (quindi ciascun termine è ottenibile dal precedente addizionandogli una costante).

La **differenza costante** tra ogni termine di una progressione aritmetica e il precedente si dice "**ragione**" della progressione (indicheremo la ragione col simbolo d, dall'iniziale di "differenza").

ESEMPI

La successione $2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ ...$ è una progressione aritmetica di ragione $d=5$.

La successione $1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ -2,\ -\frac{5}{2},...$ è una progressione aritmetica di ragione $d=-\frac{1}{2}$.

Data una progressione aritmetica $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ...$ di ragione d,
è facilissimo verificare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k - a_{k-1} = d\ (per\ definizione) \\ a_k = a_{k-1} + d \\ a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_r = a_s + (r-s)d \end{array}}$$

Se di una progressione aritmetica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi (ad esempio, soltanto i primi n termini),
parleremo di progressione aritmetica finita.

Sussiste il seguente
TEOREMA

**La somma dei termini di una progressione aritmetica finita
è uguale alla semisomma dei termini estremi moltiplicata per il numero dei termini**:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \\ a_k + a_{k+1} + ... + a_n = \frac{a_k + a_n}{2} \cdot (n-k+1) \end{array}}$$

Dimostrazione
La tecnica dimostrativa è perfettamente analoga a quella seguita per ricavare
la "Formula di Gauss" per la somma degli interi da 1 a n: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dunque:

$$\begin{array}{rcccc} S = & a_1 + & a_2 + & ... & +a_n \\ S = & a_n + & a_{n-1} + & ... & +a_1 \\ \hline 2S = & (a_1+a_n)+ & (a_1+a_n)+ & ... & +(a_1+a_n) \end{array}$$

dove risulta $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ per il fatto che $a_2 + a_{n-1} = (a_1+d)+(a_n-d) = a_1 + a_n$
e così per tutte le altre coppie di termini in colonna: $a_k + a_{n-k} = ... = a_1 + a_n$

Se ora consideriamo che $2S \ = \ \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+...+(a_1+a_n)}_{n\ \text{addendi}} = n(a_1+a_n)$

avremo $\boxed{S = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n}$ C.V.D.

ESERCIZI di applicazione del teorema

Verificare che

1) la somma dei primi n numeri dispari: $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ ...,\ 2n-1$ è uguale a n^2
2) la somma dei primi n numeri pari: $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...,\ 2n$ è uguale a $n(n+1)$

B) PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Si dice “progressione geometrica” una successione di numeri tali che il rapporto fra ciascuno di essi e il precedente sia costante (quindi ciascun termine è ottenibile dal precedente moltiplicandolo per una costante).

Il **rapporto costante** tra ogni termine (escludendo, ovviamente, il primo) e il precedente si dice “**ragione**” della progressione: lo indicheremo col simbolo q.

ESEMPI
La successione $2,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ 6250,\ \dots$ è una progressione geometrica di ragione $q=5$.
La successione $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{32},\ \dots$ è una progressione geometrica di ragione $q=-\frac{1}{2}$.

Se la ragione q vale 1 i termini sono tutti uguali; escluderemo perciò questo caso, privo di interesse.
Se la ragione è positiva tutti i termini sono dello stesso segno; se è negativa, i termini hanno segno alterno.
Noi supporremo sempre, per semplicità, che la ragione q sia positiva e che tutti i termini siano positivi; ciò che diremo potrà essere in qualche modo poi “adattato” al caso in cui i termini abbiano segno alterno, ma adattamenti di questo genere saranno lasciati al lettore.

Data una progressione geometrica $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$ di ragione q,
è facilissimo verificare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{a_k}{a_{k-1}}=q\ \ (per\ \ definizione)\ \to\ a_k=a_{k-1}\cdot q \\ a_2=a_1\cdot q \qquad a_3=a_2\cdot q=a_1\cdot q\cdot q=a_1\cdot q^2 \qquad a_n=a_1\cdot q^{n-1} \end{array}}$$

e, più in generale, $\boxed{a_r=a_s\cdot q^{r-s}}$

Se di una progressione geometrica consideriamo soltanto un numero finito di termini consecutivi (ad esempio, soltanto i primi n termini),
parleremo di progressione geometrica finita.

- **Determiniamo ora il valore della *somma* dei termini di una progressione geometrica finita**.
  Cominciamo con l’osservare che
  $$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+\dots+a_1\cdot q^{n-1}=a_1\left(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}\right)$$
  quindi il problema si riconduce a quello del calcolo della somma $1+q+q^2+\dots+q^{n-1}$.

