

### 13 - APPROSSIMAZIONE DELLE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE COL METODO DI BISEZIONE

Per descrivere questo bellissimo metodo, partiamo da un esempio.

Sia data l'equazione

$$\underbrace{x^3 - 3x - 1}_{f(x)} = 0$$

Innanzitutto, localizziamo approssimativamente le radici (NOTA) col "metodo grafico".

NOTA: quando si parla di un'equazione, la parola "radici" è sinonimo di "soluzioni"

L'obiettivo è di "separare" le radici, ossia di determinare, per ciascuna radice, un intervallo che contenga quella radice e nessun'altra.

Per fare il grafico, sarà conveniente, nel nostro caso, trasportare qualche termine a secondo membro, in modo da aver a che fare con funzioni il più possibile facili da disegnare:

$$\underbrace{x^3}_{f_1(x)} = \underbrace{3x + 1}_{f_2(x)}$$

Vediamo così (figura qui a fianco) che l'equazione assegnata ha 3 radici:

$$\boxed{-2 < \alpha < -1}, \quad \boxed{-1 < \beta < 0}, \quad \boxed{1 < \gamma < 2}.$$

Consideriamo ora una radice, ad esempio  $\gamma$ , e l'intervallo in cui è stata "separata":

$$[a, b] = [1, 2].$$

Per la risoluzione grafica, abbiamo portato l'equazione sotto la forma

$$f_1(x) = f_2(x)$$

ma ora dobbiamo tornare a pensare alla forma iniziale

$$f(x) = 0 \quad \text{ossia} \quad f_1(x) - f_2(x) = 0$$

Della funzione  $f(x) = x^3 - 3x - 1$  noi non abbiamo tracciato il grafico;

tuttavia, il fatto che le due funzioni  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$

si sono "scavalcate" nell'intervallo  $[a, b] = [1, 2]$

ci dice che la loro differenza  $f_1(x) - f_2(x) = f(x)$

passa, al variare di  $x$  da  $a=1$  fino a  $b=2$ ,

dalla positività alla negatività o viceversa.

In effetti, se calcoliamo  $f(a)$  e  $f(b)$ , troviamo valori discordi:

$$f(a) = f(1) = \left[ x^3 - 3x - 1 \right]_{x=1} = 1 - 3 - 1 = -3 < 0$$

$$f(b) = f(2) = \left[ x^3 - 3x - 1 \right]_{x=2} = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$$

La situazione è perciò quella della figura qui a fianco →

**E risolvere l'equazione  $f(x) = 0$  equivale a chiedersi in quale ascissa avviene l'attraversamento dell'asse orizzontale, da parte del grafico della  $f(x)$ .**

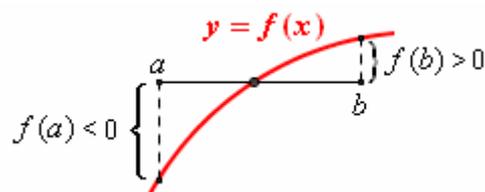
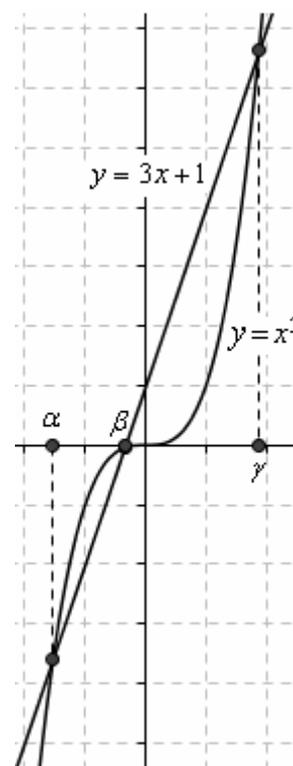
Cominciamo a chiederci se questo attraversamento dell'asse orizzontale avviene nella metà sinistra dell'intervallo, oppure nella metà destra.

