CALCOLO DELLE PROBABILITA' - INDICE

"Una persona pensa di andare a visitare un amico decidendo aleatoriamente in questo modo: decide se partire lanciando una moneta; in caso positivo sceglie uno dei 6 treni possibili lanciando un dado. L'amico, che conosce questo procedimento, vede che non è arrivato con nessuno dei primi 5 treni. Qual è la probabilità che arrivi col sesto?"

La risposta a questo curioso quesito (del grande probabilista Giorgio Dall'Aglio) coincide con la soluzione dell'equazione

$$4(5x+3)+x^2=(x-4)^2$$

PROBABILITA’

1 - IL CONCETTO DI PROBABILITA’ TI E’ GIA’ NOTO! LA “LEGGE EMPIRICA DEL CASO”

1.1 - Casi possibili e casi favorevoli; definizione provvisoria di probabilità

A. Qui davanti a me ho un’urna contenente 2 palline bianche e 98 nere.
Mi metto una benda sugli occhi, scuoto per bene e ripetutamente l’urna, ed estraggo una pallina.
   I. E' più probabile che venga fuori una bianca o una nera?
   II. E se nell’urna ci fossero 40 bianche e 60 nere?

B. In un'urna voglio introdurre 100 palline.
Quante bianche e quante nere dovrò mettere nell'urna se desidero
che sia uguale la probabilità di estrarre una bianca o una nera?

C. Sono in piedi davanti al bancone del bar.
A un certo punto entra un signore e vedendolo il barista mi fa:
"Non ne sono certo, ma è molto probabile che ordini una spremuta".
   I. Secondo te, cosa ha indotto il barista a parlare in questo modo?
   II. Che differenza c'è fra questo esempio e i precedenti?

Vai ora pure a controllare in fondo alla pagina se le risposte che hai dato sono esatte! …

… Bravo! … Dunque ai quesiti proposti sei stato in grado di rispondere facilmente e senza esitazioni!!!
Eppure la definizione di “probabilità” … noi *non l’abbiamo ancora data*!!!

Ma tu già avevi nella tua mente ben chiara l’idea che
valutare la “probabilità” di un evento legato al “caso”
significa
valutare la maggiore, o minore, “facilità” che l’evento in questione si verifichi.

Questo dimostra allora che **il concetto di probabilità TI E’ GIA’ NOTO,**
è un concetto che ogni persona dotata di ragione spontaneamente possiede
(indipendentemente dal fatto che l'abbia o non l’abbia già incontrato nel suo percorso scolastico)
e, quindi, che non ci stiamo occupando di INTRODURRE tale concetto, ma solo di PRECISARLO.

Con riferimento al quesito A, hai saputo dire con sicurezza quale, fra due possibili eventi, era "il più probabile";
il problema B ti ha proposto una situazione in cui i due eventi in gioco dovevano avere "la stessa probabilità".

Ora però ci proponiamo di essere più precisi,
ossia ci proponiamo di QUANTIFICARE, di MISURARE, attraverso un valore NUMERICO,
la probabilità che accada un determinato evento.

Lo svizzero Jakob Bernoulli, nella sua "Ars Conjectandi" (uscita postuma nel 1713)
scrive che
" Probabilitas enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars a toto "
"**La probabilità infatti è il grado della certezza,**
e da questa (= dalla certezza) differisce come la parte differisce dal tutto".

RISPOSTE AI QUESITI A, B, C

A. I. Evidentemente, è molto più probabile (non è certo, ma è probabilissimo) che esca una nera
II. E’ anche questa volta più probabile che esca una nera.
Rispetto alla situazione precedente, però, la probabilità di uscita di una nera è nettamente diminuita.

B. 50 bianche e 50 nere

C. I. Il barista è indotto a parlare in questo modo perché, dall’esperienza passata, ha potuto constatare
che, almeno negli ultimi tempi, quando quel signore entrava nel bar ordinava quasi sempre,
o almeno la grande maggioranza delle volte, una spremuta.

II. La differenza fra l’ultimo esempio e i precedenti consiste in questo:
mentre negli esempi di prima la valutazione di probabilità si poteva fare “a priori”,
cioè senza bisogno di effettuare nessuna estrazione preliminare,
invece qui è soltanto DOPO aver osservato il comportamento del cliente
per un numero abbastanza elevato di giorni che il barista ha potuto formulare la previsione.

Altri spunti di riflessione

A. Se ho in un'urna 2 B e 98 N sono "quasi certo" che dall'estrazione uscirà una N;
la probabilità di estrazione di una N è "altissima" – il "grado di certezza" è "altissimo".
Se ho 40 B e 60 N, la probabilità di estrazione di una N è più bassa;
possiamo dire che il "grado di certezza" è diminuito.
E' evidente che, **di fronte ad un'urna con 100 palline in totale – alcune Bianche, altre Nere – la probabilità di estrarre una Nera è *proporzionale* al numero di palline Nere presenti nell'urna.**

B. **Supponiamo** ora **che fra i 20 alunni di una classe venga estratto, a sorte, un premio.**
Nessuno dei 20 alunni è certo di vincere: ciascuno, però, possiede "un pezzettino" di certezza ...
quanto misura, quanto vale questo "pezzettino"?
Beh, **è ragionevole dire che ciascun alunno possiede 1/20 della "torta" della certezza.**
Supponiamo poi che le 7 femmine della classe dicano:
"Se verrà estratta una qualsiasi di noi 7, regaleremo il premio alla bidella". A questo punto, la bidella si "impadronisce" di 7 "pezzettini" di certezza da 1/20, quindi "possiede i 7/20 dell'intera certezza".

C. Immaginiamo che una comitiva di amici un po' pazzi abbia promesso a Chiara un regalo per il suo compleanno, ma solo a condizione che da un'urna, contenente 100 palline di cui 90 verdi, venga estratta una pallina verde.
E' ovvio che Chiara, in questo modo, non è certa di ricevere il regalo; però ne è "quasi" certa, perché il numero 90 (casi favorevoli) è prossimo al numero 100 (casi possibili).
Chiara non possiede interamente la certezza di ricevere il regalo, ma ...
possiede 90 pezzettini da 1/100 di certezza: possiede i 90/100 della certezza.
Ed è altrettanto ovvio che se si dimezzasse sia il numero delle palline verdi (portandolo a 45) che il numero totale delle palline (portandolo a 50), la probabilità di ricevere il regalo non cambierebbe: d'altronde, in questo modo Chiara si troverebbe a possedere i 45/50 della certezza, cioè una "fetta" della "torta della certezza", esattamente uguale a 90/100.
Sarebbe in fondo la stessa cosa prendere semplicemente 10 palline, di cui 9 verdi: $90/100 = 45/50 = 9/10$.

A questo punto, è ora di trarre le conclusioni.
Evidentemente nella QUANTIFICAZIONE, nella MISURAZIONE della probabilità, c'entra sia il numero dei casi favorevoli che il numero dei casi possibili;

- dimezzando, o raddoppiando, sia il n° dei casi favorevoli che il n° dei possibili, la probabilità resta invariata;
- a parità di casi possibili, la probabilità è direttamente proporzionale al numero dei casi favorevoli.

La certezza si può pensare come una "torta" divisa in tante fettine uguali quanti sono i casi possibili; la probabilità di un evento corrisponde a tante "fettine" di certezza quanti sono i casi favorevoli all'evento stesso.

Queste considerazioni portano a concludere che il modo più spontaneo, più naturale, di "misurare" la probabilità di un evento, è quello di calcolare il rapporto $\dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$.

DEFINIZIONE (attenzione: PROVVISORIA, perché andrà poi perfezionata)

Dicesi "probabilità" di un evento, il rapporto $p = \dfrac{\textbf{numero casi favorevoli}}{\textbf{numero casi possibili}}$

La probabilità di un dato evento è dunque sempre compresa fra 0 e 1 (il numero dei casi favorevoli non può ovviamente superare il numero dei casi possibili); precisamente, la probabilità è uguale a 0 se e solo se l'evento è impossibile, è uguale a 1 se e solo se l'evento è certo.

ESERCIZI

1) **Se si lancia un dado, la probabilità di ottenere "5" è …..**
2) **Se si estrae una carta da un mazzo da scopa (NOTA), la probabilità che sia una figura è …..**
   NOTA - In un mazzo da scopa abbiamo 40 carte:
   4 assi, 4 re, 4 donne, 4 fanti, 4 "sette", 4 "sei", 4 "cinque", 4 "quattro", 4 "tre", 4 "due".
   Ogni gruppo di 4 è formato da carte di diverso "seme":
   una di cuori, una di quadri, una di fiori, una di picche.
   La pagina successiva riporta uno schema del mazzo da scopa.
3) **Un'urna contiene 327 palline, contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, ... , 327.**
   Pescando a occhi chiusi, qual è la probabilità di estrarre un numero pari? E un numero dispari?

RISPOSTE: 1) 1/6 2) $12/40 = 3/10$ 3) 163/327; 164/327

IL MAZZO DA SCOPA (40 carte: K = King, Re; Q = Queen, Donna; J = Jack, Fante)

	A	K	Q	J	7	6	5	4	3	2
Cuori	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥
Quadri	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
Fiori	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
Picche	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠

4 Assi: Come Quando Fuori Piove
- **1 Asso di Cuori, Rosso**
- **1 Asso di Quadri, Rosso**
- **1 Asso di Fiori, Nero**
- **1 Asso di Picche, Nero**

4 K: K di Cuori, K di Quadri, K di Fiori, K di Picche
4 Q: …
…
NOTA: i Quadri sono anche detti "Ori", o "Denari"

Paul Cézanne, Les Joueurs de Cartes, dipinto fra il 1890 e il 1895

1.2 - La legge empirica del caso

La definizione cui siamo pervenuti ha un interessantissimo riscontro "sperimentale" (a tutti noto!).
Consideriamo un'urna contenente 10 palline, di cui 3 rosse.
La probabilità di estrarre dall'urna una pallina rossa è 3/10.
Bene: supponiamo di effettuare moltissime estrazioni, diciamo 10000 estrazioni
(sempre rimettendo la pallina nell'urna, dopo ogni estrazione, cioè, come si dice, "reimbussolando" la pallina).
Teniamo conto del numero di palline rosse estratte.
Vedremo che il rapporto

$$\frac{\text{numero di palline rosse estratte}}{\text{numero di estrazioni}}$$

si avvicinerà molto al valore 3/10 = 0,3.
In generale:

Si constata che, QUANDO SI RIPETE PER "MOLTE" VOLTE una prova,
la **FREQUENZA RELATIVA** di un esito, cioè il rapporto

$$\frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}}$$

si avvicina "molto" alla **PROBABILITÀ A PRIORI** di quell'esito,
calcolata tramite il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

A questa "legge", la cui validità è rilevabile sperimentalmente, si è attribuito il nome di
"**LEGGE EMPIRICA DEL CASO**".

OSSERVAZIONE TERMINOLOGICA

**Si trova scritto in alcuni testi che la "legge empirica del caso"
è anche nota col nome di "legge dei grandi numeri".
Questa affermazione NON è corretta,
perché in realtà si tratta di due enunciati concettualmente molto diversi:**

- **la "*legge dei grandi numeri*", detta anche "Teorema di Bernoulli", è, appunto, un teorema
(cioè un'affermazione dimostrabile):
per comprendere l'enunciato di questo Teorema occorrono
nozioni più avanzate di Calcolo delle Probabilità.
[A dire il vero, sono state formulate DIVERSE "leggi dei grandi numeri",
che si collocano a diversi gradi di "generalità"].**
- **La "*legge empirica del caso*" è, invece, tutt'altro che un teorema:
diciamo che è una "verità rilevabile sperimentalmente",
ma su questo si potrebbe in realtà discutere per giornate intere.**

1.3 - Proposte di riflessione per la piena comprensione della "legge empirica del caso"

A. Se lanci 1000 volte una moneta, quante volte ti aspetti che esca "testa" e quante volte "croce"?

B. Se lanci 1000 volte una moneta ed esce 400 volte "testa", ne deduci che la moneta è truccata?

C. Supponiamo di avere un mazzo di carte da scopa
(40 carte, di cui 10 di cuori, 10 di quadri, 10 di fiori, 10 di picche),
e di pescare per 1000 volte una carta, ogni volta reinserendola nel mazzo e mischiando
prima di andare a ripescare.
Supponiamo che al termine delle 1000 estrazioni sia uscita per 261 volte una carta di cuori.
"Cuori" è quindi uscito con frequenza relativa 261/1000,
vicina alla "probabilità a priori" che vale 10/40, ossia 1/4, ossia 250/1000.
Se ora effettuiamo altre 9000 estrazioni, portando il totale a 10000, ti domando:
è possibile che la frequenza relativa SI ALLONTANI dalla "probabilità a priori"?
E' possibile, per esempio, che in queste 10000 estrazioni il seme "cuori" esca 2630 volte?
(la frequenza relativa sarebbe 2630/10000 = 263/1000, che rispetto a 261/1000 è *più lontana* da 250/1000)

D. Si sa che in una scatola ci sono 10 palline, alcune bianche e altre nere.
Non si sa però quante sono le bianche e quante le nere.
Le palline sono tutte indistinguibili fra loro al tatto, in quanto differiscono esclusivamente per il colore.
Se una persona può estrarre dalla scatola una sola pallina per volta, guardarne il colore,
poi rimetterla nella scatola e (dopo aver scosso la scatola per mischiare le palline)
effettuare un'altra estrazione, e così via,
potrà quella persona stabilire quante fra le dieci palline sono bianche e quante nere?

E. Ripensiamo alla precedente situazione D).
Supponiamo che NON si sappia quante sono in totale le palline nella scatola.
Vale a dire: sappiamo che sono alcune bianche e alcune nere, ma non sappiamo
quante sono le bianche, quante sono le nere, e nemmeno, questa volta, quante sono le palline in totale.
Con tante estrazioni successive di un'unica pallina, con successivo "re-imbussolamento",
COSA si può venire a sapere riguardo alle palline?

RISPOSTE

A. *Circa* 500 volte Testa e *circa* 500 volte Croce.
Mi aspetto che il numero di Teste e il numero di Croci non si discostino di molto da 500.
Infatti, 1000 lanci sono già “tanti” e quindi, per la legge empirica del caso,
la frequenza relativa dovrebbe avvicinarsi alla probabilità a priori che è ½ per T e ½ per C.

B. Lo sospetterei fortissimamente. Mi pare che il numero di lanci (1000) sia già così elevato da “forzare”,
per una questione di “simmetria del caso”, il numero di Teste a non discostarsi COSI’ TANTO da 500.
Ritengo estremamente improbabile, anche se non impossibile teoricamente, che il numero di Teste sia così basso.
O la moneta è truccata, o è si è verificata una circostanza estremamente rara, eccezionale.

C. Sì, è possibile, anche se “raro”, eccezionale”, “molto improbabile”.
La “legge empirica del caso” non afferma che il “tendere” della frequenza relativa alla probabilità “a priori”,
quando il numero di prove si fa molto elevato, sia privo di “oscillazioni”.
La circostanza prospettata appare tuttavia estremamente poco probabile,
perché 10000 è un numero di estrazioni molto grande, e molto maggiore del già “grande” valore 1000.

D. Sì. Basta che questa persona effettui un gran numero di estrazioni con reimmissione (= reimbussolamento),
rilevando la frequenza, per esempio, delle bianche.
Per la legge empirica del caso, la frequenza relativa tenderà ad approssimare la probabilità a priori,
che a sua volta sarà uguale a n° bianche/n° totale = n° bianche/10.
Ad esempio, effettuando 1000 prove aleatorie, la frequenza assoluta delle bianche sarà quasi certamente
molto vicina a uno dei valori 100, 200, 300, 400, … , 900 (a seconda che le Bianche siano 1, 2, 3, 4, … , 9).
A partire dalla frequenza, sarà quindi possibile inferire il numero delle Bianche, con rischio di errore quasi nullo.
Infatti, da una parte, è estremamente improbabile che la frequenza assoluta si discosti molto
da una delle “frequenze attese” 100, 200, …
(ad es., con 1000 prove, sarebbe un evento quasi incredibile che la frequenza risultasse uguale, poniamo, a 149);
dall’altra, sarebbe ancora più inverosimile, raro, eccezionale, che, rilevata ad es. una frequenza di Bianche
uguale a 412, prossima cioè a 400, il numero delle bianche non fosse 4 ma 5, o 3, o ancora diverso.

E. Si potranno conoscere, approssimativamente, i tre rapporti
n° bianche /n° totale, n° nere /n° totale, n° bianche/n° nere.

2 - INADEGUATEZZA DELLA DEFINIZIONE DATA; LA DEFINIZIONE DI LAPLACE

2.1 - La definizione che abbiamo appena scritto è da buttare?

Accanto alla definizione di probabilità come rapporto *n° casi favorevoli/n° casi possibili*,
ho scritto un aggettivo limitativo: **provvisoria**.
Per qual motivo la definizione data va considerata solo *provvisoria*?
Cerchiamo di comprenderlo considerando i due esempi seguenti.

A. Al posto di lanciare la classica moneta, lanciamo invece un tronco di cono, considerando che esca "testa" quando il solido si ferma con la base più larga verso l'alto, "croce" nel caso contrario (e annullando il lancio se per caso il tronco dovesse rimanere in equilibrio sulla superficie laterale). Su quale esito ci converrebbe scommettere?

Immaginiamo che la posta in palio sia alta: rifletteremmo a dovere prima di scegliere, vero?
Certamente la forma particolare di questa "moneta" atipica farà sì che sia
"più facile", "più probabile", uno dei due esiti rispetto all'altro.
D'altra parte, la "definizione provvisoria" porterebbe alla seguente analisi:

- casi favorevoli all'uscita di "testa" = 1;
- casi favorevoli all'uscita di "croce" = 1;
- casi possibili = 2

DA CUI
probabilità dell'evento "esce testa" = 1/2; probabilità dell'evento "esce croce" = 1/2.
… Uguale probabilità, dunque … !?!
Eh no, proprio NON CI SIAMO: qui la "definizione provvisoria" senza dubbio fallisce.

B. Lancio una moneta; se esce Testa, mi viene consegnata un'urna U1 in cui ci sono una pallina Nera e una Rossa: da quest'urna estraggo una pallina; se invece esce Croce, mi viene consegnata una diversa urna U2 in cui vi sono 3 palline Verdi e 1 Gialla; da quest'urna estraggo una pallina. E' più probabile che la pallina estratta sia Gialla o sia Rossa?

Applicando la "definizione provvisoria" si troverebbe uguale probabilità
(si può, per esempio, pensare che i casi possibili siano TN, TR, CV_1, CV_2, CV_3, CG);
invece, basta riflettere un attimo per concludere che
la pallina Rossa ha probabilità *maggiore* di essere estratta, rispetto a quella Gialla.
(Non sei convinto? Prova a pensare ad un'urna U2 contenente 99 palline Verdi e 1 Gialla!
… L'evento "esce una Gialla" sarebbe evidentemente "eccezionale",
mentre l'evento "esce una Rossa" sarebbe piuttosto "ordinario", ti pare?)

***PER QUAL MOTIVO* la "definizione provvisoria" non è risultata valida ai fini di una valutazione corretta della probabilità nei due esempi di cui sopra?**

2.2 - La definizione "perfezionata" (di Laplace)

Queste riflessioni ci portano evidentemente a sostituire la definizione inizialmente posta
con quest'altra, data da Pierre Simon de **Laplace** nel suo **"Théorie Analytique des Probabilités" del 1812:**

"... la probabilité d'un évenement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, LORSQUE RIEN NE PORTE A CROIRE QUE L'UN DE CES CAS DOIT ARRIVER PLUTOT QUE LES AUTRES"

ovvero:

"... la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli all'evento stesso ed il numero dei casi possibili, QUALORA NULLA PORTI A RITENERE CHE UN CASO TENDA A VERIFICARSI PIU' FACILMENTE DEGLI ALTRI" (purché, cioè, i casi possibili siano "*UGUALMENTE* POSSIBILI").

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA' (dovuta a Laplace, 1812)

Dicesi probabilità di un evento il rapporto $\boxed{\dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}}$

QUALORA TUTTI I CASI POSSANO ESSERE CONSIDERATI
♥ "EQUIPOSSIBILI";
cioè, qualora non ci siano casi che tendano a verificarsi "più facilmente" di altri.

LA DEFINIZIONE PERFEZIONATA

2.3 - Nemmeno la definizione "perfezionata" è, a ben guardare, impeccabile ☹

Siamo tuttavia costretti ad ammettere che il nostro sforzo di giungere ad una definizione completa e rigorosa di "probabilità" NON si è concluso in modo veramente soddisfacente.

La "definizione" cui siamo alla fine pervenuti … è, ahimè, grossolanamente deficitaria, perché mancante di una *regola*, di un criterio, che permetta di stabilire QUANDO si possa parlare di casi "ugualmente facili (o probabili)" e quando invece no.

E poiché non si riesce ad enunciare una regola siffatta in termini che evitino "circoli viziosi" e che siano a) sufficientemente generali, da una parte; b) e sufficientemente dettagliati, dall'altra, la decisione se due casi siano da considerare o meno equipossibili è, alla fin dei conti, lasciata alla nostra valutazione soggettiva.

Laplace stesso ammette, a questo proposito, che

"la juste appréciation des divers cas est un des points les plus délicats de l'analyse des hazards"

cioè che

"la corretta valutazione dei diversi casi
- in sostanza, la valutazione se siano o meno "equipossibili" -
è uno dei punti più delicati dell'analisi degli eventi casuali".

Tuttavia, si constata che,

pur essendo la valutazione di equipossibilità lasciata alla discrezionalità individuale,
considerazioni di simmetria condotte e discusse con attenzione
portano a valutazioni unanimemente condivise.

Una buona guida a proposito è (nonostante si tratti di un'indicazione piuttosto vaga)
il "PRINCIPIO DI RAGIONE INSUFFICIENTE" o "PRINCIPIO DI INDIFFERENZA":
"due esiti sono equipossibili se non c'è nessuna ragione perché si debba ritenere il contrario"

2.4 - Il problema dell'equipossibilità

Due esempi per sottolineare l'importanza di analizzare con cura se i casi considerati siano equipossibili.

Ragiona con la tua testa, coprendo inizialmente la parte inferiore della pagina, su cui si trovano le risposte.

A. Un tale mi dice:

"Lanciando due monete, la probabilità che esca "testa" su entrambe è 1/3.
Infatti, i casi possibili sono: 1) due "teste" 2) due "croci" 3) una "testa" e una "croce".
Di questi tre casi possibili, uno solo è favorevole, quindi, appunto, *p*(2 Teste) = 1/3"

E' corretta questa affermazione?

B. Ho qui 3 cartoncini rettangolari;

- **uno ha entrambe le facce rosse,**
- **un altro ha entrambe le facce bianche,**
- **il terzo ha una faccia bianca e la faccia opposta rossa.**

Metto i cartoncini in un cassetto, ti chiamo …
… e tu, senza guardare, estrai un cartoncino dal cassetto e lo posi sul tavolo.
Supponiamo a questo punto che la faccia in evidenza sia rossa.
Qual è la probabilità che la faccia coperta sia bianca?