  Come si può facilmente verificare, vale la formula di scomposizione
  $$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$
  e tale formula è vera per tutti gli $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$(NOTA)
  NOTA:
  Avevamo scritto che, con n pari, quando il nostro obiettivo è di scomporre “ad oltranza” il binomio a^n-b^n, l’applicazione della formula è poco conveniente,
  ed è consigliabile piuttosto iniziare con una “scomposizione come differenza di quadrati”.
  Ma non è una scomposizione “ad oltranza” che ci interessa in questo momento.

  Ora, applicando la formula con $a=1$ e $b=q$, avremo:
  $$1-q^n=(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$$
  da cui
  $$\boxed{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}}.$$

  In definitiva, la somma dei termini di una progressione geometrica finita di ragione q
  (oppure: **la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione *q***) è
  $$\boxed{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=a_1\left(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}\right)=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}}$$

ESERCIZIO
Verifica che il prodotto P dei termini di una progressione geometrica finita $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n$
vale $P=\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n}$

III. SUCCESSIONI MONOTONE (CRESCENTI O DECRESCENTI); LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

- **SUCCESSIONI CRESCENTI E DECRESCENTI**

  Una successione $\{a_n\}$ si dice crescente (risp.: decrescente) se, per ogni $k \in \mathbb{N}$ (o, eventualmente, $\mathbb{N}^*$) è
  $a_k < a_{k+1}$ (risp.: $a_k > a_{k+1}$).
  Se al posto di <, > scriviamo $\leq$, $\geq$ otteniamo le def. di successione crescente (decrescente) "in senso lato".
  Ad esempio, la successione $a_n = \dfrac{1}{n}$ è decrescente (in senso stretto).

- **Successioni limitate e illimitate; estremo superiore e inferiore di una successione; eventuale massimo e minimo di una successione**

  Tutti questi termini vanno riferiti all'insieme numerico costituito dai termini della successione considerata.
  Ad esempio, la successione $\left\{a_n = \dfrac{1}{n},\ con\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...\right\}$ è limitata sia inferiormente
  (il suo estremo inferiore è 0) che superiormente (il suo estremo superiore, che ne è anche il massimo, è 1).
  Invece la successione $\left\{a_n = n^2,\ con\ n \in \mathbb{N}\right\} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$ è limitata inferiormente,
  con estremo inferiore 0 che ne è anche il minimo, ma è illimitata superiormente (l'estremo superiore è $+\infty$).

- **LIMITE DI UNA SUCCESSIONE**

  Una successione, come abbiamo visto, può essere pensata come una particolare funzione:
  una funzione il cui dominio sia $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme infinito
  (noi prenderemo sempre come dominio $\mathbb{N}$ oppure $\mathbb{N}^*$).
  Spesso interessa chiedersi a quale valore tende a_n quando *n* diventa "molto grande", "tende all'infinito".
  Ad esempio, è del tutto spontaneo affermare che
  la successione $\left\{a_n = \dfrac{1}{n},\ con\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...\right\}$ tende a 0 al tendere di *n* a $+\infty$
  mentre la successione $\left\{a_n = \dfrac{n+1}{n+2},\ con\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, ...\right\}$ tende a 1 quando $n \to +\infty$.

  Prima di tutto, osserviamo che il tendere a $+\infty$ di *n* (variabile "discreta")
  è, sotto un certo aspetto, diverso dal tendere a $+\infty$ di una variabile "continua" *x*;
  la variabile discreta assume solo CERTI valori, crescendo "a scatti", "a salti",
  mentre una variabile continua cresce assumendo TUTTI i valori intermedi.
  Per il resto, però, *nulla cambia nell'idea di base* che ci conduce alla nozione di limite:
  abbiamo una variabile indipendente *n* (discreta anziché continua),
  a cui facciamo assumere valori arbitrariamente alti,
  e ci chiediamo che valore tende ad assumere il corrispondente termine a_n della successione.
  La definizione precisa di "limite di una successione a_n quando n tende a $+\infty$" dovrà essere,
  quindi, *perfettamente analoga* a quella di "limite di una funzione $f(x)$ quando *x* tende a $+\infty$".
  Occorrerà soltanto qualche piccolo adattamento.