A questo scopo, troviamo il punto di mezzo dell'intervallo:

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

e calcoliamo  $f(m)$  ossia  $f(1.5)$ .

$$\text{Avremo } f(m) = f(1.5) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{27}{8} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{27 - 36 - 8}{8} = -\frac{17}{8}$$



Ora, essendo  $-\frac{17}{8} < 0$ ,

la situazione sarà quella illustrata dalla figura qui a destra:

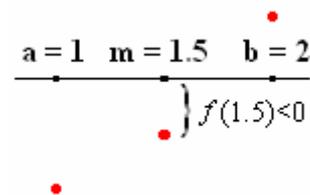
poiché  $f(m)$  è **concorde** con  $f(a)$ ,

il grafico della  $f(x)$  attraverserà l'asse orizzontale

NON nell'intervallo  $[a, m]$  bensì nell'ALTRO intervallo  $[m, b]$ .

Insomma, semplicemente confrontando il segno di  $f(m)$  con quello di  $f(a)$ , abbiamo stabilito che la soluzione cercata deve trovarsi nell'intervallo

$$[m, b] = [1.5; 2].$$



Schematizzando: dal “vecchio” intervallo  $[a, b]$  si passa al NUOVO intervallo

$$\left\{ \begin{array}{l} [a, m] \text{ se } f(m) \text{ è DISCORDE con } f(a), \text{ cioè se } f(m) \cdot f(a) < 0 \\ [m, b] \text{ se } f(m) \text{ è CONCORDE con } f(a), \text{ cioè se } f(m) \cdot f(a) > 0 \end{array} \right.$$

Ora iteriamo (= ripetiamo) il procedimento su questo nuovo intervallo ...

... il nuovo intervallo prende il posto del vecchio!

Otterremo così, per **dimezzamenti successivi** (= bisezioni) dell'intervallo iniziale,

nuovi intervalli sempre più piccoli i cui estremi forniranno un'approssimazione per difetto e una per eccesso, della soluzione cercata, via via sempre più precise.

Eccezionalmente (rarissimo), se dovesse capitare di trovare  $f(m) = 0$ , ci imatteremmo proprio nella soluzione esatta.

#### Esercizio 41)

Scriviamo un programma Pascal per risolvere, col metodo di bisezione, l'equazione  $P(x)=0$ , essendo  $P(x)$  un polinomio di grado non superiore a 5:

$$P(x) = c_0x^5 + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5.$$

Innanzitutto stabiliremo, col metodo grafico, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$c_0x^5 + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5 = 0$$

e le localizzeremo approssimativamente.

Dopodiché, individuato un intervallo  $[a, b]$  in cui siamo sicuri che cada una e una sola soluzione della nostra equazione, affideremo ad un programma Pascal il compito di approssimare tale soluzione con la precisione da noi desiderata (ad esempio, a meno di 0.0001), applicando, appunto, il metodo di bisezione (= dimezzamenti successivi dell'intervallo in cui è localizzata la soluzione).

Il programma dovrà:

#### I) LEGGERE in input

- i 6 coefficienti  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  del polinomio  $P(x) = c_0x^5 + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$
- gli estremi  $a, b$  dell'intervallo in cui l'utente ha “separato” una e una sola radice (= soluzione) dell'equazione  $c_0x^5 + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5 = 0$
- e la precisione  $p$  con la quale l'utente desidera sia approssimata la soluzione in questione

#### II) CALCOLARE $m = (a+b)/2$ e poi SOSTITUIRE l'intervallo $[a, b]$

- ♪ con l'intervallo  $[a, m]$  se  $P(m)$  è discorde rispetto a  $P(a)$ :  $P(m) \cdot P(a) < 0$
- ♪ con l'intervallo  $[m, b]$  in caso contrario;

#### III) ITERARE il procedimento (calcolo di $m = (a+b)/2$ e sostituzione di $[a, b]$ con $[a, m]$ oppure $[m, b]$ ) FINO A QUANDO

- ci si imbatta nella soluzione esatta (caso rarissimo)
- OPPURE l'intervallo sia diventato tale che la sua ampiezza sia minore o uguale a  $p$ .

#### IV) Nel primo (eccezionale) caso, l'output dovrà essere

**LA SOLUZIONE CERCATA E' ...**

mentre nel secondo caso dovrà essere

**LA SOLUZIONE CERCATA E' COMPRESA FRA ...**

**Beh, ho detto “scriviamo” ... ma il programmatore sei tu.**

**Buon lavoro!!!**