RISPOSTE

A. Un'analisi attenta mostra che i tre casi prospettati *non* sono equipossibili.
L'insieme dei casi equipossibili è (T, T) (T, C) (C, T) (C, C)
(per facilitare il ragionamento giova pensare a un qualcosa che psicologicamente ci porti a non dimenticare l'individualità di ciascuna moneta: ad esempio, possiamo pensare che una moneta sia da 2 euro e l'altra da 1 euro).
Quindi l'affermazione non è corretta, e la risposta esatta è invece *p*(2 Teste) = 1/4

B. Verrebbe forse spontaneo rispondere 1/2, ma la risposta giusta è invece 1/3. Infatti …

primo cartoncino:	R1, R2 (una faccia rossa, l'altra ancora rossa).
secondo cartoncino:	B1, B2
terzo cartoncino:	B3, R3

La faccia rossa che io vedo potrebbe essere, con ugual facilità, R1, o R2, o R3.
E di questi 3 casi EQUIPOSSIBILI uno solo (R3) è favorevole all'evento: "la faccia nascosta è bianca".

3 - DIVERSI APPROCCI ALLA PROBABILITA'

In Matematica ci sono 4 modi alternativi di porre la definizione di probabilità:

a) definizione **CLASSICA**
b) definizione **FREQUENTISTA**
c) definizione **ASSIOMATICA**
d) definizione **SOGGETTIVISTA**

a) Def. **CLASSICA**:

$$\textbf{probabilità} = \frac{\textbf{n° casi favorevoli}}{\textbf{n° casi possibili}}$$

sotto l'ipotesi che i casi possibili siano valutati tutti "EQUIpossibili", o "equiprobabili".

Quest'ultima valutazione è individuale e legata sostanzialmente a considerazioni di "simmetria" non inquadrabili, purtroppo, in un criterio che si riesca a definire in termini rigorosi e generali.

Tuttavia, dopo un'attenta analisi e discussione, la "equipossibilità" o la "non equipossibilità" dei casi in esame dovrebbe sempre emergere in modo chiaro, ed essere unanimemente condivisa, sulla base del cosiddetto "PRINCIPIO DI RAGIONE INSUFFICIENTE", o "Principio di Indifferenza": "due casi sono equipossibili se non c'è nessuna ragione perché si debba ritenere il contrario".

b) Def. **FREQUENTISTA** (o "statistica"):

$$\textbf{probabilità = frequenza relativa} = \frac{\textbf{n° prove favorevoli all'evento}}{\textbf{n° totale di prove effettuate}},$$

calcolata, s'intende, dopo aver effettuato un numero "sufficientemente elevato" di prove.

Questo tipo di valutazione di probabilità è in genere destinato, per sua natura, a contenere un (se pur piccolo) errore di approssimazione. Il numero n di prove è da giudicarsi "sufficientemente elevato" se la frequenza relativa, allorquando ci si avvicina a n prove, tende a rimanere pressoché stabile, in quanto si osserva che le sue variazioni si fanno molto ma molto piccole.

c) Def. **ASSIOMATICA** (Kolmogorov, 1933):
non si preoccupa di stabilire "cos'è" la probabilità,
ma solo di definirla implicitamente tramite una famiglia di assiomi.

d) Def. **SOGGETTIVISTA** (De Finetti e altri, 1931):

- INTERPRETAZIONE 1)
  La probabilità "soggettiva" di un evento è a/b se un soggetto "coerente" G è disposto a pagare subito la somma a per ricevere in futuro la somma b (con un guadagno netto, quindi, uguale a $b-a$) nel caso l'evento si verifichi.
  "Coerente" significa che lo stesso soggetto G deve essere disposto in qualsiasi momento a scambiarsi di ruolo con l'altro giocatore G' …
  Ma cosa fa l'altro giocatore? Riceve tanto per cominciare la somma a, ed è disposto a pagare b se l'evento si verifica: quindi anche G, per essere coerente, deve essere disposto a incassare subito la somma a per pagare in un futuro la somma b (con una perdita uguale in valore assoluto a $b-a$) se l'evento si verifica.
- INTERPRETAZIONE 2)
  Anche, in modo del tutto equivalente: la probabilità di un evento E è uguale a s/S se per me è del tutto indifferente l'offerta, da parte di un benefattore,
  - ♪ **di una somma s certa, che mi viene pagata in ogni caso**
  - ♫ **oppure in alternativa di una somma S, che però mi verrà data solo se l'evento E si verificherà.**

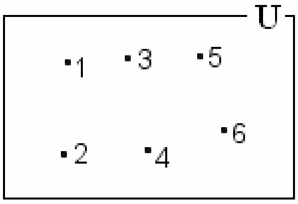
- **Il taglio di queste lezioni è classico-frequentistico al medesimo tempo**.
  Infatti abbiamo posto la definizione di tipo "classico", e accettato l'asserto "sperimentale" chiamato "**LEGGE EMPIRICA DEL CASO**", di cui ci serviremo per passare, quando opportuno, da una "visione classica" a una "visione frequentista":
  "**Quando si ripete per 'molte' volte una prova, la frequenza relativa di un esito, cioè il rapporto (n° di prove che hanno avuto quell'esito)/(n° totale di prove) si avvicina 'molto' alla probabilità a priori di quell'esito, calcolata tramite il rapporto (n° casi favorevoli)/(n° casi possibili)**"
- Nella risoluzione dei problemi sulla probabilità, è assai proficuo, a parere di chi scrive, utilizzare per certi problemi una visione *classica*, per altri una visione *frequentista*, per altri *entrambe*.
- L'approccio matematico "puro" alla teoria della probabilità sarebbe quello *assiomatico*, che con ogni evidenza è didatticamente improponibile ai fini di una prima presentazione dell'argomento.

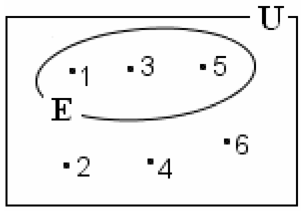
4 - TERMINOLOGIA, SIMBOLOGIA; INDICAZIONI METODOLOGICHE; ESEMPI

4.1 - Terminologia specifica

- **L' "insieme dei casi possibili" viene anche chiamato "insieme universo", o "spazio degli eventi", o talvolta "spazio campionario".**
- **Un sottoinsieme dell'insieme universo viene chiamato "evento".**
- **Un "evento" unitario (costituito cioè da un solo caso) viene detto "evento elementare".**

Facciamo un esempio.
Se la "prova" cui ci riferiamo è il "lancio di un dado", l' "insieme dei casi possibili" è $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.





Un "evento" potrebbe essere il seguente: E = "esce un numero dispari".
Tale "evento" coincide, sostanzialmente, con l'insieme $\{1,\ 3,\ 5\}$ (figura a destra)

Ecco un altro "evento": "esce un numero primo". Tale evento si identifica con l'insieme $\{2,\ 3,\ 5\}$.

Altro evento ancora: "esce il 6". Si tratta di un "evento elementare", che coincide con l'insieme unitario $\{6\}$.

Poiché il numero dei casi favorevoli può andare da 0 ad un valore che comunque non può superare il numero dei casi possibili, la probabilità $p(\mathrm{A})=\dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$ **(se c'è "equipossibilità" fra i casi) di un evento A, è sempre compresa fra 0 e 1:**

$$\boxed{0 \le p(\mathrm{A}) \le 1}\ ;$$

***p*(A) = 0 se e solo se l'evento A è IMPOSSIBILE, *p*(A) = 1 se e solo se l'evento A è CERTO.**

Osserviamo per inciso che questa limitazione del valore della probabilità fra il confine inferiore 0 (= impossibilità) e il confine superiore 1 (= certezza) vale qualunque sia l'approccio scelto (classico, frequentista, assiomatico, soggettivista).

4.2 - Indicazioni metodologiche

L'indimenticabile professor Pascal Dupont dell'Università di Torino, nella sua opera "Primo incontro con la Probabilità" (SEI, 1985), suggerisce che di fronte ad un problema di CdP la prima cosa da fare è di concentrarsi bene sull'insieme dei casi possibili (spazio degli eventi). Precisamente:

a. **Letto il testo del problema, concepiamo in cosa consiste la "prova", analizzando bene tutte le modalità della medesima**
b. **Pensiamo ora di eseguire la prova e sforziamoci di immaginare uno qualsiasi dei risultati che possono verificarsi eseguendo la prova**
c. **Concepiamo, "costruiamo" quindi, l' "insieme universo" di tutti i possibili risultati, l' "insieme dei casi possibili", lo "spazio degli eventi"**
d. **Analizziamo con cura se gli eventi considerati si realizzano "pari facilitate".**

4.3 - Anticipazione: l'evento contrario

La somma della probabilità di un evento A con quella dell'evento contrario $\overline{\mathrm{A}}$ è sempre uguale a 1:

$$\boxed{p(\mathrm{A})+p(\overline{\mathrm{A}})=1} \quad \text{e quindi} \quad \boxed{p(\mathrm{A})=1-p(\overline{\mathrm{A}})}\,, \quad \boxed{p(\overline{\mathrm{A}})=1-p(\mathrm{A})}$$

Ciò si deve sostanzialmente al fatto che un evento e il suo contrario, nel loro insieme, riempiono tutta la "torta" della certezza, che vale 1. Comunque **una dimostrazione più accurata di questo enunciato, che anticipiamo qui per via della sua grandissima utilità, si trova a pag. 50**. Puoi andare a vederla, se vuoi, anche subito: è davvero semplice e richiede solamente la definizione laplaciana di probabilità su cui ci basiamo, nient'altro.

4.4 - Esempi svolti (sulla definizione di Laplace)

C'è la risoluzione commentata di ciascun problema appena sotto il testo,
♪ *ma se tu la coprissi …*
♫ *… e ci provassi innanzitutto per conto tuo …*
… COME SAREBBE UTILE!!!

- **Esempio 1**
Che probabilità c'è, estraendo una carta da un mazzo da scopa, che si tratti
a) del "settebello" (= il 7 di quadri)?
b) di un "7"?
c) di una carta di "denari" (= di quadri)?
d) di una figura rossa?
e) di una carta dal "2" al "6"?

Risoluzione
Casi possibili = 40; sono evidentemente tutti "equipossibili".
a) 1 solo caso favorevole; $p = 1/40$ b) 4 casi favorevoli; $p = 4/40 = 1/10$ c) 10 casi fav.; $p = 10/40 = 1/4$
d) 6 casi favorevoli; $p = 6/40 = 0{,}15 = 15\%$ e) 20 casi favorevoli; $p = 20/40 = 1/2 = 0{,}5 = 50\%$

- **Esempio 2**
Si sceglie a caso una pagina di un libro.
Che probabilità c'è che la prima vocale che si incontra leggendo sia la "e"?

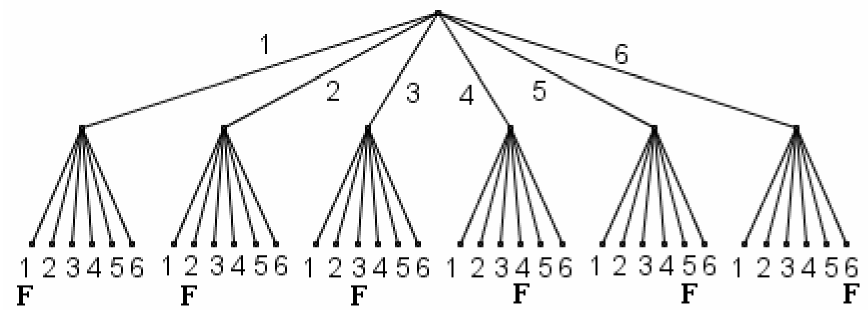
Risoluzione
Sarebbe ingenuo, ed errato, rispondere "1/5". I casi "a", "e", "i", "o", "u" NON sono infatti equipossibili, data la diversa frequenza con cui le varie vocali compaiono nel linguaggio.
La domanda resta senza risposta, a meno di effettuare una ricerca statistica che ci porterebbe sul terreno della "probabilità a posteriori".

- **Esempio 3**
Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi?

Risoluzione
Posto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
l'**insieme dei casi possibili** sarà il prodotto cartesiano $D \times D$
(= l'insieme delle coppie ordinate aventi come primo elemento un elemento preso da D e come secondo elemento ancora un elemento preso da D)
e avrà perciò 36 elementi;
i **casi favorevoli** sono 6 e cioè (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6).
Quindi: $p(\text{stesso numero sui due dadi}) = 6/36 = 1/6$.

	1	2	3	4	5	6
1	F	•	•	•	•	•
2	•	F	•	•	•	•
3	•	•	F	•	•	•
4	•	•	•	F	•	•
5	•	•	•	•	F	•
6	•	•	•	•	•	F

Osserviamo che l'insieme universo si può rappresentare molto bene, in questo problema, con una tabella a doppia entrata (qui a destra) oppure con un grafo (qui sotto):



- **Esempio 4**
Che probabilità c'è, avendo a disposizione due mazzi da scopa,
se si estrae una carta da ciascuno di essi, di pescare due figure?

Risoluzione
Casi possibili = $40 \cdot 40 = 1600$ (esempio: il K di Cuori dal 1° mazzo e il 5 di Fiori dal 2° …);
casi favorevoli $12 \cdot 12 = 144$. $p = 144/1600 = 9/100 = 0{,}09$.
Nozioni appena un po' più avanzate di CdP permetterebbero di procedere ancora più semplicemente.

- **Esempio 5**
  Prima di lanciare una coppia di dadi, dei bambini scommettono sulla somma dei punteggi che si otterranno. Fermo restando che i piccoli dovrebbero avere altri giochi, altrimenti si ritroveranno a vent'anni stanchi di vivere e pieni di debiti, qual è il risultato più probabile di una prova aleatoria come questa?

Risoluzione

La somma minima che si può ottenere è 2:
essa si ottiene in 1 solo caso, quando esce 1 sia sul dado "blu" che sul dado "rosso".
Invece, ad esempio, la somma 3 si può ottenere in 2 modi: (1, 2) e (2, 1).
L'uso delle parentesi tonde nel prospetto sottostante **indica che pensiamo la coppia come *ordinata***:
il primo numero esprime l'esito sul dado "blu", il secondo sul dado "rosso". Complessivamente:

2	(1,1)	$p(2)=1/36$
3	(1,2) (2,1)	$p(3)=2/36$
4	(1,3) (3,1) (2,2)	$p(4)=3/36$
5	(1,4) (4,1) (2,3) (3,2)	$p(5)=4/36$
6	(1,5) (5,1) (2,4) (4,2) (3,3)	$p(6)=5/36$
7	**(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)**	$\boldsymbol{p(7)=6/36}$
8	(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)	$p(8)=5/36$
9	(3,6) (6,3) (4,5) (5,4)	$p(9)=4/36$
10	(4,6) (6,4) (5,5)	$p(10)=3/36$
11	(5,6) (6,5)	$p(11)=2/36$
12	(6,6)	$p(12)=1/36$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

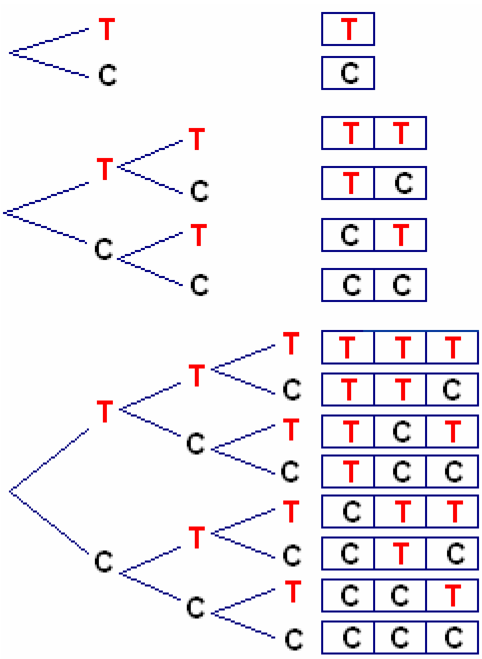
La somma che si può ottenere in più modi è 7 (6 modi). La sua probabilità è $p(7)=6/36=1/6$

- **Esempio 6**
  Lanciando successivamente per 10 volte una moneta, stabilire che probabilità c'è di ottenere:
  a) tutte Teste b) Testa le prime 4 volte, Croce le rimanenti

Risoluzione

Per entrambi i quesiti, i casi possibili sono tanti quante le sequenze di 10 simboli,
ciascuno dei quali può valere T o C; ad esempio, un caso possibile è TTTCCTCTTC.
Perciò abbiamo $2^{10}=1024$ casi possibili.
Pensando ad un diagramma ad albero si capisce bene per qual motivo il numero di casi possibili è 1024.

Avendo a disposizione 10 caselle con la possibilità di riempire ciascuna casella o con "T" o con "C", quante sequenze fra loro distinte è possibile scrivere? Ecco qui davanti a me la sequenza delle 10 caselle da riempire:



Per la prima casella, ho evidentemente due possibilità: **T** o **C**.

Comunque io abbia scelto di riempire la 1ª casella,
per la 2ª mi si apre un ventaglio di 2 possibilità: **T** o **C**.

Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 2 caselle**,
sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
$\mathbf{4=2^2}$ **possibilità (TT, TC, CT, CC)**

Comunque io abbia scelto il contenuto delle prime 2 caselle,
per riempire la 3ª mi si apre ancora un ventaglio di 2 possibilità.

Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 3 caselle**,
sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
$\mathbf{8=2^3}$ **possibilità**
(TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC)

Ogni volta che penso a una casella in più, il numero di modi
in cui è possibile riempire la sequenza di caselle considerate
raddoppia per via del ventaglio di 2 possibilità che si apre !!!

A questo punto, è evidente che: **10 caselle** $\rightarrow \mathbf{2^{10}=1024}$ **possibilità**.

a) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTTTTTTT. La probabilità richiesta è $p(\text{tutte T}) = 1/1024 = 0{,}0009765$
b) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTCCCCCC. La probabilità richiesta è $p(\text{TTTTCCCCCC}) = 1/1024$.

- **Esempio 7**

Avevo in tasca 5 monete, 2 da 1 euro e 3 da 2 euro. Pesco dalla tasca, prendendo le prime 2 che mi capitano fra le dita. Calcola la probabilità che queste formino un totale di
a) 4 euro b) 2 euro c) 1 euro

Risoluzione

Possiamo schematizzare così:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
	1 *euro*	1	2	2	2

Per tutti e tre i quesiti l'insieme dei casi possibili è
(**notare l'uso delle parentesi graffe e non tonde intorno a ogni coppia, per indicare che la coppia viene qui pensata senza che abbia importanza l'ordine dei due elementi**):

$$\{\ \{M_1, M_2\};\ \{M_1, M_3\};\ \{M_1, M_4\};\ \{M_1, M_5\};$$
$$\{M_2, M_3\};\ \{M_2, M_4\};\ \{M_2, M_5\};$$
$$\{M_3, M_4\};\ \{M_3, M_5\};$$
$$\{M_4, M_5\}\ \}$$

Possiamo valutare tutti e 10 questi casi come *equi*possibili: non c'è ragione per l'ipotesi contraria.
Ora, considerando le somme dei valori delle coppie di monete, avremo

$\{M_1, M_2\}$ 2 *euro*
$\{M_1, M_3\}$ 3 *euro*
$\{M_1, M_4\}$ 3 *euro*
$\{M_1, M_5\}$ 3 *euro*
$\{M_2, M_3\}$ 3 *euro*
$\{M_2, M_4\}$ 3 *euro*
$\{M_2, M_5\}$ 3 *euro*
$\{M_3, M_4\}$ 4 *euro*
$\{M_3, M_5\}$ 4 *euro*
$\{M_4, M_5\}$ 4 *euro*

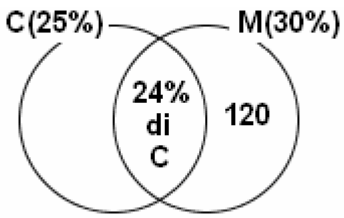
Avremo dunque: $a)\ p = \dfrac{3}{10}$ $b)\ p = \dfrac{1}{10}$ $c)\ p = 0$ (*evento impossibile*)

- **Esempio 8**

In una scuola, il 25% degli studenti segue un corso di Computer e il 30% un corso di Musica. Il 24% dei partecipanti a Computer fa anche Musica; in 120 fanno Musica, ma non Computer.
a) Preso a caso uno studente, che probabilità c'è che faccia Computer ma non Musica?
b) Preso a caso uno studente che faccia Musica, che probabilità c'è che frequenti anche Computer?

Risoluzione

Converrà innanzitutto rappresentare la situazione con un diagramma di Venn:

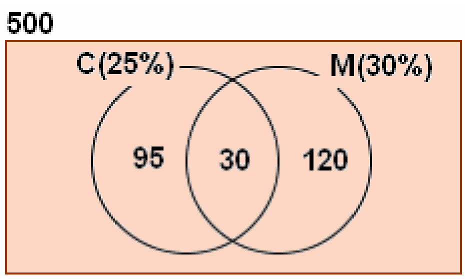


$$C \cap M:\ \frac{24}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{6}{100}$$

quindi coloro che fanno sia Computer che Musica sono il 6% del totale e dunque sono la 5^a parte di quelli che fanno Musica (30% del totale).
Perciò quei 120 in $M - C$ saranno i 4/5 degli elementi di M: da cui

$$\frac{4}{5}M = 120 \ \rightarrow\ M = 150$$

(osserviamo che, in modo disinvolto ma efficace dal punto di vista "pratico", stiamo usando una stessa lettera per indicare tanto un *insieme* quanto il *numero dei suoi elementi*)



Allora possiamo con semplici passaggi determinare il numero di studenti che stanno nei vari insiemi, compreso il numero totale di studenti della scuola, che risulta essere di 500.

Per dar risposta ai due quesiti basta osservare il diagramma:

a) $p = \dfrac{95}{500} = \dfrac{19}{100} = 19\%$ b) $p = \dfrac{30}{150} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

4.5 - ESERCIZI (risposte alla fine della rassegna)

COSA DOBBIAMO DOMANDARCI SEMPRE:

- **Qual è l'insieme dei casi possibili?**
- **C'è "equipossibilità"?**
- **Quanti sono, questi casi (equi)possibili?**
- **E quanti sono invece i casi favorevoli?**

DUNQUE probabilità = $\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi (equi)possibili}}$

1) Lanciando un dado,
che probabilità c'è che esca
a) un multiplo di 3?
b) un numero diverso da 6?
c) un numero primo?

2) In una classe vi sono 18 ragazzi e 9 ragazze. Se viene estratto coi bigliettini un cognome a caso per la prima interrogazione di Storia, che probabilità c'è che si tratti di un maschio?

3) Un amico ha acquistato 100 biglietti di una lotteria nazionale.
Ha poi saputo che i biglietti stampati sono 20 milioni, e sono stati venduti tutti.
Che probabilità ha di vincere il 1° premio?