  Aggiungiamo una banalissima osservazione:
  nel caso di una variabile discreta *n*, i cui valori possono essere soltanto numeri naturali,
  sarebbe assurdo pensare di far tendere *n* a $-\infty$, oppure ad un valore finito: questo è ben ovvio!
  Quindi, evidentemente, le uniche definizioni che ci interesseranno saranno quelle di
  "limite (finito o infinito) di una successione, quando *n* tende a $+\infty$".
  E per brevità, non essendo possibili equivoci, al posto di $+\infty$ scriveremo semplicemente ∞.

DEFINIZIONI

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n > \bar{n} \Rightarrow \left|a_n - \ell\right| < \varepsilon\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall M > 0,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{def.}{\Leftrightarrow} \forall M > 0,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n > \bar{n} \Rightarrow a_n < -M\right)$$

Una successione si dice:
- **CONVERGENTE** se tende ad un limite finito,
- **DIVERGENTE** se tende a infinito,
- **INDETERMINATA** se non tende ad alcun limite.

Esempio: verificare, applicando la definizione, che la successione $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ tende a 1 per $n \to \infty$.

Impostiamo la disequazione $\left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$

con l'obiettivo di mostrare che esiste un numero naturale $\overline{n}$ tale che essa sia verificata per tutti gli $n > \overline{n}$.

$$\left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| < \varepsilon; \quad \left|\frac{n+1-n-2}{n+2}\right| < \varepsilon; \quad \left|-\frac{1}{n+2}\right| < \varepsilon \quad \frac{1}{n+2} < \varepsilon; \quad n+2 > \frac{1}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

Pertanto la verifica richiesta è positivamente conclusa:
si può prendere come $\overline{n}$ un qualsiasi intero fra quelli non inferiori al numero $\frac{1}{\varepsilon} - 2$.

TEOREMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONI

Estendono la loro validità alle successioni, purché si apportino lievi ed ovvie modifiche agli enunciati, i teoremi validi per i limiti delle funzioni. Citiamo in particolare:

- **Teorema di unicità del limite:**
  Se una successione, per $n \to \infty$, tende ad un limite (finito o infinito), questo limite è unico
- **Teorema della permanenza del segno:**
  Se una successione a_n, per $n \to \infty$, tende ad un limite (finito o infinito) diverso da 0, allora esiste un indice $\overline{n}$ tale che, $\forall n > \overline{n}$, il termine a_n mantiene lo stesso segno del limite
- **Teoremi del confronto**
  Se esiste un indice $\overline{n}$ tale che, $\forall n > \overline{n}$, si ha $a_n \le c_n \le b_n$, e inoltre $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$,
  allora è anche $\lim_{n\to\infty} c_n = \ell$
  … ed enunciati analoghi agli altri due teoremi del confronto dimostrati per le funzioni
- **Teorema sull'esistenza del limite delle successioni monotone:**
  Se una successione a_n è monotona (crescente o decrescente), in senso stretto o in senso lato, allora esiste certamente il $\lim_{n\to\infty} a_n$,
  e tale limite è uguale all'estremo superiore (se la succ. è crescente) o inferiore (se la succ. è decrescente) dell'insieme numerico $\{a_n\}$.
- **I teoremi sul limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente**
  Per inciso, date due succ. a_n e b_n, per loro "somma" si intende la succ. di termine generale $c_n = a_n + b_n$.
  Analogamente per la differenza, il prodotto e il quoziente.
- **I teoremi sintetizzati da "pseudo-uguaglianze" (es. $1/\infty = 0$ …).**
- **Anche per le successioni valgono le stesse "forme di indecisione" già riscontrate per le funzioni.**

❑ **E' ESTREMAMENTE UTILE il seguente TEOREMA, che permette di estendere, in un sol colpo, alle successioni, un mucchio di risultati già acquisiti per le funzioni:**

«Data una successione a_n, e presa una funzione $f(x)$ tale che i suoi valori quando x è intero positivo coincidano con quelli della successione, ossia: tale che si abbia $f(n) = a_n$, allora, se esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, sarà anche $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ »

OSSERVAZIONE

Il teorema vale anche se l'uguaglianza $f(n) = a_n$ vale soltanto "da un certo indice in poi"!

Esempio di applicazione - Determinare il $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+1}$.

Si tratta di una F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, ma, considerata la funzione $y = \frac{x^2+4x}{x^3+1}$ la quale, per valori interi positivi di x, assume gli stessi valori della successione data, poiché si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x}{x^3+1} = 0$, sarà pure $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+1} = 0$.