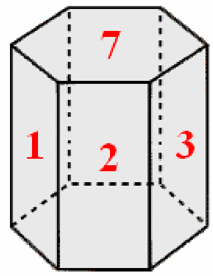
4) Si gioca alla tombola (numeri interi da 1 a 90).
Che probabilità c'è che il primo estratto sia
a) un multiplo di 13?
b) un quadrato perfetto?
c) uno dei numeri che sono divisibili per 10 o per 12?
d) un numero minore di 91?
e) un numero divisibile per 91?

5) Se il nome di una ragazza inizia con una vocale, che probabilità c'è che questa sia "A"?

6) Se si "pesca" a caso un intero da 1 a 20, stabilisci che probabilità c'è che sia divisibile:
a) sia per 2 che per 3 b) per 2 e/o per 3.

7) Da un mazzo da scopa (40 carte) ⇨ se ne pesca 1. Se mi dicono che NON è il "settebello" (7 di denari), che probabilità c'è che la carta sia comunque di denari? ["Denari" = "Ori" = "Quadri"]

8) Si estrae a sorte un numero di 2 cifre, poi si lancia una moneta
e se esce "Testa" se ne prende la prima cifra, altrimenti la seconda.
Che probabilità c'è di ottenere in questo modo
a) un "9"?
b) uno "0"?



9) Lancio un dado a 8 facce, numerate da 1 a 8, della forma illustrata in figura. →
Che probabilità c'è che si presenti sulla faccia in alto un multiplo di 3?

10) Riempi i puntini:
Se un evento è certo, detta p la sua probabilità, è $p = \ldots$
Se un evento è impossibile, detta p la sua probabilità, è $p = \ldots$
La probabilità di un evento è sempre compresa fra un minimo di … e un massimo di …
e il primo di questi valori si ha soltanto nel caso in cui l'evento sia …
mentre il secondo valore si ha soltanto nel caso in cui l'evento sia …

11) La probabilità dell'evento "lanciando un dado, esce un numero minore di 7" è … perché l'evento è … ;
sempre lanciando un dado, la probabilità dell'evento "esce un numero maggiore di 7" è …
perché questo evento è …

12) In un cassetto ci sono 4 fazzoletti bianchi e 3 scozzesi.
a) Qual è la probabilità che estraendone uno a caso, esso sia bianco?
b) Qual è la probabilità che, estraendo 4 fazzoletti a caso, almeno 1 di essi sia bianco?

13) In un'urna ci sono 2 palline Bianche, 2 Rosse e 2 Nere.
a) Qual è la probabilità che, estraendo 1 pallina, essa sia Nera?
b) Se si estrae una pallina e questa risulta Nera, estraendone poi una seconda,
senza aver rimesso la prima nell'urna, che probabilità c'è che sia Nera anch'essa?

14) Sul bancone di un bar, sono rimaste 10 brioches esternamente identiche,
ma 2 di esse hanno il cioccolato dentro, l'unico ripieno che non mi piace.
Presa una brioche a caso, che probabilità c'è che sia di mio gradimento?

15) Qual è la probabilità che il 1° estratto nella prossima estrazione alla ruota di Napoli sia un numero primo?

16) E' corretto dire che, se si lancia un dado, i casi possibili sono 2:
"numero pari" o "numero dispari", quindi, ad esempio, $p(pari) = 1/2$?

17) Una piccola pesca di beneficenza ha 240 biglietti, numerati da 1 a 240; io sono in possesso del numero 120.
Viene estratto il numero cui spetta il 1° premio.
Io domando se quel numero è di 3 cifre, e mi rispondono "sì".
Domando se queste cifre sono tutte minori di 3, e mi rispondono "sì".
Chiedo infine se le cifre sono tutte minori di 2 e mi rispondono "no".
Con queste informazioni, che probabilità ho di aver vinto il 1° premio?

18) I 10 articoli di una vetrina hanno tutti prezzi diversi.
Che probabilità ho, scegliendone 1 a caso, che sia il più a buon mercato?
Che probabilità ho, scegliendone 2 a caso, che uno sia più caro dell'altro?

19) Ho giocato il 49 sulla ruota del Lotto ⇨ di Napoli.
Che probabilità c'è che esca come primo numero estratto?
… Mi dicono ora che il primo estratto sulla ruota di Napoli è stato un multiplo di 7, ma non è stato il 7.
Che probabilità c'è che si tratti proprio del 49?

20) Mettiti d'accordo con un gruppetto di amici. Suddividetevi in coppie (almeno 5 coppie).
In ciascuna coppia, uno dei due mischia le carte di un mazzo da scopa, e l'altro estrae a caso una carta;
questo, lo si fa per 200 volte complessivamente, sempre reinserendo la carta nel mazzo dopo l'estrazione.
Si tratta di annotare quante volte complessivamente esce "cuori"
per verificare, alla fine, se la "legge empirica del caso" appare rispettata.

21) Come per l'esercizio/attività precedente, soltanto che invece di estrarre una carta si lanciano due dadi
e si fa la somma dei punteggi ottenuti (per le probabilità *a priori* dei vari esiti vedi l'Esempio 5 di pag. 11)

22) L'insieme universo dei casi equipossibili quando si valuta la probabilità
che "lanciando due monete, escano due croci", è:
a) {T, C, T, C} b) {T, C} c) {TT, TC, CT, CC} d) nessuno dei precedenti

23) Quanti sono i casi possibili quando si lancia una moneta
a) 3 volte di seguito? b) 4 volte di seguito? c) 8 volte di seguito?

24) Si lanciano in aria due monete. Che probabilità c'è che esca "Testa" su entrambe?

25) a) Calcola la probabilità che lanciando simultaneamente 2 monete gli esiti siano uguali.
b) E se le monete fossero 3, quale sarebbe la probabilità che gli esiti siano tutti uguali? c) E se fossero 4?

26) Si lancia per due volte una moneta. Che probabilità c'è di ottenere "Testa" almeno una volta?

27) Si lanciano 3 monete. Un caso possibile è, ad esempio, TTC.
Che probabilità c'è di non ottenere mai "Testa"? a) 1/4 b) 1/6 c) 1/8 d) 1/9

28) Se si lanciano 3 monete, che probabilità c'è che esca una volta "Testa" e le rimanenti "Croce"?

29) Si lanciano 3 monete. Che probabilità c'è di ottenere almeno una "Testa"? a) 8/9 b) 7/8 c) 3/4 d) 2/3

30) Si lanciano 3 monete. Che probabilità c'è di ottenere almeno due "Teste"? a) 3/4 b) 2/3 c) 1/2 d) 1/3

31) Si lancia una moneta per 4 volte consecutive. Che probabilità c'è che
a) non si abbiano mai 2 esiti successivi uguali? b) si abbiano almeno 2 esiti successivi uguali?

32) Se si lancia una puntina da disegno, essa potrà fermarsi sul tavolo (o sul pavimento)
con la punta in su o con la punta in giù. Qual è la probabilità di ciascuno dei due eventi?

33) Il numero 58, sulla ruota del Lotto di Napoli, non è mai uscito nelle precedenti 150 estrazioni. Invece il 59
è uscito nell'estrazione più recente. Conviene di più giocare il 58 o il 59 nell'estrazione di questa sera?

34) Nel gioco del Superenalotto ⇨, c'è qualche sestina che è più conveniente giocare?

35) Se so che un'amica è nata a Giugno, e anch'io sono nato a Giugno,
che probabilità c'è che il nostro compleanno cada nello stesso giorno?

36) Una classe di 20 studenti ha i banchi doppi: ogni banco, insomma, è condiviso da due studenti.
I posti a sedere vengono sorteggiati.
Giuseppe e Luca si detestano. Che probabilità c'è che l'estrazione li condanni a esser compagni di banco?

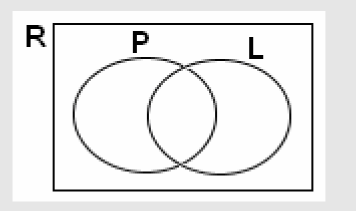
37) La probabilità di essersi ammalati di scarlattina prima di iniziare le scuole elementari
è valutata, in Italia, intorno al 35%. All'inizio dell'anno scolastico, in una Prima elementare
con 240 alunni, quanti saranno coloro che hanno già fatto la scarlattina?

38) Lanciando due dadi, l’insieme dei casi possibili può essere rappresentato tramite lo schema riportato qui a fianco.
Tre casi possibili sono, ad esempio: (4, 6); (3, 3); (6, 4).
Ora, nello schema, indica con una crocetta l’insieme dei casi favorevoli all’evento “la somma dei due punteggi usciti è 4”.
Che probabilità ha l’evento in questione?
a) 1/6 b) 1/12 c) 3 d) 1/9

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

39) a) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, l’esito del lancio sia un “doppio 1”
b) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, su uno di questi esca “1” e sull’altro “6”
c) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, su uno di essi esca un numero pari e sull’altro un dispari
d) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la faccia “1” si presenti una e una sola volta
e) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la faccia “1” si presenti almeno una volta

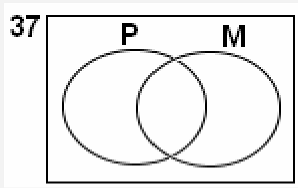
40) Lanciando 1000 volte una coppia di dadi, quante volte ci aspettiamo che esca lo stesso numero su entrambi?



41) Il 20% dei residenti in un comune è pensionato, e il 10% è laureato.
Però soltanto il 5% dei pensionati, in quel comune, è laureato.
Se si estrae a caso il nome di un abitante, che probabilità c’è che sia:
I) pensionato e laureato II) né pensionato, né laureato
III) pensionato, ma non laureato IV) laureato, ma non pensionato
V) pensionato o in alternativa laureato

42) Il 70% degli iscritti ad un club sono maschi; delle femmine, quest’anno il 20% ha lasciato al club una donazione, mentre solo il 10% dei maschi lo ha fatto.
a) Preso un iscritto a caso, determinare la probabilità che abbia lasciato una donazione al club.
b) Preso a caso un membro che abbia lasciato una donazione, determinare la probabilità che sia maschio.

43) Alla Roulette Francese possono uscire i numeri 0, 1, 2, 3, ... , 36
e giocare “Pair” significa puntare su tutti i numeri >0 pari,
mentre giocare “Manque” equivale a puntare sui numeri da 1 fino a 18.
Nello schema a fianco, scrivi all’interno di ciascuno dei 4 territori quanti sono gli elementi dell’insieme corrispondente.
Se metto un gettone su *Pair* e un altro su *Manque*, che probabilità ho di
I) vincere su entrambe le giocate? II) vincere su almeno una giocata?
III) perdere su entrambe le giocate? IV) vincere su esattamente 1 giocata?



Lo “0” in matematica fa parte dei numeri pari, alla roulette invece è convenzionalmente considerato “neutro”.

44) Il 30% delle famiglie di un paese ha un cane; di queste il 40% ha pure un gatto.
Fra tutte le famiglie che possiedono un gatto, il 24% possiede anche un cane.
Estratta a sorte una famiglia in quel paese, determinare la probabilità che possegga almeno un animale domestico fra cane e gatto.

45) In una fabbrica ci sono due macchine:
A, che produce pezzi di cui il 5% è difettoso, e B, i cui pezzi sono addirittura difettosi al 10%.
Se ho qui davanti a me un certo numero di pezzi, e so che i 2/5 di essi provengono dalla macchina A mentre i rimanenti dalla macchina B, potrò determinare la probabilità che uno di essi, scelto a caso, sia buono?
E la probabilità che un pezzo preso a caso, qualora risulti buono, provenga dalla macchina A?

46) Consideriamo un insieme di 1200 famiglie in ognuna delle quali ci siano esattamente 2 figli.
Supponiamo altresì che la probabilità di nascer maschio sia esattamente uguale a quella di nascer femmina (anche se nella realtà c’è un piccolissima differenza).
I) in quante, pressappoco, fra queste famiglie, ci sarà almeno una figlia femmina? a) 600 b) 800 c) 900
II) in quante, pressappoco, fra queste famiglie, il secondogenito è una femmina? a) 400 b) 600 c) 800

47) Quattro fratelli - Anna, Bruno, Carlo e Dario - hanno preso questa mattina i voti seguenti: 4, 5, 7, 9.
Determina la probabilità che la mamma, convocando due di essi a caso, trovi la media dei loro due voti insufficiente (<6).

48) Ci sono 4 carte, una con entrambe le facce Blu, una con entrambe le facce Rosse, le due rimanenti ciascuna con una faccia Blu e l’altra Rossa.
Un mio amico le mette in un cassetto.
Io estraggo con gli occhi bendati una carta, poi mi viene tolta la benda e io vedo il colore di una faccia.
Che probabilità c’è che anche l’altra abbia lo stesso colore?

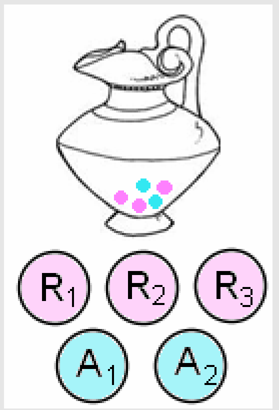
49) Sul ripiano della reception dell'hotel ci sono tre chiavi, fra cui quelle delle stanze di Aldo e di Bruno. Se Aldo e Bruno scegliessero a caso, senza guardare, che probabilità ci sarebbe che
a) becchino entrambi la chiave giusta?
b) almeno uno dei due becchi la chiave giusta?
c) nessuno dei due becchi la chiave giusta?

50) Un'urna contiene un certo numero x di palline bianche e il numero doppio $2x$ di palline nere. Se si aggiungessero altre 3 palline bianche, la probabilità di estrarre una "bianca" raddoppierebbe. Quanto vale x?

51) Un'urna contiene 120 palline; se ne estrae una, se ne osserva il colore, poi la si reimmette nell'urna e se ne estrae un'altra. Ripetendo la prova per 400 volte, per 52 volte la pallina risulta blu. Quante palline blu contiene l'urna?

52) Una moneta è regolare, un'altra è scandalosamente truccata perché porta due "Teste". Vengono poste in un sacchetto, poi ne si pesca una a caso, la si lancia ed … esce "Testa". Che probabilità c'è che la moneta pescata sia quella truccata?

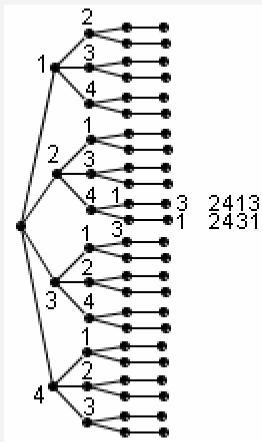
53) Se tre persone sono in attesa a uno sportello, che probabilità c'è che il loro ordine nella coda coincida con l'ordine alfabetico dei cognomi?
a) 1/27 b) 1/9 c) 1/8 d) 1/6



54) Un'urna contiene 3 palline Rosa e 2 Azzurre. Se se ne estrae una e poi, SENZA aver "reimbussolato" (= reintrodotto nell'urna) la pallina estratta, se ne estrae una seconda. Si vuole valutare la probabilità che le due palline estratte siano di colore diverso.
I) Perché non è giusto dire che i casi equipossibili sono RR, RA, AR, AA?
II) Dette R_1, R_2, R_3, A_1, A_2 le palline, uno dei casi equipossibili è ad esempio A_2R_1, che considereremo distinto da R_1A_2. Quanti sono in totale i casi equipossibili?
III) Quanti sono in totale i casi favorevoli all'evento "colore diverso"?
IV) Se si fanno 500 prove, quante volte ci aspettiamo pressappoco che si verifichi l'evento "colore diverso"?

55) Un'urna contiene quattro biglie numerate: 1, 2, 3, 4. Le si estrae dall'urna una dopo l'altra.
Che probabilità c'è che in questo modo le palline vengano estratte nello stesso ordine del numero che portano?
a) 1/64 b) 1/27 c) 1/24 d) 1/16

Per contare il numero dei casi possibili (un caso possibile è, ad esempio, 2-4-3-1) puoi ricorrere, se lo conosci, al "Calcolo Combinatorio", oppure pensare a un "diagramma ad albero". Per il 1° numero uscito c'è un ventaglio di 4 possibilità; per ognuna di queste 4 possibilità, si apre un ventaglio di 3 possibilità per il 2° numero; ecc.



56) In un'urna, ci sono 3 palline Bianche e 2 Nere. Viene estratta una pallina, che viene messa da parte (NON viene, cioè, "reimbussolata" che significherebbe "rimessa nell'urna"); poi dall'urna con una pallina in meno viene estratta una seconda pallina. Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

57) In un'urna, ci sono 3 palline Bianche e 2 Nere. Viene estratta una pallina, che viene poi rimessa nell'urna (= "reimbussolata"); viene quindi fatta un'altra estrazione. Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

58) Un'urna contiene 5 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5. Se ne pesca una e la si mette da parte, poi si sommano i numeri letti sulle altre. Che probabilità c'è, così facendo, di ottenere un numero
a) pari? b) dispari? c) maggiore di 10? d) maggiore di 14?

59) La “probabilità” di un evento è un numero che misura la facilità che quell’evento ha di verificarsi, in una prova “(1)” ossia “il cui esito sia casuale”.
Essa è data dal rapporto, cioè dal (2), fra il numero dei casi (3) a quell’evento, e il numero dei casi (4), purché però i casi in questione tendano a verificarsi con la stessa “facilità”, cioè siano fra loro “(5)”.
La probabilità può dunque andare da un minimo di (6), quando l’evento è (7), a un massimo di (8) quando invece l’evento è (9).
L’insieme dei casi possibili si dice “insieme universo”, o “spazio degli eventi”, o “spazio (10)”.
Una legge sperimentale afferma che, quando si fa un numero elevato di prove in ciascuna delle quali potrebbe verificarsi, con probabilità p, un dato evento, allora il rapporto fra il n° di prove in cui quell’evento si è verificato, e il n° totale delle prove effettuate, tende ad avvicinarsi a p: questo enunciato prende il nome di “legge (11) del (12).

						3										11					
						1												2			
																		8			
					4																
																		6			
						5															
																					12
	10																				
7																	9				

RISPOSTE

1) a) 1/3 b) 5/6 c) 1/2 2) $p(\text{maschio}) = 18/(18+9) = 18/27 = 2/3$
3) $100/20\,000\,000 = 1/200\,000 = 0{,}000005$ 4) a) 1/15 b) 1/10 c) 1/6 d) 1 e) 0
5) I 5 casi sono tutt’altro che equipossibili. Non si può rispondere, se non eventualmente dopo aver effettuato una indagine statistica accurata sulla popolazione femminile locale.
6) a) $p(\text{sia per 2 che per 3}) = 3/20$ b) $p(\text{per 2 e/o per 3}) = 13/20$ 7) $9/39 = 3/13$
8) I numeri di 2 cifre sono 90: si hanno 90 “prime cifre” e 90 “seconde cifre”, per un totale di 180 cifre. Ora, le modalità della prova aleatoria assicurano che ognuna di queste 180 cifre può essere ottenuta con la stessa facilità (è proprio così … pensaci bene!).
Ma delle 180 cifre in questione, 19 sono “9” e 9 sono “0”. Perciò $p(9) = 19/180$; $p(0) = 9/180 = 1/20$
9) Non si può rispondere se non attraverso una visione “statistica”, lanciando per moltissime volte quel dado per determinare il rapporto fra il numero di lanci nei quali è uscito un multiplo di 3, e il n° totale di lanci. Infatti il dado non presenta una simmetria tale che si possano ritenere *equi*possibili tutti e 8 gli esiti.
10) $p = 1$; $p = 0$; fra un minimo di 0 e un massimo di 1; impossibile; certo 11) 1; certo; 0; impossibile
12) a) 4/7 b) E’ uguale a 1, perché l’evento è certo 13) a) 2/6 = 1/3 b) 1/5 14) 8/10 = 4/5 15) 24/90 = 4/15
16) E’ corretto, perché una semplicissima analisi porta a stabilire che i due casi (ciascuno dei quali, volendo, è composto di 3 sottocasi …) sono *equi*possibili. Non altrettanto si potrebbe invece dire, ad esempio, per il lancio di una puntina da disegno: anche qui avremmo due casi, ma *non* equipossibili.
17) 1/14 18) 1/10; 1 19) 1/90; 1/11 22) c
23) a) TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC quindi $8 = 2^3$ b) $16 = 2^4$ c) $2^8 = 256$
24) I casi possibili sono 4: TT, TC, CT, CC, e sono tutti *equipossibili*. Il caso favorevole è 1 solo.
$p = 1/4 = 0{,}25 = 25\%$
25) a) 1/2 b) 1/4 c) 1/8
26) Casi possibili: TT, TC, CT, CC. Casi favorevoli a “almeno 1 Testa”: TT, TC, CT. $p = 3/4$
27) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a “mai Testa”: 1 solo (CCC). $p = 1/8$.
28) Casi possibili: 8 (TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC).
Casi favorevoli: 3 (TCC, CTC, CCT). $p = 3/8$.
29) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a “almeno 1 Testa”: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT. $p = 7/8$.
30) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a “almeno 2 Teste”: TTT, TTC, TCT, CTT. $p = 4/8 = 1/2$.

31) a) I casi possibili sono 16 (tutti fra loro *equipossibili*):

TTTT, TTTC, TTCT, TTCC, TCTT, TCTC, TCCT, TCCC, CTTT, CTTC, CTCT, CTCC, CCTT, CCTC, CCCT, CCCC.

I casi favorevoli sono 2: TCTC e CTCT. La probabilità richiesta è 2/16 = 1/8 = 0,125 = 12,5%.

b) I casi favorevoli sono 14 (16 meno i 2 di cui al punto a)). La probabilità richiesta è 14/16 = 7/8.

32) I due casi "punta in su" e "punta in giù" *non* sono, evidentemente, equipossibili.
Le probabilità richieste potranno essere valutate solamente *a posteriori*, dopo aver effettuato un numero elevato di lanci: si porrà $p = numero\ lanci\ che\ hanno\ avuto\ quell'esito / numero\ totale\ lanci$

33) E' del tutto indifferente. L'urna "non ha memoria", la "facilità" di uscita di un dato numero in un'estrazione non è in alcun modo condizionata dagli esiti delle estrazioni precedenti.
La probabilità di uscita del 58 o del 59 sarà identica, nell'estrazione di questa sera.
Certo, PRIMA della lunghissima sequenza di non-uscite del 58, si sarebbe potuto affermare:
"è estremamente poco probabile che il 58 non esca mai nelle prossime 150 o 151 estrazioni".
Ma DOPO che l'evento "raro" della non-uscita per 150 volte di fila si è verificato, "si ricomincia da capo": la probabilità di uscita del 58 alla prossima estrazione è uguale a quella che il 58 ha avuto, o avrà, di essere estratto, in una qualsivoglia determinata estrazione nel passato o nel futuro.

34) Ogni sestina fissata ha la stessa probabilità, bassissima, di uscire.
Però, in caso di vincita, il montepremi viene suddiviso in parti uguali fra tutti coloro che hanno indovinato.
Quindi, forse, le sestine più "regolari", come ad esempio la 1 2 3 4 5 6 o la 10 20 30 40 50 60 oppure la 11 22 33 44 55 66, POTREBBERO essere più convenienti, in quanto si può ipotizzare che tendano a essere giocate più raramente. Infatti la mente umana in genere è portata erroneamente a ritenerle meno probabili di quelle più "disordinate", soltanto per il fatto (irrilevante per il comportamento dell'urna) che la loro "individualità" salta agli occhi in modo più marcato, mentre ciò non accade, ad esempio, per una sestina come 22 35 47 59 81 86 .
D'altra parte, occorrerebbe anche valutare l'eventualità che il medesimo ragionamento venga effettuato da più persone … nella misura in cui ciò dovesse avvenire, giocare tali sestine "regolari" finirebbe per perdere la convenienza di cui si parlava, e anzi risultare controproducente.
Consiglio: non giocare al Superenalotto, o al limite giocare solo 1 euro (possibilmente con un "socio" ☺).

35) 1/30

36) Dal punto di vista probabilistico, evidentemente nulla cambia se si suppone che Giuseppe e Luca siano rispettivamente il primo e il secondo a cui viene attribuito, per estrazione, il posto.
Ad ogni posto si assegna dunque un numero (da 1 a 20), e si preparano i bigliettini.
Si siede per primo Giuseppe, al posto per lui sorteggiato.
Rimangono 19 sedie libere, fra le quali 1 sola è quella accanto a Giuseppe.
La probabilità che Luca si sieda accanto a Giuseppe è dunque uguale a 1/19
(ossia alla probabilità che, sui 19 biglietti rimanenti dopo la prima estrazione, venga estratto proprio quello che corrisponde alla sedia accanto a quella dove sta Giuseppe).

37) Intorno al 35% di 240, che è poi 84; chiaramente, la stima è approssimativa!

38) $p = 3/36 = 1/12$. La somma dei punteggi è 4 nei casi indicati in figura: →

	1	2	3	4	5	6
1			X			
2		X				
3	X					
4						
5						
6						

39) a) 1/36 b) 1/18 c) 1/2 d) 5/18 e) 11/36

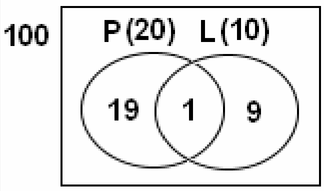
40) La probabilità dell'evento "esce lo stesso numero su entrambi i dadi" è 1/6.

- I casi possibili sono infatti 36 (1 sul dado "rosso" e 1 sul "blu", 1 sul "rosso" e 2 sul "blu", ecc. ecc.) e quelli favorevoli 6, ma $6/36 = 1/6$;
- oppure: il primo dado che atterra, potrà mostrare un punto qualsiasi, dopodiché c'è una possibilità su 6 che anche il secondo dado mostri proprio quel punto.

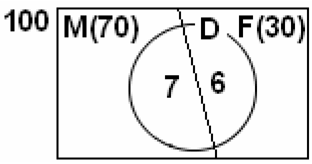
Se una coppia di dadi viene lanciata 1000 volte (1000 è già un numero piuttosto elevato, quindi dovrebbero essere evidenti le implicazioni della "legge empirica del caso"), la frequenza di uscita di una coppia di esiti uguali si aggirerà intorno a $1/6 \cdot 1000 = 166,66...$ per cui ci aspettiamo di osservare questo evento un numero di volte che non si discosti troppo da tale valore.

41) I) 1/100
II) 71/100
III) 19/100
IV) 9/100
V) 29/100

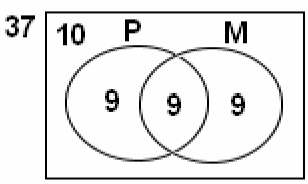
Nel diagramma qui a fianco abbiamo "finto" che gli abitanti della città siano esattamente 100.



42)
a) 13%
b) $7/13 \approx 54\%$

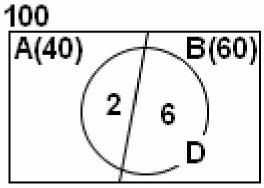


43) I) 9/37
II) 27/37
III) 10/37
IV) 18/37



44) 68%

45) Sì, approssimativamente.
Si può fare un diagramma di Venn,
pensando per fissare le idee a 100 pezzi (figura qui a destra) …
Si trova $p(buono) = 92/100 = 92\%$.



Anche: detto n il numero totale di pezzi che ho davanti a me,
il numero di pezzi prodotti da A
sarà $\frac{2}{5}n$ e il numero di quelli prodotti da B sarà $\frac{3}{5}n$. I pezzi difettosi saranno in totale
$\frac{2}{5}n \cdot \frac{5}{100} + \frac{3}{5}n \cdot \frac{10}{100} = \frac{1}{50}n + \frac{3}{50}n = \frac{4}{50}n = \frac{2}{25}n$ (all'incirca) e quelli buoni saranno quindi $n - \frac{2}{25}n = \frac{23}{25}n$.

La probabilità, pescando a caso un pezzo, di trovarlo buono, si aggirerà intorno a $\frac{\frac{23}{25}n}{n} = \frac{23}{25} = 0{,}92 = 92\%$

La risposta alla seconda domanda è $38/92 = 19/46 \approx 41\%$.

46) I) p(almeno una figlia femmina) = ¾. Quindi, per la Legge Empirica del Caso,
$$\frac{n°\ \ famiglie\ con\ almeno\ 1\ \ figlia\ \ femmina}{n°\ totale\ \ famiglie} \approx \frac{3}{4} \ \rightarrow\ \frac{x}{1200} \approx \frac{3}{4} \ \rightarrow\ x \approx 900$$
II) p(secondogenito femmina) = ½. Quindi, per la Legge Empirica del Caso,
$$\frac{n°\ \ famiglie\ con\ \ figlio\ secondogenito\ \ femmina}{n°\ totale\ \ famiglie} \approx \frac{1}{2} \ \rightarrow\ \frac{x}{1200} \approx \frac{1}{2} \ \rightarrow\ x \approx 600$$

47) 1/3 48) 1/2

49) a) Indichiamo le 3 chiavi con A, B, C, dove A è la chiave di Aldo e B quella di Bruno.
Sceglie Aldo, sceglie Bruno, la chiave non scelta resta dov'era.
I casi possibili (equipossibili) sono: ABC (unico caso favorevole); ACB; BAC; BCA; CAB; CBA
e la probabilità richiesta è 1/6.
b) 1/2 c) 1/2

50) $\frac{x+3}{x+2x+3} = 2 \cdot \frac{x}{x+2x} \qquad \frac{x+3}{3x+3} = 2 \cdot \frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}} \qquad \frac{x+3}{3(x+1)} = \frac{2}{3} \qquad \frac{x+3}{\cancel{3(x+1)}} = \frac{2(x+1)}{\cancel{3(x+1)}} \qquad x+3 = 2x+2 \ \rightarrow\ x = 1$

51) $52/400 = 0{,}13$ e $0{,}13 \cdot 120 = 15{,}6$. Il numero delle palline blu nell'urna sarà di 15 o 16
o comunque non eccessivamente distante da questi valori.

52) 2/3. Se non ne sei del tutto convinto, pensa: su 1000 lanci, pressappoco 250 volte uscirebbe l'unica croce C, circa 250 la testa T1 sul retro della croce, circa 250 volte la testa T2 della moneta con due teste, e circa 250 volte l'altra faccia T3 della stessa moneta. Per 750 volte all'incirca, comparirebbe una testa, e per circa 500 di queste 750 volte essa proverrebbe dalla moneta contraffatta.

53) 1/6

54) I) Perché non sono equipossibili! Essendoci 3 palline Rosa e 2 sole Azzurre, il caso AA, per esempio, si verifica meno facilmente del caso RR II) 20 III) 12 IV) pressappoco 300

55) 1/24

56) I casi possibili (equipossibili!) sono in numero di $5 \cdot 4 = 20$:
B1+B2 B1+B3 B1+N1 B1+N2 B2+B1 B2+B3 B2+N1 B2+N2
B3+B1 B3+B2 B3+N1 B3+N2 N1+B1 N1+B2 N1+B3 N1+N2
N2+B1 N2+B2 N2+B3 N2+N1
a) i casi favorevoli sono $3 \cdot 2 = 6$. La probabilità è $p(\text{2 Bianche}) = 6/20 = 3/10 = 0{,}3$
b) i casi favorevoli sono $2 \cdot 1 = 2$. La probabilità è $p(\text{2 Nere}) = 2/20 = 1/10 = 0{,}1$
c) i casi favorevoli sono $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$. La probabilità è $p(\text{colori diversi}) = 12/20 = 6/10 = 0{,}6$

57) I casi possibili (equipossibili!) sono in numero di $5 \cdot 5 = 25$:
B1+B1 B1+B2 B1+B3 B1+N1 B1+N2 B2+B1 B2+B2 B2+B3 B2+N1 B2+N2
B3+B1 B3+B2 B3+B3 B3+N1 B3+N2 N1+B1 N1+B2 N1+B3 N1+N1 N1+N2
N2+B1 N2+B2 N2+B3 N2+N1 N2+N2
a) i casi favorevoli sono $3 \cdot 3 = 9$. La probabilità è $p(\text{2 Bianche}) = 9/25 = 0{,}36$
b) i casi favorevoli sono $2 \cdot 2 = 4$. La probabilità è $p(\text{2 Nere}) = 4/25 = 0{,}16$
c) i casi favorevoli sono $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$. La probabilità è $p(\text{colori diversi}) = 12/25 = 0{,}48$.

58) Casi equipossibili: $2+3+4+5=14,\ 1+3+4+5=13,\ 1+2+4+5=12,\ 1+2+3+5=11,\ 1+2+3+4=10$
$p(\text{somma pari} = 3/5)$; $p(\text{somma dispari}) = 2/5$ $p(\text{somma maggiore di } 10) = 4/5$; $p(\text{somma maggiore di } 14) = 0$

59) (1) aleatoria (2) quoziente (3) favorevoli (4) possibili (5) equipossibili (6) zero
(7) impossibile (8) uno (9) certo (10) campionario (11) empirica (12) caso

4.6 - Esercizi su probabilità e frequenza relativa

1) Se si lancia un pezzo di legno intagliato a forma di tronco di cono, quanti sono i casi possibili quando il tronco cade a terra e si ferma? Come si potrebbe valutare la probabilità di ciascun esito?

2) Lanciando 1000 volte una moneta truccata, il rapporto teste/croci è risultato uguale a 0,7762 circa.
Quante "teste" e quante "croci" sono uscite?
Che probabilità c'è di ottenere, con un ulteriore lancio, "testa"?

3) I "Giochi di Archimede" sono competizioni matematiche nelle quali lo studente è chiamato a rispondere a un set di 20 quesiti (pensando alla gara *junior*, quella per i più giovani).
Per ciascun quesito sono elencate 5 possibili risposte A, B, C, D, E delle quali una e una sola è corretta.
E' previsto di assegnare 5 punti a ogni risposta giusta, 0 a ogni risposta sbagliata, e 1 a ogni risposta non data.
Un pelandrone che non si degnasse neppure di leggere il testo delle domande, tenderebbe a fare più punti non rispondendo mai oppure crociando a casaccio una risposta per ogni domanda?

4) Un tale mi propone il seguente gioco: "Lanciamo un dado, per un numero di volte che deciderò io.
Se uscirà 1 o 2 più volte di quante volte sarà uscito 3, 4, 5 o 6, ti darò 100 euro, altrimenti mi darai tu 5 euro".
Mi conviene accettare?

5) Si sa che un sacco contiene 120 palline, in parte azzurre, in parte gialle, in parte rosa;
si estraggono una dopo l'altra, con reimbussolamento, 3 palline, e risultano tutte e 3 di colori diversi.
   a) Cosa si può ipotizzare sul numero totale di palline dei tre colori?
   b) E se si facessero 400 estrazioni ottenendo 90 azzurre, 196 gialle, e 114 rosa?

6) Se si lancia 1000 volte una coppia di monete, quante volte ci si aspetta pressappoco che mostrino 2 "Teste"?

7) Utilizza il foglio elettronico per simulare 300 lanci di una coppia di dadi.
Per ogni singolo lancio simulato, il foglio elettronico dovrà calcolare la somma dei due punteggi.
E per ogni somma ottenibile (da 2 fino a 12), dovrà determinare la frequenza assoluta e la frequenza relativa.
Tu confronterai infine quest'ultima con la probabilità *a priori*.

Tieni comunque presente che i numeri "casuali" generati dal computer non sono veramente casuali, ma sono piuttosto *pseudo*casuali, ossia hanno l'*apparenza* della casualità.

Per motivi di impaginazione, una scheda sui numeri pseudocasuali nel foglio elettronico è riportata a pag. 24.

8) Si può dare per scontato che sia uguale la probabilità di nascer maschio e di nascer femmina?

9) In Inglese si parla, ad esempio, di "3:5 (three to five) *odds in favor*", in relazione a un evento, per affermare che quell'evento si verifica mediamente 3 volte per ogni 5 volte che non si verifica.
Analogamente, dire che le "*odds against*" per un evento sono 4:1 significa sostenere che in media l'evento NON si presenta 4 volte per ogni volta che si presenta.
Ciò premesso, nel lancio di un dado, quante sono le "*odds in favor*" per l'uscita della faccia 3?
Se un evento è tale che ha $x:y$ "*odds against*", qual è la sua probabilità?

RISPOSTE

1) 3: faccia circolare maggiore in alto, faccia circolare minore in alto, tronco appoggiato sulla superficie laterale.
La probabilità di ciascuno dei tre esiti si può valutare soltanto lanciando il tronco tantissime volte e annotando la frequenza relativa di ognuno dei tre esiti.
2) 437 teste, 563 croci; valutabile in $43{,}7\%$ circa
3) E' indifferente. Rispondendo a caso, la probabilità di azzeccare la risposta giusta a una domanda fissata è 1/5 per cui, sulle 20 domande, possiamo aspettarci intorno a 4 risposte esatte per un totale di circa $4 \cdot 5 = 20$ punti; non rispondendo, si totalizzano $20 \cdot 1 = 20$ punti.
4) No, perché certamente l'avversario deciderà che il dado vada lanciato *tantissime* volte …
e con tantissimi lanci, è praticamente certo che la circostanza a me favorevole non si verificherà.
5) a) Praticamente non si può ipotizzare nulla: 3 estrazioni sono decisamente troppo poche.
Sembrerebbero suggerire un certo "equilibrio" fra il numero delle azzurre, delle gialle e delle rosa, ma fino a un certo punto: davvero, 3 estrazioni sono pochine.
   b) 400 è già un buon numero. Le frequenze relative sono
   $a = 90/400 = 0{,}225; \quad g = 196/400 = 0{,}49; \quad r = 114/400 = 0{,}285$
   e portano a presupporre che il numero complessivo delle azzurre, delle gialle e delle rosa sia in proporzione; quindi la composizione dell'urna potrebbe essere di 27 azzurre, 59 gialle e 34 rosa … o pressappoco.
6) Un numero di volte non molto distante da 250. Infatti la probabilità dell'evento è 1/4.
7) Somme possibili: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12. Probab.: 1/36 2/36 3/36 4/36 5/36 6/36 5/36 4/36 3/36 2/36 1/36
8) No. Non è detto che i due casi siano equipossibili. In effetti, si osserva, in tutte le parti del globo, una leggera prevalenza delle nascite maschili rispetto a quelle femminili.
9) 1:5; $p = y/(x+y)$

4.7 - Speranza matematica

Per il discorso che vogliamo iniziare è essenziale tener presente cosa afferma la "legge empirica del caso":

quando si ripete per "molte" volte una prova *aleatoria* (= legata al caso),
la **frequenza relativa** di un esito, cioè il rapporto

$$f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}},$$

si avvicina "molto" alla **probabilità a priori** di quell'esito, calcolata tramite il rapporto

$$p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

Insomma, è $\boxed{f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}} \approx p}$

da cui $\boxed{\textbf{numero di prove che hanno avuto quell'esito} \approx p \cdot \textbf{numero totale di prove}}$

Supponiamo ad esempio di estrarre una carta da un mazzo da scopa.
La probabilità che sia di "cuori", calcolata come $p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$, è $p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

Ma allora, se ripetiamo l'estrazione per molte volte, diciamo ad esempio per 2000 volte,
sempre reinserendo la carta estratta nel mazzo e mischiando prima di effettuare un'altra estrazione,
il numero di volte in cui uscirà "cuori" *si aggirerà intorno a*, *non differirà troppo da*

$$p \cdot \text{numero totale di prove} = \frac{1}{4} \cdot 2000 = 500.$$

E andiamo ora a parlare di "*speranza matematica*".

Ci conviene partire immaginando dapprima un gioco che nella realtà è davvero molto raro:
un gioco nel quale si possa soltanto vincere e non si possa mai perdere.

Armandoci di fantasia, supponiamo ad esempio che ci sia una famiglia con 4 figlioli, molto, ma molto povera.
Soldi ce ne sono davvero pochissimi!
Tuttavia, la mamma vuole dare qualche vizietto ai suoi piccoli, e anche scherzare un poco con loro.
Si decide, ogni sera dopo cena, di estrarre una pallina da una scatola contenente 10 palline numerate da 1 a 10.
Se uscirà una delle palline dalla 1 alla 4, il figlio corrispondente (ordinandoli dal più grande al più giovane) vincerà 2 euro, che potrà ad esempio investire in un succulento gelato … altrimenti, nessuno avrà niente.

Cosa ci aspettiamo che accada protraendo il gioco per molto tempo, diciamo per 300 giorni?
Ad ogni estrazione, per ciascun ragazzo, la probabilità di aggiudicarsi i 2 euro sarà di 1/10 (le palline sono 10).
Allora, per quanto ricordato all'inizio riguardo alla legge empirica del caso,
ognuno dei 4 ragazzi vincerà i suoi 2 euro per un numero di volte pressappoco uguale a $\frac{1}{10} \cdot 300 = 30$.

E quindi, in quei 300 giorni, più o meno, ciascuno si aspetta di incassare $\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2 = 60$ euro.
In media, qual è l'aspettativa giornaliera di ognuno dei figli?

L'aspettativa giornaliera è di vincere euro $\frac{\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2}{300} = \frac{1}{10} \cdot 2 = 0,20$

Questo esempio ci fa capire che **se moltiplichiamo la probabilità** (nel nostro caso, 1/10) **di una vittoria in una singola "prova aleatoria" per la cifra** (2 euro, per i nostri ragazzi) **che si spera di vincere nella prova**, **otteniamo quella somma di danaro che in media si vincerebbe ad ogni prova,**
qualora si facesse un numero molto alto di prove.

Bene! **Definiamo "speranza matematica" o "valore atteso"**
(in Inglese: mathematical expectation, expected value) di una certa vincita S,
il prodotto della vincita stessa per la probabilità che essa ha di realizzarsi in una singola prova:

$$\boxed{E = speranza\ matematica} = \boxed{pS}$$

La "speranza matematica" è la vincita che mediamente si avrebbe in una singola prova,
se si effettuasse un numero elevato di prove.

Nella realtà concreta, ben raramente ci viene offerto di poter vincere qualcosa senza la possibilità di perdere.
Le situazioni più frequenti sono quelle in cui si hanno due contendenti … ma aiutiamoci con un altro esempio.

Supponiamo che una *macchinetta mangiasoldi* sia programmata per comportarsi nel modo seguente.

Ad ogni giocata, si può *vincere* (e ciò avviene con probabilità $1/10$: ossia, si vince mediamente una volta ogni 10 giocate; insomma, su di un gran numero di giocate, il numero di vincite non si discosta molto dal numero delle giocate, diviso per 10); oppure si può *perdere*, con probabilità che sarà uguale a $1-1/10=9/10$ (sappiamo che la somma della probabilità di un evento con la probabilità dell'evento contrario è sempre 1).

Ogni giocata costa 1 euro, ossia, quando si perde, si perde la puntata di 1 euro. Quando si vince, il guadagno netto è di 5 euro (il giocatore incassa 6 euro, quindi gli viene restituito l'euro della puntata, più 5 euro di vincita netta).

Domanda: se faccio 1000 giocate, cosa posso aspettarmi all'incirca, da un gioco di questo tipo?

Ragioniamo:

poiché ad ogni giocata la prob. di vincere è 1/10, con le 1000 giocate vincerò pressappoco $\frac{1}{10}\cdot 1000=100$ volte.

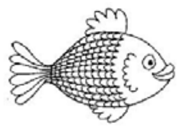
E poiché in caso di vincita il guadagno netto è di 5 euro, la vincita sarà in totale, all'incirca, di $100\cdot 5=500$ euro.

Nel frattempo, però, avrò perso per circa $\frac{9}{10}\cdot 1000=900$ volte;

per una perdita complessiva che si aggirerà intorno a $900\cdot 1=900$ euro.

In totale, il mio bilancio finale dovrebbe collocarsi intorno ai $\underbrace{500}_{\frac{1}{10}\cdot 1000\cdot 5}\ \underbrace{-900}_{\frac{9}{10}\cdot 1000\cdot(-1)}=-400$ euro.

E ciò significa che in media, ogni giocata mi avrà portato euro $\frac{-400}{1000}=-0,40$:



ossia mi avrà generato una perdita di 40 centesimi (bel pesciolino che sono!).

Proviamo a generalizzare.

Se in una singola prova si può verificare uno e uno solo fra più eventi incompatibili $E_1, E_2, ..., E_k$ di rispettive probabilità $p_1, p_2, ..., p_k$, e tali eventi mi apportano rispettivamente una somma di denaro, positiva o negativa, $S_1, S_2, ..., S_k$, allora, in n prove, se n è grande, E_1 si verificherà all'incirca $n\cdot p_1$ volte, E_2 circa $n\cdot p_2$ volte, ecc., per cui la somma di denaro che me ne verrà si aggirerà intorno a

$$n\cdot p_1\cdot S_1+n\cdot p_2\cdot S_2+...+n\cdot p_k\cdot S_k=n\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k).$$

In media, in ogni singola prova avrò vinto o perso la somma

$$\frac{\cancel{n}\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k)}{\cancel{n}}=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k.$$

Bene: la quantità $\boxed{E=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k}$ **viene detta la mia SPERANZA MATEMATICA (mathematical expectation) in quel gioco, ed esprime, dunque, quello che posso aspettarmi mediamente ad ogni prova, se ripeto per molte volte una prova di questo tipo.**

ESEMPIO

Mi viene proposto il gioco seguente: si prende un mazzo di carte da scopa, e se ne estrae una a caso.
Se è una figura vinco 70 centesimi, se non è una figura ma è una carta di fiori o di picche ne vinco 50, soltanto se è il "settebello" (7 di quadri) perdo 16 euro. Qual è la speranza matematica del gioco?
Giocando molte volte, a lungo andare finirei per vincere o per rimetterci?

$$p(\textit{figura})=\frac{12}{40}=\frac{3}{10};\quad p(\textit{non figura, di fiori o picche})=\frac{14}{40}=\frac{7}{20};\quad p(\textit{settebello})=\frac{1}{40}$$

$$p(\textit{una delle altre carte})=1-\frac{3}{10}-\frac{7}{20}-\frac{1}{40}=\frac{13}{40}\quad (\textit{comunque è inutile calcolarla, perché tanto poi verrà moltiplicata per } 0)$$

$$\textit{speranza matematica}=\frac{3}{10}\cdot 0,70+\frac{7}{20}\cdot 0,50+\frac{1}{40}\cdot(-16)+\frac{13}{40}\cdot 0=0,21+0,175-0,4+0=-0,015$$

La speranza matematica, che mi dice quanto devo mediamente aspettarmi, pressappoco, da una singola prova, se effettuo un numero elevato di prove, è negativa, seppure di poco.
Devo attendermi, se mi ostino a giocare moltissime partite, di finire in perdita. Ad esempio, in 10000 partite, dovrei ritrovarmi pressappoco a quota $-0,015\cdot 10000=-150$ *euro*. …Pressappoco, s'intende!

Un GIOCO si dice "EQUO" se la speranza matematica di ogni giocatore è 0.
Ad esempio, se A e B prendono un mazzo di carte da scopa ed estraggono una carta, con l'accordo che A: vince 6 euro se esce "cuori", vince 3 euro se esce "quadri", ne perde 5 se esce "fiori" e ne perde 4 con "picche", la speranza matematica di A sarà

$$\textit{speranza matematica del giocatore } A = \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot(-4) = 0$$

mentre ovviamente quella di B avrà il valore opposto e quindi sarà anch'essa nulla. Questo gioco è *equo*: A e B, se effettuassero un numero molto elevato di partite, non si ritroverebbero molto lontani dalla parità.

Nei "**giochi organizzati**" (**Lotto, Casinò, lotterie** …) chi vuole concorrere paga una somma iniziale S_0 (la puntata al Lotto o al Casinò, il costo del biglietto della lotteria …) sperando in una vincita S, che sarà allora una vincita "lorda", in quanto il "netto" si otterrà sottraendole la somma S_0 inizialmente investita.

Vediamo come si può riscrivere la formula per la speranza matematica in questa situazione "classica".
Sia p la probabilità di vittoria. La probabilità di perdere varrà allora (evento contrario) $1-p$. E avremo:

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = p\cdot(S-S_0)+(1-p)\cdot(-S_0) = pS \cancel{-pS_0} - S_0 \cancel{+pS_0} =$$
$$= \boxed{pS - S_0} \quad S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

ATTENZIONE! In questa formula specifica per i giochi organizzati compare la vincita LORDA, mentre nella formula generale $\boxed{p_1\cdot S_1 + p_2\cdot S_2 + ... + p_k\cdot S_k}$ le somme indicate vanno intese come vincite, o perdite, NETTE.

ESEMPIO
Alla roulette, ci sono 37 numeri su cui puntare (da 0 a 36).
Se si punta su di un numero singolo, in caso di vincita viene consegnato al giocatore un premio uguale alla somma giocata, moltiplicata per 36 (quindi, la vincita netta è uguale a 35 volte la posta giocata).
Quanto vale la speranza matematica (supponendo di puntare 1 euro)?

$$\textit{speranza matematica} = pS - S_0 = \frac{1}{37}\cdot 36 - 1 = \frac{36}{37} - 1 = -\frac{1}{37} \approx -0{,}027$$

La speranza matematica è quindi negativa. Il gioco NON è equo. Sarebbe equo se in caso di vincita venisse consegnato al giocatore un premio lordo uguale a 37 volte la puntata, anziché solo 36.

Però il gioco non è nemmeno troppo "disonesto": se la speranza matematica, per la puntata di 1 euro, è uguale a circa $-0{,}027$, vuol dire che di quell'euro mediamente a ogni puntata è come se il giocatore ne recuperasse $1-0{,}027 = 0{,}973$ quindi il $97{,}3\%$; il guadagno del "banco" si limita mediamente al $2{,}7\%$ di ogni puntata.

Il Lotto, ad esempio, è molto più rapace nei confronti del giocatore.
Supponiamo si punti sul "numero secco" o "ambata".
La probabilità di vincere è $p = 1/18$; in caso di vincita, lo Stato paga però soltanto 11,232 volte la puntata (e da questa vincita "lorda" occorre poi sottrarre la puntata stessa per ottenere la vincita netta).

Allora la speranza matematica è $pS - S_0 = \frac{1}{18}\cdot 11{,}232\,S_0 - S_0 = -0{,}376\,S_0$.

Per le altre combinazioni del Lotto il discorso cambia poco (nel caso dell'ambo) o peggiora di molto (terno, ecc.).

Il Casinò comunque è più pericoloso, perché il poter effettuare immediatamente nuove puntate, circondati da altri giocatori assatanati, in un ambiente dal fascino perverso, e il ricevere immediatamente l'eventuale premio, tutto ciò fa sì che il giocatore si senta spinto a continuare a rischiare, anche in caso di vincita, fino a quando, per gli alti e bassi della sorte, si ritrova a perdere tutto quello che ha in tasca.

La *persona intelligente* si tiene BEN LONTANA dal
gioco d'azzardo! ☹

Ancora qualche osservazione sui "giochi organizzati", quelli nei quali è

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = \boxed{pS - S_0}, \quad \textit{con } S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

In questi casi, il gioco è equo se è $pS - S_0 = 0$, ossia se
la posta S_0 da pagare per partecipare è uguale alla speranza matematica pS della vincita lorda: $S_0 = pS$.

L'uguaglianza precedente si potrebbe pure riscrivere come $S = \frac{S_0}{p}$: questo rapporto $\frac{S_0}{p} = S_0\cdot\frac{1}{p}$
è dunque il valore che dovrebbe avere la vincita lorda in un gioco equo nel quale la probabilità di vincere sia p.
Ad esempio, se, come nella puntata sul "numero secco" al Casinò, si avesse una probabilità di 1/37 di vincere, affinché il gioco sia equo la vincita lorda dovrebbe essere 37 volte la posta.

Nella stragrande maggioranza dei casi è invece $pS - S_0 < 0$, ossia $S_0 > pS$,

e per valutare quanto il gioco sia sfavorevole al concorrente potremo calcolare il rapporto $\frac{pS}{S_0} < 1$

fra speranza matematica della vincita lorda e posta in gioco:
quanto più tale rapporto è *basso*, tanto più il gioco sarà *disonesto nei riguardi del concorrente*;
quanto più tale rapporto sarà invece alto, ossia vicino (per difetto) a 1, tanto più il gioco sarà clemente.

Avevamo osservato che la puntata sul numero singolo al Casinò non è, in sé, troppo rovinosa per il giocatore;

e in effetti, se andiamo a calcolare $\frac{pS}{S_0}$, troviamo qui $\frac{\frac{1}{37} \cdot 36S_0}{S_0} = \frac{36}{37} \approx 0{,}973$ che è un valore assai prossimo a 1.

Tale valore ci dice "quale parte della sua puntata recupera, mediamente, il giocatore, a ogni giocata".
Tradotta il percentuale, è più espressiva: $0{,}973 = 97{,}3\%$ per cui il giocatore di Casinò, quando punta sul numero singolo, mediamente a ogni puntata riesce a trattenere per sé il $97{,}3\%$ della somma investita.
Il rimanente $2{,}7\%$ lo incamera senza pietà il Casinò. Il quale, tramite questa e le altre tipologie di puntata alla roulette, e tramite gli altri svariati suoi giochi, alle spese dei merli fa sontuosi guadagni.

Il rapporto $\frac{pS}{S_0} = \frac{\textit{speranza matematica della vincita lorda}}{\textit{somma puntata}}$ è chiamato da alcuni "**indice di equità**".

A seconda che sia <1, =1, o >1 il gioco è da ritenersi svantaggioso, equo oppure vantaggioso.

Evidentemente, l'ultimo caso nei "giochi organizzati" non si verifica mai, o meglio: si verifica solo se ci mettiamo *dal punto di vista dello Stato* nel Lotto e similari, *o del Casinò* nella roulette e similari: insomma, se il giocatore al quale pensiamo è l'organizzatore del gioco: lui sì, che ne trae un lauto vantaggio!

I NUMERI CASUALI (O MEGLIO: PSEUDOCASUALI) E IL FOGLIO ELETTRONICO

E' possibile ordinare a un foglio elettronico di generare numeri *casuali*, o meglio "PSEUDOcasuali":
essi infatti hanno l'*apparenza* della casualità, ma in realtà non sono realmente casuali in quanto sono costruiti tramite un algoritmo a partire da un valore iniziale, detto "seme", quello *sì* - ma *solo quello* - da ritenersi casuale (si tratta, di norma, del numero di secondi trascorsi da una certa data del passato).

Digitando in una cella
$= \text{CASUALE}()$ [notare la coppia di parentesi senza niente all'interno!]
si genera, in quella cella, un numero casuale con la virgola x che può andare da 0 (incluso) a 1 (escluso):
$0 \le x < 1$

Questo numero cambierà ogniqualvolta nel foglio elettronico un dato verrà inserito, o cancellato
(o anche semplicemente se si preme, posizionati in una cella vuota, il tasto CANC;
oppure ancora, premendo il tasto-funzione F9 in alto sulla tastiera);
come pure, ad ogni riapertura del file.

E volendo un numero casuale fra 0 (compreso) e 6 (escluso)?
Beh, basterebbe scrivere
$= \text{CASUALE}() * 6$

E fra 1 (compreso) e 15 (escluso)?
$= \text{CASUALE}() * 14 + 1$

E se volessimo simulare il lancio di un dado, quindi ci servisse un numero INTERO casuale fra 1 e 6?
In questo caso potremmo ricorrere a una combinazione fra la funzione CASUALE e la funzione INT.
INT tronca un numero all'intero più vicino per difetto, quindi, ad esempio, $\text{INT}(3{,}8) = 3$
Allora la formula
$= \text{INT}(\text{CASUALE}() * 6 + 1)$
ci fornirà per l'appunto un intero che potrà valere, con ugual probabilità, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Infatti, $= \text{CASUALE}() * 6$ genera un numero con la virgola che può andare da 0 (compreso) a 6 (escluso);
aggiungendo 1 si ottiene un numero con la virgola che può andare da 1 (compreso) a 7 (escluso);
dopodiché la funzione INT, troncando il numero ottenuto, lo fa diventare un intero compreso fra 1 e 6.

Analogamente, il lancio di una moneta potrà essere simulato da
$= \text{INT}(\text{CASUALE}() * 2)$
Il risultato dell'applicazione della formula potrà essere il numero 0, oppure il numero 1:
bene, "0" potrà essere interpretato come "Testa" e "1" come "Croce", o viceversa.

Anche i vari linguaggi di programmazione permettono di generare numeri pseudocasuali:
per il linguaggio PASCAL, puoi consultare a questo proposito l'apposito manualetto.

ESERCIZI sulla speranza matematica

1) Alla "roulette francese" ci sono 37 numeri (0, 1, 2, … , 36). Quelli da 1 a 36 sono colorati metà in rosso, metà in nero. Lo 0, invece, non è considerato né "rosso" né "nero". Se si punta sul rosso, o sul nero, insomma sul "colore", e si indovina, si viene compensati con una vincita netta uguale alla somma puntata; se, avendo giocato il "colore", esce "zero", la regola è piuttosto complicata e può variare da Casinò a Casinò. Certe case da gioco consentono in questo caso al giocatore di riavere indietro metà della somma puntata. Calcolare, se così stanno le cose, la speranza matematica di una giocata di 1 euro sul "rosso" o sul "nero".
2) Per ringraziarmi dell'aiuto prestato nei compiti di matematica, i compagni di classe mi offrono un premio in euro uguale al quadrato del numero che otterrò dal lancio di un dado.
   Se preferissi commutare questa offerta in una cifra certa, quanti euro potrei domandare loro?
3) Se si gioca un "terno" al Lotto, in caso di vincita lo Stato versa al giocatore la somma giocata, moltiplicata per 4500. D'altra parte, si può dimostrare che la probabilità di indovinare, se si gioca un terno, è 1/11748. Calcolare la speranza matematica del gioco, se si puntano 10 euro.
4) Mi viene proposto il seguente gioco: si lanciano due monete, e se esce: Testa su entrambe, vinco 20 euro; Croce su entrambe, vinco 10 euro; esiti differenti, perdo 15 euro. Mi conviene accettare?
5) Completa la tabella seguente:

Giocata	Vincita lorda (coefficiente)	Probabilità p	Sper. mat. (%)	Indice di eq. (%)
Estratto semplice	11,232	1/18		
Ambo	250	1/400,5		
Terno	4500	1/11748		
Quaterna	120000	1/511038		
Cinquina	6000000	1/43949268		

6) I) Calcola la speranza matematica:
   a) dell'esito del lancio di un dado
   b) del punteggio ottenuto lanciando 2 dadi e sommando
   c) del punteggio ottenuto lanciando due dadi e moltiplicando

   II) Se lancio una coppia di dadi per 1000 volte, e ogni volta annoto il prodotto dei due numeri ottenuti, quanto varrà all'incirca la somma di questi prodotti?
7) Un amico mi sfida al gioco seguente:
   si estrae una carta da un mazzo da scopa, e se è 1 asso gli do io 10 euro, altrimenti mi dà 1 euro lui.
   Calcolare la mia speranza matematica in questo gioco.
   Se accettassi ed effettuassi 1000 partite, quanto mi aspetto di guadagnare o perdere?
8) Se un benefattore mi offre in regalo 30 euro certi, o, in alternativa, 180 euro ma solo se lanciando un dado uscirà "6", verifica che in entrambi i casi la mia speranza matematica sarebbe la medesima.

RISPOSTE

1) $1\cdot\frac{18}{37}+(-1)\cdot\frac{18}{37}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{37}=-\frac{1}{74}\approx-0,0135$ 2) $\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot9+\frac{1}{6}\cdot16+\frac{1}{6}\cdot25+\frac{1}{6}\cdot36=\frac{1}{6}\cdot91\approx15\ euro$

3) Con la formula semplificata: $sper.mat.=\frac{1}{11748}\cdot45000-10=-6,16956...$

4) $p(\mathrm{TT})=\frac{1}{4};\ \ p(\mathrm{CC})=\frac{1}{4};\ \ p(\mathrm{TC}\vee\mathrm{CT})=\frac{1}{2}$ $\quad sper.mat.=\frac{1}{4}\cdot20+\frac{1}{4}\cdot10+\frac{1}{2}\cdot(-15)=0$

   Il gioco è equo: alla lunga, si può perdere o si può vincere,
   ma comunque con sbalzi limitati rispetto alla situazione finanziaria iniziale.

5) Speranze matematiche (arrotondate ai centesimi): –37,60% –37,58% –61,70% –76,52% –86,35%
   Indici di equità: 62,40% 62,42% 38,30% 23,48% 13,65%

6) I) a) 3,5 b) 7 c) 12,25 II) Non dovrebbe discostarsi molto da $12,25\cdot1000=12250$

7) $p(asso)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10};\quad p(non\ asso)=\frac{9}{10}$. La mia speranza matematica nel gioco è $\frac{1}{10}\cdot(-10)+\frac{9}{10}\cdot1=-\frac{1}{10}$
   e, se giocassi 1000 partite, mi aspetto di perdere una cifra intorno ai 100 euro.

8) $$\overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{30}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta a)}}=\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{180}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta b)}}$$

4.8 - Probabilità soggettiva

Nella vita di tutti i giorni chiunque, più o meno consapevolmente, effettua valutazioni di probabilità *senza* ricorrere NÉ al calcolo del rapporto *n° casi favorevoli/n° casi possibili*, NÉ all'osservazione di una *frequenza*.

Pensiamo ad esempio a una partita di calcio fra due squadre improvvisate all'oratorio:
non ha alcun senso pensare ad un insieme di casi equipossibili, ma non ha neppure senso una visione statistica, visto che quelle due particolari squadrette non si sono mai incontrate in precedenza!
Però bene o male conosciamo l'abilità dei singoli giocatori, per cui *un'idea* della probabilità *ce la potremo fare*.
Che probabilità c'è che le azioni di una data ditta non diminuiscano di valore nei prossimi 6 mesi?
Quanto è probabile che la cuginetta Anna si separi dal fidanzato entro la fine di quest'anno?

Nel passare in rassegna, al paragrafo 3, i vari tipi di "probabilità",
avevamo presentato brevemente la probabilità "soggettiva" nel modo che riportiamo qui di seguito.

INTERPRETAZIONE 1)
La probabilità "soggettiva" di un evento è a/b se un soggetto "coerente" G è disposto a pagare subito la somma a per ricevere in futuro la somma b (con un guadagno netto, quindi, uguale a $b-a$) nel caso che l'evento si verifichi.
"Coerente" significa che lo stesso soggetto G deve essere disposto in qualsiasi momento a scambiarsi di ruolo con l'altro giocatore G' … Ma cosa fa l'altro giocatore? Riceve tanto per cominciare la somma a, ed è disposto a pagare b se l'evento si verifica: quindi anche G, per essere coerente, deve essere disposto a incassare subito la somma a per pagare in un futuro la somma b (con una perdita uguale in valore assoluto a $b-a$) se l'evento si verifica.

INTERPRETAZIONE 2)
Anche, in modo del tutto equivalente:
la probabilità di un evento E è uguale a s/S se per me è del tutto indifferente l'offerta, da parte di un benefattore,

- ♪ di una somma s certa, che mi viene pagata in ogni caso
- ♫ oppure in alternativa di una somma S, che però mi verrà data solo se l'evento E si verificherà.

Cerchiamo di chiarire meglio il discorso facendo degli esempi.
Dunque **io valuto soggettivamente uguale a 1/4 la probabilità di un evento se sono disposto a pagare 1 euro, per incassare 4 euro nel caso l'evento si verifichi (in questo caso mi verrebbe restituito il mio euro, e me ne verrebbero pagati altri 3 di vincita netta); però sarei anche disposto a mutare la mia scommessa nella seguente: incasso 1 euro, ma lo restituirò e in più pagherò 3 euro (in totale: sborserò 4 euro) se l'evento si verificherà.**

Ma allora **valutare soggettivamente in 1/4 la probabilità di un evento vuol dire, in fondo, ritenere che la facilità di verificarsi di quell'evento sia paragonabile alla facilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un'urna contenente 1 Rossa e 3 Nere, per un totale di 4 palline**:
anche di fronte a quest'urna, infatti, sarebbe equo offrirsi di pagare subito la somma di 1 euro nella prospettiva di incassare 4 euro (con un guadagno netto di 3) qualora, estraendo una pallina, esca una Rossa
(infatti, su 1000 estrazioni con reimbussolamento, è previsto di pescare una Rossa all'incirca 250 volte, vincendo dunque 750 euro netti, e una Nera 750 volte circa, perdendo circa 750 euro: si resterà pressappoco alla pari).

Posso anche vederla in questo modo: valutare uguale a 1/4 la probabilità dell'evento significa che se un (improbabile! ☺) benefattore mi offre di regalarmi 4 euro nel caso l'evento si verifichi, io posso dirgli: guarda, pagami 1 euro comunque vadano le cose, e siamo a posto.

Immagina, anche in questa ottica, di effettuare 1000 prove:
vedrai che la tua situazione finanziaria non varierebbe di molto se tu facessi una scelta piuttosto che l'altra.
Su 1000 prove, se fai la scelta a) (il benefattore ti dà 4 euro ogni volta che l'evento si verifica),
vincerai pressappoco 250 volte con un guadagno netto di $250 \cdot 4 = 1000$ euro.
E se fai la scelta b) (1 euro per ogni prova, qualunque sia l'esito) il tuo guadagno netto sarà di $1000 \cdot 1 = 1000$ euro.
Nulla cambia.

Osserva anche questo: la scelta a) e la scelta b) hanno la stessa "speranza matematica"! (vedi paragrafo precedente).

Infatti $\overbrace{\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{prob.}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{vincita}\\ \text{netta}}}}^{\text{scelta a)}} = \overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{vincita}\\ \text{netta}}}}^{\text{scelta b)}}$.

Verifica tu stesso che nell'interpretazione 1), in cui non compare il fantomatico e leggendario benefattore ma ci sono due contendenti, i giocatori G e G', la speranza matematica di ciascun giocatore è 0.

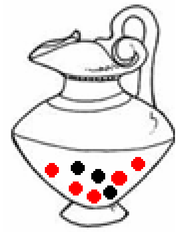
Qualcuno potrebbe obiettare: "Ma che senso ha chiamare in causa la speranza matematica, quando l'evento di cui ci si sta occupando non è un evento ripetibile?"… Giusto; tuttavia, se consideriamo il fatto che assegnare, per esempio, probabilità soggettiva 1/4 ad un evento, significa assegnargli lo stesso grado di "facilità" che avrebbe l'estrazione di una pallina Rossa da un'urna con 1 sola Rossa e 4 palline in totale, ecco che **il concetto di "speranza matematica"** torna ad avere un senso; e in effetti, **può aiutarci a decidere** rapidamente **sull'equivalenza o meno di due situazioni.**

IL MONDO
INFIDO E TRISTE
DELLE SCOMMESSE

… Come sono furbo!
Quest'anno ho perso solo 10000 euro!
Un altro ne avrebbe persi minimo 20000!

Cosa vuol dire, in una scommessa sulle corse di cavalli, che Fulmine è dato 5 contro 3?
Vuol dire che la probabilità di Fulmine vincente è valutata, soggettivamente, uguale alla probabilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un'urna con 5 palline Rosse e 3 Nere, per un totale di 8 palline.
Quindi

parlare di "vittoria di Fulmine data 5 CONTRO 3"
equivale ad attribuire a Fulmine una probabilità di vincere di
$$\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}=62,5\%$$
come se ci fosse 1 urna con 5 palline Rosse e 3 nere (8 in totale)
e si ritenesse la probabilità di vittoria di Fulmine uguale
alla probabilità di estrarre una pallina Rossa da quest'urna.



In casi come quello dell'es. precedente si suole anche dire che la "quotazione" di Fulmine è 5/3 (5 su 3, 5 contro 3).
Attenzione, però!
"Quotazione" r non vuol dire "probabilità" p: per passare dalla "quotazione" (5/3 nell'esempio dato) alla "probabilità", si deve applicare la formula $p=r/(r+1)$ (dimostralo!). La "quotazione" è una specie di … "probabilità relativa".

L'avverbio "contro", nelle scommesse, è utilizzato anche quando si specifica quanto si incasserebbe, a fronte di una data puntata (solitamente si prende la puntata unitaria: 1 euro), nel caso l'evento pronosticato si verifichi.
Ad esempio, **nei paesi europei ad esclusione della Gran Bretagna, si parla di pagare "4 contro 1" un evento per indicare che "il banco", ossia l'organizzazione che gestisce le scommesse, se lo scommettitore punta 1 euro su di un evento, promette di pagargli una somma LORDA di 4 euro nel caso l'evento si verifichi** (somma lorda: quindi il giocatore incasserebbe 4 euro ma al netto vincerebbe $4-1=3$ euro).

il "Partito della Pagnotta" vincente alle elezioni
è pagato 200 CONTRO 1 se chi punta 1 sulla vittoria di quel partito
ne incassa 200 (guadagno netto $200-1=199$) se l'evento si realizza

Le QUOTAZIONI ALLE SCOMMESSE (= le quote che vengono pagate dal *banco* per ogni euro pagato dallo *scommettitore*) **sono espresse in modo differente nelle varie zone geografiche.**

- Nell'**EUROPA CONTINENTALE**, ad es., **la consuetudine è di indicare la quota sotto forma di numero, intero o decimale, che esprime la vincita LORDA di chi ha puntato 1 sull'evento.**
  Cosicché, se la quota è 1,5 e Tizio ha puntato 1 euro, la somma che il banco verserà a Tizio nel caso indovini è 1,5 e il guadagno netto di Tizio è 0,5.
  Naturalmente, se Tizio avesse puntato 100 euro, ne incasserebbe $1,5\cdot 100=150$ con un guadagno netto di 50, ecc.
- In **GRAN BRETAGNA**, si usa una **frazione che porta a numeratore il guadagno NETTO e a denominatore la puntata,** cosicché, ad esempio, il Partito della Pagnotta dell'esempio precedente verrebbe quotato 199/1, e una quota 1/5 significherebbe che se lo scommettitore punta 5 euro, in caso di vincita guadagnerà 1 euro netto (= gli verranno restituiti i 5 euro sborsati, e in più gli verrà dato 1 euro, per un totale lordo di 6 euro).
- Negli **STATI UNITI** l'abitudine è di utilizzare numeri negativi o positivi:
  un numero negativo indica la puntata necessaria per conseguire un guadagno NETTO di 100,
  un numero positivo indica il guadagno NETTO che corrisponde a una puntata uguale a 100.
- **Naturalmente il "banco", se ritiene, in base alle sue documentatissime informazioni e sofisticate valutazioni, che un evento abbia, ad esempio, 1 probabilità su 5 di verificarsi, non si dichiarerà mai disponibile a pagare quella che sarebbe la quota "equa", ossia un premio lordo di 5 quando il giocatore punta 1: prometterà invece di versare un lordo di 4, o di 3,5 ad esempio, in modo che, sul gran numero di scommesse e tenuto conto anche delle puntate sull'evento contrario, gli scommettitori globalmente ci rimettano e il banco stesso invece prosperi, alla faccia dei pesciolini e pescioloni.**
- Il comportamento di una persona intelligente è identico tanto nell'Europa continentale, quanto nel Regno Unito o negli USA o altrove: egli, semplicemente, non scommette nulla: euro 0,00.

Un giocatore perde sempre. Perde denaro, dignità e tempo.
E se vince, tesse intorno a sé una tela di ragno.
Mosè Maimonide, Sha' are ha-Musar

I tratti essenziali di ogni gioco: la simmetria, le leggi arbitrarie, il tedio.
Jorge Luis Borges, Esame dell'opera di Herbert Quain

ESERCIZI sulla probabilità "soggettiva"

1) Una giovane attrice con delle gambe stupende decide di assicurarle, e la compagnia le chiede di pagare un premio di 30000 euro, garantendole un rimborso di 2000000 di euro nel caso le gambe vengano rovinate - entro i prossimi 5 anni - da un incidente o altro (ferimento, malattia …)
Tenendo conto del fatto che la compagnia di assicurazioni vuole anche guadagnarci, se ne può dedurre che ha valutato la probabilità di un danno alle gambe come inferiore a … ???

2) Un amico mi offre di scommettere sulla vittoria di una squadra di calcio locale: se la squadra vincerà, lui mi pagherà 50 euro, mentre richiede che io gli paghi 20 euro in caso di pareggio o sconfitta.
Tenendo conto del fatto che l'amico mi vuole fregare, che valore si deve ritenere che abbia soggettivamente attribuito alla probabilità di vittoria per quella squadra?

3) Un tappo di plastica non è perfettamente simmetrico: può darsi dunque che tenda, se lanciato, a fermarsi più facilmente con la parte cava verso l'alto … o con la parte convessa verso l'alto, chissà!
Come faccio a stabilire qual è l'esito più probabile del lancio del tappo?
Se ritengo equa una scommessa nella quale si tratta di lanciare un tappo e pagare 35 centesimi nel caso il tappo si fermi con la parte cava verso l'alto, per vincerne 65 in caso contrario, che probabilità sto assegnando all'evento "parte cava verso l'alto"?

4) Ho lanciato per 500 volte una puntina da disegno, poi mi sono stufato … ma ho osservato che per 190 volte questa si è fermata con la punta verso l'alto. Ora, dovendo organizzare una scommessa equa sul lancio della puntina da disegno, se chi parteggia per l'esito più probabile vuole vincere 5 euro netti, quanto gli imporrò di pagare qualora si verifichi invece l'esito più difficile?

5) Di fronte ad una competizione fra i tre cavalli Dinamite, Tornado e Orazio, ritengo, soggettivamente, che Dinamite abbia il doppio delle probabilità di vincere rispetto a Tornado, e 2 volte e mezza le probabilità di Orazio.
Sai dirmi, quindi, che probabilità sto assegnando alla vittoria di ciascuno?

6) a) Sono un esperto e smaliziato giocatore di flipper, e quello installato al bar Sport non ha segreti per me. Ritengo sia equo sfidare gli amici a una scommessa sotto queste condizioni:
se faccio almeno 100000 punti in una partita, vinco 5 euro, altrimenti ne pago 20
(equo nel senso che, ripetendo la sfida molte volte, non mi aspetto né di perdere né di vincere molto).
In questo modo, quale probabilità implicitamente attribuisco al mio fare 100000 punti in una partita?

b) In generale, se ritengo equo, qualora si verifichi un evento E, di vincere una somma x, accettando di perdere una somma y qualora E non si verifichi, qual è la mia valutazione della probabilità dell'evento E?

7) Trasforma l'espressione della quota di una scommessa a seconda delle usanze dei vari paesi:

Italiana	Inglese	Americana
3,5		
	5/8	
		-75 opp. + …

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1		
… contro …	7/3	
… contro …		$-$… opp. +100

8) Se la quota (italiana) di una scommessa è 1,80 quanto devo puntare per vincere 20 euro netti se mi va bene?
In generale, se la quota (italiana) di una scommessa è q, quale dev'essere la mia puntata x se voglio una vincita netta y in caso di successo? E se punto z, quanto vincerò al netto?

RISPOSTE

1) inferiore a 1,5%   2) <2/7   3) Lanciando tantissime volte e calcolando la freq. rel. di ciascun esito. 0,65 = 65%

4) $190:500=0,38$ per cui posso attribuire all'evento "punta verso l'alto" una probabilità del 38% circa.
Ora, il gioco è equo se questo esito "punta verso l'alto", che è il più difficile, viene pagato 8,16 euro circa.

5) Detta p la probabilità che attribuisco a Dinamite, si avrà

$$p+\frac{p}{2}+\frac{p}{2,5}=1 \text{ da cui } p=\frac{10}{19}; \text{ perciò } p_D=\frac{10}{19},\ p_T=\frac{5}{19},\ p_O=\frac{4}{19}$$

6) a) $\frac{4}{5}=0,8=80\%$ b) $\frac{y}{x+y}$

7)

Italiana	Inglese	Americana
3,5	5/2	-40 oppure $+250$
1,625	5/8	-160 oppure $+62,5$
2,333	4/3	-75 opp. $+133,333$

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1	9/1	$-11,111$ oppure $+900$
10 contro 3	7/3	$-42,857$ oppure $+233,333$
2 contro 1	1/1	-100 opp. $+100$

8) per vincere un netto di 20, devo puntare 25; per vincere y netti, punto $x=\frac{y}{q-1}$; se punto z, vinco $z(q-1)$ netti

4.9 - Curiosità: il “paradosso di Simpson”

Vado pazzo per le caramelle al Limone; quelle alla Menta, invece, non so perché, mi danno un po’ di nausea.
Ora, in una stanza (S1) ci sono due urne, una Bianca (B1) e una Nera (N1),
tali che la Bianca contiene 1 caramella al Limone e 2 caramelle alla Menta,
mentre la Nera contiene 3 caramelle al Limone e 9 caramelle alla Menta.
In un’altra stanza (S2) vi sono poi altre due urne, una Bianca (B2) e una Nera (N2),
tali che la Bianca contiene 1 caramella al Limone e 10 caramelle alla Menta,
mentre la Nera contiene 1 caramella al Limone e 11 caramelle alla Menta.
Verifica che

♪ in qualunque stanza io entri, con la possibilità di scegliere un’urna e da questa pescare una caramella, per assecondare i miei gusti mi converrebbe sempre optare per l’urna Bianca presente in quella stanza;

♫ mentre, stranamente, se si mettessero insieme i contenuti delle due urne Bianche, creando così una terza urna Bianca B3, e allo stesso modo si facesse con le due Nere generando una nuova urna Nera N3, dovendo scegliere fra B3 ed N3 mi converrebbe questa volta prendere l’urna Nera!

Questo fatto inaspettato che si presenta a volte nelle applicazioni della Statistica, ad esempio in medicina, o nelle scienze sociali, prende il nome di “paradosso di Simpson” (reversal paradox, amalgamation paradox, …) e ad esso si riferisce il riquadro che segue, per il quale ringrazio l’Autore Thomas Michael Müller/Vismara.

PARADOSSI DI STATISTICA: IL PARADOSSO DI SIMPSON

Immaginiamo che la nota rivista italiana Lankelot (letteratura e sogni) si trovi ad affrontare una scabrosa situazione.
Un imprenditore, interessato ad affossare la rivista, pubblica una serie di attacchi contro il direttore, Franchi.
In particolare lo accusa di discriminazione contro le donne. Afferma infatti che nell’ultimo anno la rivista ha ricevuto 1200 articoli passati al vaglio dei reviewer di Lankelot. 600 sono stati scritti da uomini e 600 da donne.
Tra i 600 sottoposti da uomini, ne sono stati accettati 350, vale a dire il 58,3%;
dei 600 sottoposti da donne, ne sono stati accettati soltanto 250, vale a dire il 41,7%.
L’imprenditore scrive, in un rovente articolo, che si tratta di un chiaro caso di discriminazione.
Franchi, comprensibilmente nervoso, controlla i dati: tutto vero, l’imprenditore non mente.
Allora si rivolge, piuttosto arrabbiato, ai responsabili delle varie sezioni di Lankelot, vale a dire Arti (cinema e musica), Letteratura e Scienze, per avere una spiegazione, e scovare il responsabile della figuraccia.
Dalla sezione Scienze, Mat risponde che sono stati proposti 400 articoli: 200 scritti da uomini e 200 da donne.
Ne sono stati accettati la metà per gli uomini e la metà per le donne (100 e 100), vale a dire il 50% del totale.
Nessuna discriminazione quindi.
Dalla sezione Arti, Federico risponde che sono stati sottoposti 400 articoli, 300 scritti da uomini, e 100 da donne.
Sono stati accettati 225 articoli di uomini (il 75 %) e 75 articoli scritti da donne (il 75 %).
Anche qui, nessuna discriminazione.
Infine, arrivano i dati di Marina: la sezione Letteratura ha ricevuto 400 articoli, 300 scritti da donne, 100 da uomini.
Sono stati accettati 75 articoli scritti da donne (il 25%) e 25 articoli scritti da uomini (il 25%).
Nemmeno qui si ravvisano irregolarità.
Franchi a questo punto è imbarazzato e conta i dati:

- sono stati proposti in totale 1200 articoli (400 per ogni sezione).
- Sono stati proposti 600 articoli, sia per gli uomini (200+300+100) che per le donne (200+100+300)
- Sono stati accettati 100+225+25 = 350 articoli scritti da uomini. 350 su 600 significa il 58,3%
- Sono stati accettati 100+75+75 = 250 articoli di donne, vale a dire il 41,7%

Quindi l’imprenditore non mente (anzi, è in buona fede), Franchi non ci capisce più niente, e i responsabili delle sezioni nemmeno. Cosa succede quindi?

Succede che siamo in pieno nel PARADOSSO DI SIMPSON.
Poco conosciuto persino dagli statistici, il paradosso di Simpson permette a certe condizioni situazioni in cui il comportamento di sottogruppi è diverso dal comportamento complessivo.
Il nostro esempio, per dirne una, inverte una situazione perfettamente paritaria a livello di singole sezioni, in una situazione globale in cui le donne sono discriminate. Potrebbe anche accadere di peggio: avremmo potuto avere una situazione in cui gli uomini sono sfavoriti a livello delle singole sezioni, ma le donne sfavorite in totale.
Il nostro caso può essere letto così: benché donne e uomini siano trattati in modo uguale, le donne hanno scelto in maggioranza la sezione con i criteri di selezione più duri. Ecco quindi l’origine del paradosso.
Francois Bavaud e Patricia Roux, dell’Università di Losanna, nel loro lavoro sul Swiss Journal of Psychology, “The means inversion paradox: when the whole is inverted relatively to each of its parts”, presentano 5 casi reali di paradosso di inversione. Ad esempio:

- il tasso di ammissione postgraduate all’università della California è più basso per le donne, ma in ogni singola facoltà la situazione è invertita (le donne scelgono facoltà meno permeabili)
- In ogni regione della Francia, il consumo di patate è più alto tra i contadini, che tra i non-contadini, ma la tendenza è invertita nel complesso. Molti contadini vivono in regioni dove si mangiano poche patate.

(…) Il paradosso può avere luogo anche con sotto-sottocategorie rispetto alle sottocategorie, e così di seguito. (…)

5 - PROBABILITA’ E CALCOLO COMBINATORIO

5.1 - Applicazioni del Calcolo Combinatorio al Calcolo delle Probabilità

- **Esempio 9**
  Lanciando per 10 volte di seguito una moneta, che probabilità c’è di ottenere esattamente 4 Teste?

Risoluzione

I casi possibili sono $2^{10} = 1024$ (è evidente che sono tutti equipossibili).
I casi favorevoli sono tanti quante le sequenze di 10 simboli, ciascuno dei quali possa essere T o C, contenenti esattamente 4 T. Per determinare il numero di tali sequenze, possiamo pensare al numero di modi in cui, in uno schema come il seguente, costituito da una successione di 10 caselle vuote:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

, noi possiamo scegliere quelle 4 nelle quali collocare T.

Tale scelta può essere effettuata in $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ modi possibili.

La probabilità richiesta è perciò $p\,(\text{"esattamente } 4 \text{ T"}) = \frac{\binom{10}{4}}{1024} = 0,205...$

ESERCIZI (con applicazione del Calcolo Combinatorio)

1) Da un mazzo da scopa (40 carte) se ne pescano 4.
   Determina la probabilità che fra di esse ci sia il “settebello” (7 di denari, ossia di quadri).

2) In un cassetto ci sono 4 fazzoletti bianchi e 3 scozzesi.
   Qual è la probabilità, pescandone 2 a caso, che siano dello stesso colore?

3) In un’urna ci sono 2 palline Bianche, 2 Rosse e 2 Nere.
   Qual è la probabilità, estraendone 3, che siano tutte di colori diversi?

4) Sul bancone del bar sono rimaste 10 brioches esternamente identiche,
   ma una di esse ha il cioccolato dentro, l’unico ripieno che non mi piace.
   Prese 3 brioches a caso, che probabilità c’è che fra di esse ci sia quella che non mi garba?

5) Avevo in tasca 20 monete, 10 da 2 euro e 10 da 1 euro. Se tirando fuori il fazzoletto
   me ne son cadute 5, calcola la probabilità che le monete per terra siano tutte dello stesso valore.

6) Calcola la probabilità che lanciando simultaneamente 10 monete escano:
   a) tutte “Croci” b) almeno una “Testa” c) esattamente una “Testa” d) tante “teste” quante “croci”

7) I 10 articoli di una vetrina hanno tutti prezzi diversi.
   Che probabilità ho, scegliendone 3 a caso, che siano i 3 più a buon mercato?

8) In un’aula per una classe di 20 studenti, 15 maschi e 5 femmine, c’è un banco triplo.
   Se i posti vengono sorteggiati, che probabilità c’è che nel banco triplo vadano a finire tre femmine?

9) In una delle versioni più comuni del gioco della scopa, dopo aver mischiato il mazzo di 40 carte e servito 9 carte a ciascuno dei 4 giocatori, le ultime 4 carte vengono rovesciate sul tavolo. Calcolare la probabilità che
   a) queste carte siano tutte figure b) nessuna di queste carte sia una figura
   c) almeno una di queste carte sia una figura d) queste 4 carte siano tutte di “quadri”
   e) fra queste 4 carte ci sia l’ “Asso bello” (=asso di quadri)
   f) fra queste 4 carte ci siano l’ “Asso bello” (=asso di quadri) e il “Settebello” (7 di quadri)
   g) fra queste 4 carte ci siano esattamente 2 assi (INDICAZIONE: immagina di scegliere 2 fra i 4 assi; in quanti modi puoi effettuare questa scelta? Poi ti si apre un ventaglio di possibilità per le 2 carte da scegliere, fra i 36 non-assi, per completare la quaterna … quante possibilità hai? Quindi …)
   h) fra queste 4 carte ci siano esattamente 3 assi
   i) queste 4 carte siano una di “Cuori”, una di “Quadri”, una di “Fiori” e una di “Picche”
   j) queste 4 carte siano 2 assi e due Figure
   k) queste 4 carte siano tutte di valore diverso
   l) fra queste 4 carte ci siano almeno 2 assi

10) In una delle versioni più comuni del gioco della scopa, dopo aver mischiato si servono 9 carte a ciascuno dei giocatori. Calcolare la probabilità per un giocatore fissato, di avere fra le sue 9 carte
   a) tutti gli Assi b) tutti gli Assi e il “Settebello” (=7 di quadri)
   c) l’ “Asso bello” (asso di quadri) d) l’ “Asso bello” e il “Settebello”
   e) 1 e 1 solo asso f) almeno 1 asso
   g) esattamente 2 assi h) almeno 2 assi

RISPOSTE

1) Numero casi possibili $=\binom{40}{4}$. Numero casi favorevoli $=\binom{39}{3}$ (tanti quante sono le quaterne ottenibili prendendo il "settebello" e accostandogli 3 carte qualsiasi fra le 39 rimanenti). $p=1/10$

2) N° casi poss. $=\binom{7}{2}$. N° casi fav. $=\binom{4}{2}+\binom{3}{2}$. $p=\frac{3}{7}$ 3) N° casi poss. $=\binom{6}{3}$. N° casi fav. $=2\cdot 2\cdot 2=8$. $p=\frac{2}{5}$

4) N° casi poss. $=\binom{10}{3}$. N° casi fav. $=\binom{9}{2}$. $p=\frac{3}{10}$ 5) N° c.p. $=\binom{20}{5}$. N° c. f. $=\binom{10}{5}+\binom{10}{5}$. $p=0,0325...$

6a) Numero casi possibili = $2^{10}=1024$. Numero casi favorevoli = 1. $p(\text{tutte C})=\frac{1}{1024}$

6b) N° casi possibili $=2^{10}=1024$. N° casi favorevoli $=1024-\underset{\substack{tutte\\croci}}{1}=1023$. $p(\text{almeno una T})=\frac{1023}{1024}$

OPPURE COSI':

> Come abbiamo anticipato,
> la somma fra la probabilità di un evento e quella dell'**evento contrario** è sempre uguale a 1.
> Allora $p(\text{almeno una T})=1-p(\text{tutte C})=1-1/1024=1023/1024$

6c) Numero casi possibili $=2^{10}=1024$. Numero casi favorevoli $=10$. $p=10/1024$

6d) Numero casi possibili $=2^{10}=1024$. Numero casi favorevoli $=\binom{10}{5}$ (tanti quanti sono i modi in cui, fra i 10 lanci, è possibile scegliere quei 5 nei quali si suppone esca "Testa"). $p=252/1024=0,246...$

7) N° casi poss. $=\binom{10}{3}$. N° casi fav. $=1$. $p=1/120$ 8) N° casi poss. $=\binom{20}{3}$. N° casi fav. $=\binom{5}{3}$. $p=1/114$

9) a) $p=\dfrac{\binom{12}{4}}{\binom{40}{4}}=\dfrac{\dfrac{\overset{3}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot 9}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}}{\dfrac{\overset{4}{\cancel{40}}\cdot \overset{13}{\cancel{39}}\cdot 38\cdot 37}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}}=\dfrac{99}{18278}=0,0054...$ b) $p=\dfrac{\binom{28}{4}}{\binom{40}{4}}=0,224...$

c) $p=\dfrac{\binom{40}{4}-\binom{28}{4}}{\binom{40}{4}}\approx 0,776$ *oppure* $1-\binom{28}{4}\Big/\binom{40}{4}$ *(evento contrario)* d) $p=\dfrac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}\approx 0,0023$ e) $p=\dfrac{\binom{39}{3}}{\binom{40}{4}}=\dfrac{1}{10}$ f) $p=\dfrac{\binom{38}{2}}{\binom{40}{4}}=\dfrac{1}{130}$

g) $p=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{36}{2}}{\binom{40}{4}}$ h) $p=\dfrac{\binom{4}{3}\cdot\binom{36}{1}}{\binom{40}{4}}=0,00157...$ i) $p=\dfrac{\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}}$ j) $p=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{40}{4}}=0,0043...$

k) $p=\dfrac{\binom{10}{4}\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}{\binom{40}{4}}=0,588...$ *(fra i 10 valori, ne scelgo 4 e per ognuno 1 carta delle 4)* *opp.* $p=\dfrac{\dfrac{40\cdot 36\cdot 32\cdot 28}{4!}}{\binom{40}{4}}$ *una carta qualsiasi... poi una qualsiasi delle 36 che non hanno lo stesso valore ... ... ma devo dividere per 4! dato che in questo modo una stessa quaterna di carte verrebbe considerata più volte*

l) $p=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{36}{2}+\binom{4}{3}\cdot\binom{36}{1}+\binom{4}{4}}{\binom{40}{4}}=\dfrac{3925}{91390}=0,0429...$ *opp.* $p=\dfrac{\binom{40}{4}-\left[\binom{36}{4}+\binom{4}{1}\cdot\binom{36}{3}\right]}{\binom{40}{4}}$

10a) $p=\binom{36}{5}\Big/\binom{40}{9}$ 10b) $p=\binom{35}{4}\Big/\binom{40}{9}$ 10c) $p=\binom{39}{8}\Big/\binom{40}{9}$ 10d) $p=\binom{38}{7}\Big/\binom{40}{9}$

10e) $p=\dfrac{4\cdot\binom{36}{8}}{\binom{40}{9}}$ 10f) $p=\dfrac{\binom{40}{9}-\binom{36}{9}}{\binom{40}{9}}$ *opp. ...* 10g) $p=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{36}{7}}{\binom{40}{9}}$ 10h) $p=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{36}{7}+\binom{4}{3}\cdot\binom{36}{6}+\binom{4}{4}\cdot\binom{36}{5}}{\binom{40}{9}}$

5.2 - Poker, Lotto, Superenalotto e il Calcolo delle Probabilità

☼ **E' richiesto di conoscere il CALCOLO COMBINATORIO!**

- **Il POKER e il calcolo delle probabilità**

UNA SOMMARIA DESCRIZIONE DI ALCUNI ASPETTI DEL POKER (VERSIONE ITALIANA)
Il mazzo da poker è (in Italia) costituito da **32 carte**, di **8 "valori" diversi**:
4 assi (di Cuori, di Quadri, Fiori, di Picche: i **4 "semi"** **C**ome **Q**uando **F**uori **P**iove),
4 re (K = King), 4 donne (Q = Queen), 4 fanti (J = Jack), 4 dieci, 4 nove, 4 otto e 4 sette.

Valori: → / **Semi: ↓**	**A**	**K**	**Q**	**J**	**10**	**9**	**8**	**7**
Cuori	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥
Quadri	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
Fiori	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
Picche	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠

Dopo aver mischiato, si distribuiscono **5 carte a ciascun giocatore**.
Non conta, ai fini del gioco, l'ordine con cui il giocatore riceve le sue 5 carte.

- Un giocatore ha in mano un "tris" se le sue carte sono: 3 di un valore e 2 di valori diversi, fra loro e dal valore precedente. Ad esempio, 3 re, 1 nove e 1 asso costituiscono un "tris".
- Un giocatore ha in mano un "poker" se fra le sue carte ci sono tutte quelle di un "valore" (più una quinta carta qualsiasi); ad esempio, 4 donne e 1 sette costituiscono un "poker".
- Un giocatore ha in mano un "full" se le sue carte sono: 3 di un "valore" e 2 di un altro "valore"; ad esempio, 3 re e 2 assi formano un "full" (detto "full di re"), così pure 3 assi e 2 re ("full d'assi"), o 3 sette e 2 donne …
- Un giocatore ha in mano una "coppia" se le sue carte sono: 2 di un valore e le altre 3 tutte di valori diversi, fra loro e dal valore precedente. Ad esempio, 2 fanti, un asso, un dieci e un nove costituiscono una "coppia".
- Un giocatore ha in mano una "doppia coppia" se le sue carte sono: 2 di un valore, 2 di un altro valore e la rimanente di un valore diverso dai primi due. Ad esempio, due re, due sette, e un nove, costituiscono una "doppia coppia" ("doppia al re coi sette").
- Un giocatore ha in mano un "colore" se le sue carte sono tutte dello stesso "seme" (es. tutte di cuori)
- Un giocatore ha in mano una "scala" se le sue carte sono (purché non tutte dello stesso seme)
  A K Q J 10;   K Q J 10 9;   Q J 10 9 8;   J 10 9 8 7   oppure   10 9 8 7 A
- Un giocatore ha una "scala reale" se le sue carte formano una scala e sono tutte dello stesso seme.

- **Esempio 10: PROBABILITÀ DEI VARI GIOCHI "SERVITI" A POKER**
  Calcolare la probabilità, quando un giocatore di poker riceve le proprie 5 carte, che si trovi in mano:
  a) una coppia d'assi (s'intende, qui e per i quesiti successivi: e nessun gioco superiore)
  b) una coppia   c) una doppia coppia   d) un tris   e) una scala
  f) un full   g) un colore   h) un poker   i) una scala reale

Risoluzione

a) I casi possibili sono tanti quante le cinquine non ordinate costruibili col mazzo di 32 carte: $\binom{32}{5} = 201376$

I casi favorevoli si possono contare ragionando in due modi.

I) Sono tanti quante le cinquine costruibili utilizzando 2 assi qualsiasi, insieme con 3 altre carte, che non siano assi e che non formino alcuna coppia. Il loro numero è perciò

$$\binom{4}{2}\cdot\frac{28\cdot 24\cdot 20}{3!} = 13440$$

II) Oppure: sono tanti quanti sono i modi in cui possiamo scegliere 2 fra i 4 assi, poi 3 fra i 7 valori K, Q, J, 10, 9, 8, 7 e infine una carta per ciascuno dei 3 valori scelti:

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 13440$$

La probabilità cercata è dunque:

$$p(\text{coppia di assi servita}) = \frac{13440}{\binom{32}{5}} = \frac{13440}{201376} \approx 0,067 \quad (6,7\%)$$

b) Poiché i casi possibili sono evidentemente 8 volte quelli del caso a), avremo

$$p(\text{coppia}) = 8 \cdot p(\text{coppia di assi}) = 8 \cdot \frac{13440}{201376} \approx 0,534 \quad (53,4\%)$$

c) I casi possibili sono tanti quante le cinquine non ordinate costruibili utilizzando le 32 carte del poker, ossia $\binom{32}{5} = 201376$.

I casi favorevoli sono tanti quante le cinquine costruibili nel modo seguente:
fra gli 8 valori A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7 se ne scelgono 2 (e questa scelta potrà essere effettuata in $\binom{8}{2}$ modi),
poi ad ognuna di queste possibili scelte si fa seguire la scelta di 2 fra le 4 carte del valore più basso,
e di 2 fra le 4 carte del valore più alto (fin qui, $\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$ possibilità di scelta);
dopodiché, per ognuna di queste $\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$ scelte, si apre un ventaglio di $8-2=6$ possibilità di scelta per il valore della carta rimanente della cinquina, e ancora di 4 possibilità di scelta per la specifica carta.
$\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6 \cdot 4$ casi favorevoli: la probabilità cercata è dunque

$$p(\text{doppia coppia}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6 \cdot 4}{\binom{32}{5}} = \frac{24192}{201376} \approx 0,120 = 12\% \text{ [NOTA]}$$

[NOTA]
In alternativa: fra gli 8 valori
A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7
se ne scelgono
un primo e poi un secondo
(e questa scelta potrà essere effettuata in $8 \cdot 7$ modi), quindi
ad ognuna di queste possibili scelte
si fa seguire la scelta
di 2 fra le 4 carte del primo valore
e di 2 fra le 4 carte del secondo;
si hanno dunque apparentemente
$8 \cdot 7 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$
possibilità di scelta, ma questo
numero va poi diviso per 2 perché,
a ben guardare, così facendo
ogni quaterna di carte
verrebbe contata 2 volte …

d) I casi possibili sono sempre in numero di $\binom{32}{5} = 201376$.

I casi favorevoli sono tanti quanti sono i modi di scegliere un valore fra gli 8 disponibili, poi 3 fra le 4 carte di quel valore, poi 1 coppia di valori fra i 7 valori non utilizzati e infine, per il valore più basso fra i due 1 carta, per l'altro valore pure 1 carta.
$8 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 10752$ casi favorevoli: la probab. cercata è dunque

$$p(\text{tris}) = \frac{8 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot 4 \cdot 4}{\binom{32}{5}} = \frac{10752}{201376} \approx 0,053 \quad (5,3\%)$$

e) I casi possibili sono sempre in numero di $\binom{32}{5} = 201376$.

I casi favorevoli si possono contare ragionando così: si immagina di scegliere una qualsiasi fra le 5 sequenze
A K Q J 10; K Q J 10 9; Q J 10 9 8; J 10 9 8 7 oppure 10 9 8 7 A,
dopodiché una carta per ciascuno dei 5 valori che da cui è formata la sequenza …
… purché però le carte scelte non siano tutte dello stesso seme,
caso in cui si avrebbe una prestigiosa "scala reale" anziché una semplice "scala".
Dunque:

$$p(\text{scala}) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 5}{\binom{32}{5}} = \frac{5120-20}{201376} = \frac{5100}{201376} \approx 0,025 \quad (2,5\%)$$

ESERCIZI

1) Prova tu a determinare la probabilità, nel gioco del poker, di trovarsi servito:
f) un full g) un colore h) un poker i) una scala reale (risposte a pagina 40)

2) E' vero che nel poker a 52 carte (A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)
il "colore servito" è più probabile del "full servito"? (risposta a pagina 40)

3) Calcola almeno alcune fra le probabilità dell'esempio 10) nell'ipotesi che si giochi con 52 carte.
Puoi poi andare a controllare le risposte a pagina 41.

- **Il LOTTO e il calcolo delle probabilità**

COME SI GIOCA AL LOTTO
Si sceglie una "ruota" (es. la ruota di Napoli);
su quella ruota è possibile giocare, scegliendo fra i numeri 1, 2, 3, 4, … , 89, 90:

- **la cinquina (5 numeri),**
- **la quaterna (4 numeri),**
- **il terno (3 numeri),**
- **l'ambo (2 numeri),**
- **oppure l' "estratto semplice" detto anche "ambata" (1 numero solo).**

Su quella "ruota" verranno estratti cinque numeri: sarà la "CINQUINA VINCENTE".

Supponiamo, per fissare le idee, che la cinquina vincente sulla ruota prescelta sia
57 22 10 88 41
Se io ho giocato, tanto per dire, l' "ambo" 41 10, ho vinto. Se avessi giocato il 41 15 avrei perso.

Insomma, per vincere, devono uscire, sulla ruota da me prescelta,
TUTTI i numeri della combinazione che ho giocato, nessuno escluso.
NON conta l'ordine nel quale i numeri vengono giocati, o vengono estratti.

- **Esempio 11: PROBABILITÀ DI SUCCESSO DELLE VARIE GIOCATE AL LOTTO**

Calcolare le probabilità di azzeccare

a) l' "estratto semplice"
b) l'ambo
c) il terno
d) la quaterna
e) la cinquina

al gioco del Lotto.

Risoluzione

a) L'ESTRATTO SEMPLICE O "AMBATA": qual è la probabilità di azzeccarlo?

Io gioco un numero, ad esempio il 44, e "spero che esca". I casi possibili sono le cinquine non ordinate costruibili coi 90 numeri 1, 2, … , 90, cioè $\binom{90}{5} = 43949268$

e i casi favorevoli sono tanti quante le cinquine che contengono il 44.

Ma queste sono tante quante le quaterne costruibili utilizzando gli 89 numeri rimanenti, cioè $\binom{89}{4}$.

La probabilità richiesta è pertanto $\dfrac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \dfrac{1}{18}$

b) L' AMBO: qual è la probabilità di azzeccarlo?

Io gioco 2 numeri, ad esempio il 44 e il 55, e "spero che escano".

I casi possibili sono le cinquine non ordinate costruibili coi 90 numeri 1, 2, … , 90, cioè $\binom{90}{5}$

e i casi favorevoli sono tanti quante le cinquine che contengono il 44 e il 55.

Esse sono tante quante le terne costruibili utilizzando gli 88 numeri rimanenti, cioè $\binom{88}{3}$.

La probabilità richiesta è pertanto $\dfrac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \dfrac{2}{801} \approx 0,0025$

c) IL TERNO: qual è la probabilità di azzeccarlo?

Vuoi un suggerimento? Come utile ESERCIZIO,
cerca di rispondere per conto tuo, non limitarti a leggere!!!

Io gioco 3 numeri, ad esempio il 44, il 55 e il 66, e "spero che escano".

I casi possibili sono le cinquine non ordinate costruibili coi 90 numeri 1, 2, … , 90, cioè $\binom{90}{5}$

e i casi favorevoli sono tanti quante le cinquine che contengono il 44, il 55 e il 66.

Esse sono tante quante le coppie costruibili utilizzando gli 87 numeri rimanenti, cioè $\binom{87}{2}$.

La probabilità richiesta è pertanto $\binom{87}{2} \Big/ \binom{90}{5} = \dfrac{1}{11748} \approx 0,000085$

d) LA QUATERNA: qual è la probabilità di azzeccarla?

Determinala tu … la risposta è nel prospetto qui sotto, la risoluzione si trova a pagina 41

e) LA CINQUINA: qual è la probabilità di azzeccarla?

Determinala tu … la risposta è nel prospetto qui sotto, la risoluzione si trova a pagina 41

Notare come il lotto sia un gioco MOLTO "iniquo"!
A fronte delle probabilità sopra calcolate, lo Stato restituisce soltanto:

- **per l' "estratto semplice": 11,232 volte la cifra giocata;**
- **per l'ambo 250 volte,**
- **per il terno 4500 volte,**
- **per la quaterna 120000 volte,**
- **per la cinquina 6000000 di volte.**

Quando gioco la combinazione:	*ho una probabilità di vincere di*	*ma, in caso di vincita, mi viene pagata soltanto una cifra uguale alla posta giocata moltiplicata per*
estratto semplice	1/18 (quindi, diciamo che se giocassi ripetutamente, **a lungo andare** vincerei **in media all'incirca** 1 volta ogni 18 giocate)	11,232
ambo	2/801 (circa 1/400)	250
terno	1/11748	4500
quaterna	1/511038	120000
cinquina	1/43949268	6000000

LOTTO = GIOCO INIQUO!
Ha senso giocare solo se si giocano piccolissime somme di denaro su combinazioni difficili, con la quasi certezza di perdere ma con la remota speranza di vincere grosse cifre.
L'emozione di un sogno milionario può giustificare una MINIMA cifra giocata, e quasi certamente persa.

Lo Stato *desidera ardentemente* (e cinicamente) che le persone continuino a versare quell'"*imposta spontanea*" che è il gioco del Lotto.
E così gli ingenui si privano dei loro sudati denari ☹
attraverso lo specchio per le allodole dei "giochi iniqui" →

Se clicchi QUI ⇨ potrai divertirti con una
SIMULAZIONE DEL GIOCO DEL LOTTO SU DATI REALI.
Un foglio elettronico ti darà la possibilità di immedesimarti in una persona che si sia intestardita a fare tantissime giocate, sulla ruota di Bari, dal 1939 fino al 2010.
Prova pure fin che vuoi, tanto è una simulazione e non ci rimetti niente!
ALLA FINE, POTRAI RENDERTI CONTO
DI QUANTO HAI RISPARMIATO … NON GIOCANDO.

- **Il SUPERENALOTTO e il calcolo delle probabilità**

COME SI GIOCA AL SUPERENALOTTO
Si giocano 6 numeri, scegliendoli fra

1, 2, 3, 4, … , 89, 90

e si spera che i 6 numeri scelti coincidano, tutti o in parte,
coi numeri della sestina che verrà estratta: la "SESTINA VINCENTE"
(in essa è del tutto irrilevante l'ordine di estrazione;
viene poi estratto un settimo numero, il cosiddetto "numero jolly").

Supponiamo, per fissare le idee, che l'esito dell'estrazione sia

56 21 11 89 35 18 + "numero jolly" 40

Se io ho giocato, tanto per dire, la sestina 4 18 29 56 81 89, ho fatto "tre".
Se avessi giocato la sestina 11 18 21 35 39 56, avrei fatto "cinque".
Se avessi giocato la sestina 11 18 21 35 40 56, avrei fatto "cinque+1".

BEN DIVERSO, dunque, il discorso, rispetto al gioco del Lotto!

- **Esempio 12**
Calcolare la probabilità di fare
"6"; "5"; "4"; "3"; "5+1"
giocando una determinata sestina al Superenalotto

Risoluzione

a) IL "6": qual è la probabilità di fare "6" al Superenalotto?

Io gioco una sestina, ad esempio 10, 20, 30, 40, 50, 60, e "spero che esca".
I casi possibili sono le sestine non ordinate costruibili coi 90 numeri 1, 2, … , 90, cioè

$\binom{90}{6} = 622614630$

e si ha 1 solo caso favorevole.

La probabilità richiesta è pertanto $\dfrac{1}{\binom{90}{6}} = 1/622614630$

b) IL "5": qual è la probabilità di fare "5"?

Io gioco una sestina, ad esempio 10, 20, 30, 40, 50, 60,
e "spero che nella sestina vincente ci siano 5 fra i miei 6 numeri".

I casi possibili sono le sestine non ordinate costruibili coi 90 numeri 1, 2, … , 90, cioè $\binom{90}{6}$

mentre i casi favorevoli sono tanti quante le sestine costruibili utilizzando
5 fra i miei 6 numeri, insieme con 1 degli 84 numeri che non ho giocato.

Esse sono $\binom{6}{5} \cdot 84 = 6 \cdot 84$

La probabilità richiesta è pertanto $\dfrac{6 \cdot 84}{\binom{90}{6}} \approx 0{,}0000008$.

OSSERVAZIONE

Per la precisione, la probabilità da noi appena calcolata non tiene conto del famoso "7° estratto",
quello che può permettere, a chi abbia fatto "5", di realizzare eventualmente il cosiddetto "5+1".
Il valore da noi determinato rappresenta perciò la probabilità di fare "5 oppure 5+1",
e la probabilità di fare "5-e-basta" andrà ricalcolata sottraendo, da tale valore,
la piccolissima probabilità di fare "5+1" (di cui ci occuperemo alla fine di questo paragrafo).

c) IL “4”: qual è la probabilità di fare “4”?

Vuoi un suggerimento?
Per utile ESERCIZIO, prosegui ora per conto tuo, non limitarti a leggere!!!

Io gioco una sestina, ad esempio 10, 20, 30, 40, 50, 60,
e “spero che nella sestina vincente ci siano 4 fra i miei numeri”.

I casi possibili sono le sestine non ordinate costruibili coi 90 numeri 1, 2, … , 90, cioè $\binom{90}{6}$;

i casi favorevoli sono tanti quante le sestine costruibili utilizzando
4 fra i miei 6 numeri, insieme con 2 degli 84 numeri rimanenti. Esse sono $\binom{6}{4}\cdot\binom{84}{2}$.

Infatti $\binom{6}{4}$ è il numero dei modi in cui, fra i miei 6 numeri, posso sceglierne 4,

e $\binom{84}{2}$ è il numero dei modi in cui, fra gli 84 numeri che non ho giocato, posso sceglierne 2.

La probabilità richiesta è pertanto $\dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{84}{2}}{\binom{90}{6}} \approx 0{,}000084$.

d) IL “3”: qual è la probabilità di fare “3”?

Pensaci, poi vai a vedere il risultato a pagina 41.

Come si è visto,
la struttura combinatorio-probabilistica del Superenalotto
è completamente diversa da quella del Lotto.
Ad esempio, un “tre” al Superenalotto
non ha assolutamente nulla a che fare con un “terno al Lotto”:
si tratta di situazioni del tutto diverse.

In quanto all’equità o iniquità del Superenalotto,
la valutazione è un po’ più elaborata rispetto a quella fatta per il Lotto,
in quanto il premio in caso di vincita non si ottiene, come nel caso del Lotto,
moltiplicando la cifra impegnata per un dato fattore
(dipendente dal tipo di combinazione giocata),
ma è invece il frutto della ripartizione di un “monte-premi”
 - variabile di settimana in settimana -
fra i vari giocatori che hanno azzeccato le varie combinazioni.

Lo studente, a questo punto, potrà facilmente approfondire la questione
giungendo a concludere come prima:

*Può aver senso giocare solo se si giocano **piccolissime cifre**,*
con la quasi certezza di perdere ma con la remota speranza di vincere milioni di euro.

Lo “sfizio” di avere in tasca 1 possibilità su 622 milioni
di aggiudicarsi il favoloso jack-pot
può valere (forse) la piccola cifra della giocata.

Ma chi gioca centinaia o anche solo decine di euro
al Superenalotto,
così come al Lotto,
incrementa soltanto le entrate di quella che è stata chiamata,
con tutte le ragioni, la **“TASSA SUGLI IMBECILLI”.**

Ferma restando questa raccomandazione,
le due pagine successive sono dedicate a studiare la probabilità di azzeccare il “5+1”.

e) IL "5+1": qual è la probabilità di realizzarlo?

Andiamo ora a valutare la PROBABILITÀ DI AZZECCARE IL "5+1".

In questo caso, i casi possibili non sono più costituiti da sestine, ma
(ci concediamo una licenza linguistica, inventando un vocabolo che nel dizionario italiano non c'è)
da … "**settimine**"!

In relazione al "5+1", infatti, interessano:

- non solo i 6 numeri estratti per primi, per i quali non è rilevante l'ordine di estrazione
- ma anche, questa volta, il 7° numero estratto, il cosiddetto "numero jolly",
  quello che può consentire, a chi abbia eventualmente fatto "5", di realizzare il "5+1".

Spieghiamoci nel dettaglio.
Avevamo già fatto un esempio:
se i primi 6 numeri estratti sono

56 21 11 89 35 18

e il 7° numero estratto, il famoso "numero jolly", è
40,
allora una persona che abbia giocato la sestina

11 18 21 35 40 56

realizza il "5+1"
perché 5 fra i 6 numeri giocati stanno anche nella sestina vincente,
e inoltre il rimanente, pur non stando nella sestina vincente, coincide col "numero-jolly".

I casi possibili, dicevamo, **non sono delle sestine ma delle "settimine".
Sono però "settimine" strane, perché non sono
né "completamente ordinate" né "completamente non ordinate".**

**Le settimine a cui dobbiamo pensare sono composte da:
6 elementi di cui non conta l'ordine ma solo l'individualità;
più un settimo elemento (il "jolly"),
di cui conta invece il fatto che è proprio il settimo numero estratto.**

In definitiva, le settimine POSSIBILI, quante sono?

Quanti sono i possibili esiti dell'estrazione dei fatidici 6+1 numeri?

Questi esiti sono tanti quanti sono i modi di scegliere (non importa l'ordine)
6 numeri fra i 90 disponibili,
PIU' un settimo numero fra gli 84 rimanenti.

E questa doppia scelta può essere effettuata in $\binom{90}{6}\cdot 84$ modi.

Dunque il numero delle settimine possibili è $\binom{90}{6}\cdot 84$.

**E quante sono ora le settimine a me FAVOREVOLI in vista del "5+1",
se ho compilato una schedina scegliendo 6 particolari numeri di mio gradimento?**

Con la mia giocata, io farò "5+1" se uscirà una "settimina" composta:

- da 6 termini iniziali (quelli di cui non importa l'ordine) costituiti
  da 5 fra i 6 numeri da me scelti,
  insieme con un numero che sta fra gli 84 numeri da me NON scelti
- e da un numero finale, coincidente col numero rimanente della mia sestina.

Ma di settimine siffatte ce ne sono $\binom{6}{5}\cdot 84\cdot 1$.

Pertanto la **probabilità di fare "5+1"** è data dal numero

$$p("5+1")=\frac{\binom{6}{5}\cdot 84\cdot 1}{\binom{90}{6}\cdot 84}=\frac{6}{\binom{90}{6}}=\frac{6}{622614630}\approx 0,00000001$$

In alternativa,
possiamo **cambiare completamente punto di vista** e **immaginare**
(tanto nulla cambierebbe, evidentemente, per quanto concerne le probabilità) **che la "settimina" composta dai 6 numeri vincenti (dei quali non conta l'ordine di estrazione) + il numero jolly sia già stata estratta, ma tenuta segreta. Essa è quella che è; si trova lì, in un cassetto.**

Noi a questo punto giochiamo una sestina, quindi
i casi possibili diventano … le sestine che NOI possiamo divertirci a inventare,
il cui numero è ovviamente $\binom{90}{6} = 622614630$

e i casi favorevoli al "5+1" diventano quelle sestine ricavabili prendendo la settimina segreta, togliendole un numero qualsiasi dal gruppo dei primi 6
e sostituendolo col "numero jolly", ossia con l'ultimo termine della settimina.

I casi favorevoli sono allora 6, e la probabilità è $p("5+1") = \dfrac{6}{\binom{90}{6}} = \dfrac{6}{622614630} \approx 0,00000001$

Questo modo alternativo di procedere appare molto più semplice del precedente,
ma richiede, appunto, di cambiare completamente prospettiva:

♪ mentre quando si erano valutate le probabilità di totalizzare "6", "5", "4" e "3"
si pensava ai casi possibili e ai casi favorevoli ponendosi idealmente
ACCANTO ALL'URNA,
ossia si pensava alle
SESTINE CHE POTEVANO ESSERE ESTRATTE

♫ invece qui si pensa ai casi possibili e ai casi favorevoli ponendosi idealmente
ACCANTO ALLA PERSONA CHE SCRIVE SULLA SCHEDINA,
vale a dire si pensa alle
SESTINE CHE POSSONO ESSERE GIOCATE.

RAGIONARE IN MODI ALTERNATIVI

Ecco un altro esempio di problema sul C.C. per il quale esistono due possibilità di approccio differenti.
Se fra i 40 biglietti di una lotteria organizzata per gioco da una compagnia di ragazzini 7 sono vincenti, e una persona acquista 2 biglietti, che probabilità c'è che siano entrambi vincenti?

♪ **Se mi pongo dal punto di vista della persona che compra i biglietti**,
immaginando che i 7 vincenti siano già stati estratti, o comunque fissati, *fin dall'inizio*, avrò che
i casi equipossibili sono tanti, quante le possibilità, fra i 40 biglietti esistenti, di sceglierne 2, quindi $\binom{40}{2}$
e i casi favorevoli saranno le coppie di biglietti costruibili utilizzando i soli 7 biglietti vincenti, ossia $\binom{7}{2}$.

Ragionando in questo modo, ottengo $p = \dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{\frac{7\cdot 6}{2!}}{\frac{40\cdot 39}{2!}} = \dfrac{7\cdot \cancel{6}^{\,3}}{{}_{20}\cancel{40}\cdot \cancel{39}_{13}} = \dfrac{7}{260} \approx 0,027$

♫ **Se invece mi pongo idealmente "accanto all'urna",** pensando che l'estrazione dei vincenti avvenga *dopo* che i biglietti sono stati venduti (è evidente che la probabilità in esame rimarrebbe la stessa di prima!)
allora potrò dire, da quest'altra prospettiva, che i casi possibili sono $\binom{40}{7}$ mentre i casi favorevoli
sono tanti quanti i gruppi di 7 biglietti ottenibili prendendo i 2 biglietti che la persona possiede,
e accostando loro 5 qualsiasi fra i 38 biglietti rimanenti: ora, tali gruppi sono in numero di $\binom{38}{5}$, da cui

$$p = \frac{\binom{38}{5}}{\binom{40}{7}} = \frac{\frac{\cancel{38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34}}{5!}}{\frac{40\cdot 39\cdot \cancel{38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34}}{7!}} = \frac{\frac{7!}{5!}}{40\cdot 39} = \frac{\frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}}{40\cdot 39} = \frac{7\cdot \cancel{6}^{\,3}}{{}_{20}\cancel{40}\cdot \cancel{39}_{13}} = \frac{7}{260} \approx 0,027$$

RISPOSTE agli esercizi di pag. 33

1) *Prova tu a determinare la probabilità, nel gioco del poker, di trovarsi servito:*
f) un full g) un colore h) un poker i) una scala reale

1f) probabilità del "full" servito a poker (32 carte): $p(\text{full})=\dfrac{8\cdot\binom{4}{3}\cdot 7\cdot\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}=\dfrac{1344}{201376}\approx 0{,}0067\ \ (0{,}67\%)$

1g) probabilità del "colore" servito a poker (32 carte): $p(\text{colore})=\dfrac{4\cdot\binom{8}{5}\overbrace{-4\cdot5\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}^{\substack{\text{per escludere}\\ \text{le scale reali}}}}{\binom{32}{5}}\approx 0{,}0010\ \ (0{,}1\%)$

1h) probabilità del "poker" servito a poker (32 carte): $p(\text{poker})=\dfrac{8\cdot\binom{4}{4}\cdot 7\cdot\binom{4}{1}}{\binom{32}{5}}=\dfrac{224}{201376}\approx 0{,}0011\ \ (0{,}11\%)$

1i) prob. della "scala reale" servita a poker (32 carte): $p(\text{sc. r.})=4\cdot\dfrac{5\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}{\binom{32}{5}}=\dfrac{20}{201376}\approx 0{,}0001\ \ (0{,}01\%)$

2) *E' vero che nel poker a 52 carte il colore servito" è più probabile del "full servito"?*
Sì, è vero:

$$p(\text{full servito nel poker con 52 carte})=\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}=\frac{3744}{2598960}\approx 0{,}0014\ \ (0{,}14\%)$$

$$p(\text{colore servito nel poker con 52 carte})=\frac{4\binom{13}{5}\overbrace{-4\cdot 10}^{\substack{\text{per escludere le 10}\\ \text{possibili scale reali}\\ \text{di ciascun seme}}}}{\binom{52}{5}}=\frac{5148-40}{2598960}=\frac{5108}{2598960}\approx 0{,}002\ \ (0{,}2\%)$$

SCHEMA RIASSUNTIVO delle probabilità dei vari giochi "serviti" al **poker con 32 carte**:		
Punto "servito"	*Numero casi favorevoli*	*Probabilità di avere quel punto "servito" (valore approssimato)*
Coppia	$8\cdot\binom{4}{2}\cdot\dfrac{28\cdot24\cdot20}{3!}=107520$ opp. $8\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot4\cdot4\cdot4=107520$	53%
Doppia coppia	$\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot6\cdot4=24192$	12%
Tris	$8\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{7}{2}\cdot4\cdot4=10752$	5,3%
Scala (non reale)	$5\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4-4\cdot5=5100$	2,5%
Full	$8\cdot\binom{4}{3}\cdot7\cdot\binom{4}{2}=1344$	0,67%
Colore (ma non scala reale)	$4\cdot\binom{8}{5}-4\cdot5=204$	0,1%
Poker	$8\cdot7\cdot4=224$	0,11%
Scala reale	$4\cdot5=20$	0,01%

OSSERVAZIONE
Le probabilità di cui ci stiamo occupando sono quelle del punto “SERVITO”,
ossia di avere quella determinata configurazione di carte ALL’INIZIO,
quando il mazziere, dopo aver mischiato, distribuisce (“serve”) 5 carte a ciascuno dei giocatori.
Un discorso più complicato sarebbe quello di determinare la probabilità che un giocatore
si ritrovi un determinato punto (per fare un esempio, il “full”) ALLA FINE,
dopo aver eventualmente cambiato alcune delle sue carte,
come il gioco del poker consente (una sola volta) di fare.

In tale discorso entrerebbero però in gioco considerazioni molto più complesse e di varia natura,
di cui non intendiamo in queste pagine occuparci.

3) *Calcola almeno alcune fra le probabilità dei vari punteggi serviti nel poker giocato con 52 carte*

Le probabilità di un gioco “servito” nel poker con 52 carte (n° casi possibili $= \binom{52}{5} = 2598960$):

Punto (*servito*)	*Numero casi favorevoli*	*Probabilità* (*valore approssimato*)
Coppia	1098240	$42,26\%$
Doppia coppia	123552	$4,75\%$
Tris	54912	$2,11\%$
Scala	10200	$0,39\%$
Full	3744	$0,144\%$
Colore	5108	$0,1965\%$
Poker	624	$0,024\%$
Scala reale	40	$0,00154\%$

RISOLUZIONE degli esercizi di pag. 35

probabilità della QUATERNA AL LOTTO =

$$= \frac{86}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{511038} \approx 0,000002$$

probabilità della CINQUINA AL LOTTO =

$$= \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43949268} \approx 0,000000023$$

RISPOSTA all’esercizio di pag. 37

$$\text{probabilità del "TRE" AL SUPERENALOTTO} = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{84}{3}}{\binom{90}{6}} \approx 0,003$$

In America alone, *problem gambling* affects more than 15 million people.
More than 3 million of these are considered severe problem gamblers,
otherwise known as gambling addicts or pathological gamblers.

Problem gambling can strain your relationships,
interfere with responsibilities at home and work,
and lead to financial catastrophe.

It may even lead you to do things you never thought possible,
like stealing money to gamble or taking money meant for your children. …

Gambling addiction, also known as *compulsive gambling*, is a type of impulse-control disorder.

Compulsive gamblers can’t control the impulse to gamble,
even when they know their gambling is hurting themselves or their loved ones.

Gambling is all they can think about and all they want to do, no matter the consequences.

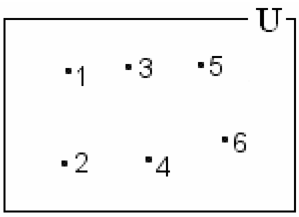
(dal sito www.helpguide.org, anno 2010)

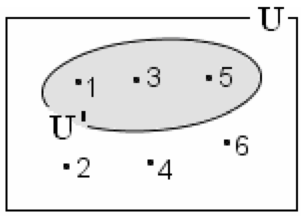
Interessanti anche le riflessioni su QUESTO sito ⇨

6 - PROBABILITA' CONDIZIONATA

6.1 - Cosa significa “probabilità condizionata” (o “subordinata”)

- **Esempio 1**
  Prima di lanciare un dado,
  io so che la probabilità di ottenere un determinato esito, ad esempio "5", è 1/6.
  Ma se io lancio il dado, non guardo che numero esce,
  e una persona che ha visto mi riferisce che è uscito un numero dispari,
  a questo punto come valuterò la probabilità che l'esito del lancio sia stato il numero "5"?
  Evidentemente la probabilità, per effetto del "surplus di informazione", salirà a 1/3!
  Ciò è dovuto al fatto che l'informazione acquisita mi porta a "rinnovare" l’insieme universo:
  dall’iniziale U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} esso diventa U' = {1, 3, 5} .





In generale:

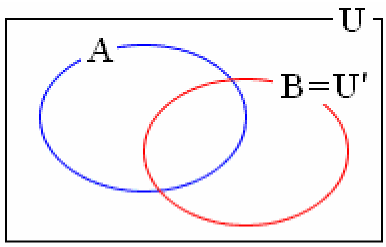
se U è lo spazio degli eventi, e A, B sono due suoi sottoinsiemi, cioè due eventi
(vedi figura sottostante),
si dice " probabilità dell'evento A, CONDIZIONATA al verificarsi dell'evento B "
la probabilità di A valutata nell'insieme universo B.
Tale probabilità si indica con $\boldsymbol{p(A/B)}$ (leggi: probabilità di "A condizionato a B").

Se indichiamo col simbolo $\boldsymbol{n(X)}$
il numero degli elementi di un insieme X,
sarà quindi:

$$\boxed{p(A/B) = n(A \cap B)/n(B)}$$

e, nel caso particolare che A sia sottoinsieme di B,

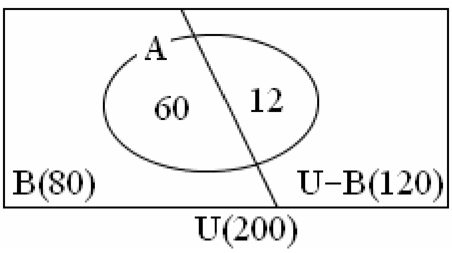
$$p(A/B) = n(A)/n(B)$$



Nel caso dell’esempio inizialmente proposto, potremo scrivere:
p(“5”/dispari) = 1/3 (leggi: la probabilità che l’esito sia 5, condizionata al fatto che l’esito sia dispari, è 1/3).

Il concetto è molto rilevante, e può presentarsi sotto diversi aspetti. Facciamo altri esempi.

- **Esempio 2**
  Nel mio Liceo ci sono 200 ragazze, 80 delle quali sono bionde;
  so anche che ha gli occhi azzurri il 75% delle bionde (= 60 ragazze),
  e il 10% delle non-bionde (= 12 ragazze).
  Io, in confidenza, adoro le bionde, specialmente quando hanno pure gli occhi azzurri.
  Se come premio per una gara ho vinto un bacio da parte di una ragazza estratta a sorte
  fra le studentesse del Liceo,
  1. **che probabilità c'è che la ragazza sorteggiata sia Bionda?**
  2. **che probabilità c'è che abbia gli occhi Azzurri?**
  3. **che probabilità c'è che sia una Bionda con gli occhi Azzurri?**
  4. **se qualcuno mi confida che la ragazza sorteggiata è Bionda,**
     che probabilità c'è che abbia gli occhi Azzurri?
  5. **se, invece, vengo a sapere che la ragazza sorteggiata ha gli occhi Azzurri,**
     qual è la probabilità che sia Bionda?



NOTA
Sappiamo che U – B
si può anche indicare con $\overline{B}$
(= “il complementare di B”)

Risoluzione
Posto

A = “la ragazza estratta ha gli occhi azzurri”,
B = “la ragazza estratta è bionda”,

avremo

$A \cap B$ = “la ragazza estratta è bionda e ha gli occhi azzurri”

e potremo scrivere:

1. $p(B) = 80/200$
2. $p(A) = 72/200$
3. $p(A \cap B) = 60/200$

Fin qui si trattava di calcolare probabilità "normali".
I punti successivi, invece, si riferiscono a probabilità “condizionate":

4. $p(A/B) = 60/80$
5. $p(B/A) = 60/72$

Si potrebbe dire che
"la probabilità *p*(A/B) dell'evento A, condizionata al verificarsi di B"
è
"la probabilità che si sia verificato o si verifichi l'evento A,
valutata sapendo o supponendo che si verifichi o si sia verificato B".

Notare che **non necessariamente l'evento A dev'essere successivo, in senso temporale, all'evento B**.
Per illustrare quest’ultima puntualizzazione relativa all’ordine temporale,
mi sembra significativo il seguente ulteriore esempio.

- **Esempio 3**
  Gli almanacchi del calcio contengono i dati relativi a tutte le partite
  di tutti i campionati nazionali italiani di serie A fin qui disputati.
  Che probabilità sussiste, per una squadra che ha vinto una partita,
  di aver vinto anche il primo tempo?

Per spiegarmi meglio, poniamo che mi sia stata proposta la seguente scommessa:
prendiamo una partita a caso di un campionato a caso
(estraiamo a sorte sia il campionato che la partita, insomma).
Se la partita estratta è terminata in pareggio, non la consideriamo neppure e ne estraiamo un'altra.
Se invece la partita è terminata con la vittoria di una delle due squadre,
mi viene proposto di puntare 100 euro per riceverne 150 se la squadra che ha vinto
aveva terminato in vantaggio il primo tempo.
Mi conviene accettare una simile scommessa?
Evidentemente, per saperlo dovrei conoscere la probabilità $p(P/F)$, cioè la probabilità
che una squadra abbia vinto il Primo tempo (P), se ha poi vinto alla Fine della partita (F).
E valuterò tale probabilità andando a contare il numero n di partite
che sono terminate con la vittoria di una delle due squadre,
il numero k di volte in cui la squadra vincitrice della partita considerata aveva vinto anche il relativo 1° tempo,
per porre infine, in una visione “frequentista”, $p(P/F) = k/n$.

Ancora:

- **Esempio 4**
  Butto un dado FINCHE' non esce un numero superiore a 3.
  (Vale a dire: se esce 1, 2 o 3, la prova non mi interessa,
  faccio come se non fosse stata effettuata e quindi la ripeto.
  Se esce 4, o 5, o 6, la prova è "valida").
  Con queste modalità, che probabilità c'è di ottenere un numero pari?

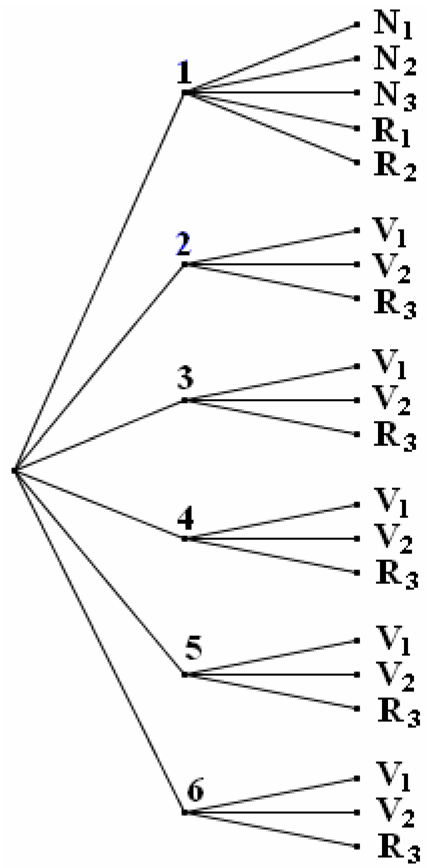
Evidentemente, la risposta è: 2/3.
E’ stata valutata la
"probabilità che dal lancio di un dado esca un numero pari, condizionata all'uscita di un numero superiore a 3".

6.2 - Un secondo impiego della scrittura *p*(A/B): l' "evento a due fasi"

Il simbolo *p*(A/B), e la relativa locuzione
"probabilità di A, condizionata al verificarsi di B"
sono però anche usati in un altro contesto:
quello delle cosiddette
"prove a più fasi",
ossia
"prove costituite dalla successione o dall'abbinamento di due, o più, prove parziali".

- **Esempio 5**

  Lancio un dado.
  Se esce 1 pesco una pallina da un'urna U1
  che contiene 3 palline nere (N) e 2 rosse (R).
  Se esce un numero diverso da 1 pesco invece da un'urna U2
  contenente 2 palline verdi (V) e 1 rossa (R).

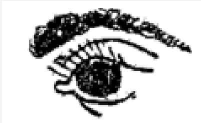


Se io domandassi
"Qual è la probabilità di estrarre una pallina Rossa?",
la risposta a questa domanda, allo stato delle nostre conoscenze, non sarebbe affatto facile.

Io invece per ora voglio chiederti:
"qual è la probabilità di estrarre una pallina Rossa, se dal lancio del dado è uscito 1?"
Semplicissimo: ovviamente, tale probabilità è 2/5.

Potremo scrivere *p*(R/ "1") = 2/5 che si leggerà:
la probabilità che la pallina esca Rossa,
sotto l'ipotesi che dal lancio del dado esca o sia uscito il numero 1,
è 2/5.

6.3 - Ricapitolazione



Il simbolo

$p(A/B)$

si legge

"probabilità dell'evento A, CONDIZIONATA (alcuni preferiscono dire: SUBORDINATA) al verificarsi dell'evento B".

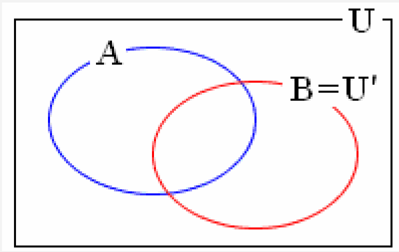
Ciò significa:

"probabilità dell'evento A, nell'ipotesi che si sia verificato o che si verifichi l'evento B"

Ci possono essere **DUE tipi di situazioni**:

1) **A, B sono due sottoinsiemi dello stesso insieme universo U, nel qual caso $p(A/B)$ deve essere pensata come la "probabilità di A, se ci limitiamo a considerare i casi in cui si verificherà, o in cui si è verificato, B"**.

Ciò corrisponde ad una "**restrizione dell'insieme universo**", che per il calcolo di $p(A)$ è U, mentre per il calcolo di $p(A/B)$ è B.



- **Esempio**
  Lanciando un dado, la probabilità che esca "5" è 1/6.
  Ma qual è la probabilità che esca "5", sotto l'ipotesi che esca un numero dispari
  (cioè: se sappiamo che è uscito un numero dispari;
  o, equivalentemente, se decidiamo che,
  in caso di uscita di un numero pari, la prova debba essere ignorata e ripetuta)?

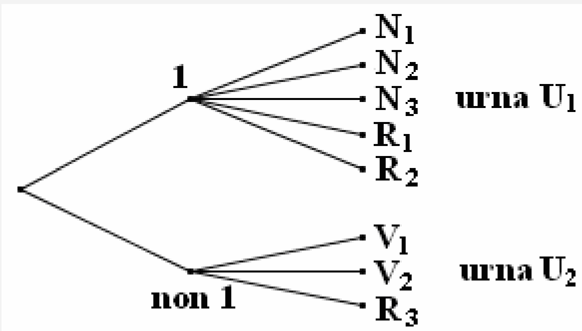
  Risposta: $\boldsymbol{p(\text{"5"}/\text{dispari}) = 1/3}$

2) **Ci stiamo occupando di un "esperimento" costituito da due "prove parziali" (l'esito della 1^a prova parziale potrà eventualmente condizionare le modalità di svolgimento della 2^a).**
   - **A e B NON sono due sottoinsiemi dello stesso insieme universo U.**
   - **A è un insieme di esiti della seconda prova parziale,**
   - **B è un insieme di esiti della prima prova parziale.**

   Allora $p(A/B)$ deve essere pensata come la "probabilità che si verifichi A, supposto che si sia verificato B nella prima prova parziale".

- **Esempio**
  Lancio un dado. Se esce 1 pesco una pallina da un'urna U1 che contiene 3 palline nere (N) e 2 rosse (R).
  Se esce un numero diverso da 1 pesco invece da un'urna U2 contenente 2 palline verdi (V) e 1 rossa (R).
  Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa, se dal lancio del dado è uscito 1?

  Risposta:
  $\boldsymbol{p(\text{rossa}/\text{"1"}) = 2/5}$



- **Altro esempio**
  Un'urna contiene 7 palline, 3 Rosse e 4 Nere. Si estraggono, una dopo l'altra, due palline.
  Valutare la probabilità che la seconda estratta sia Rossa, nell'ipotesi che la prima sia Rossa.
  Distinguere i DUE CASI:
  a) la prima pallina viene messa da parte (= NON la si "reimbussola", NON la si reinserisce nell'urna)
  b) la prima pallina viene "reimbussolata"

  Risposte: a) $\boldsymbol{p(2^a R/1^a R) = 2/6 = 1/3}$
  b) $\boldsymbol{p(2^a R/1^a R) = 3/7}$ (in questo caso l'urna non cambia fra la 1^a e la 2^a estrazione!)

6.4 - Eventi stocasticamente indipendenti

- **Esempio 6**
  Da un mazzo di carte da scopa si estrae una carta.
  La probabilità che sia di "cuori" è 10/40 = 1/4.
  Se so che la carta estratta è una figura, la probabilità che si tratti di una carta di cuori rimane 1/4.

C = "esce una carta di cuori"; F = "esce una figura";
***p*(C) = 1/4; ma anche *p*(C/F) = 1/4**.
Quindi, in questo caso, $p(C/F) = p(C)$: il verificarsi di F non modifica la probabilità del verificarsi di C.

Quando, dati due eventi,
il verificarsi di uno di essi non modifica la probabilità del verificarsi dell'altro,
si dice che i due eventi sono "stocasticamente indipendenti":

A, B stocasticamente indipendenti
SE E SOLO SE
1) $p(A/B) = p(A)$
2) $p(B/A) = p(B)$

Si può dimostrare che ogniqualvolta $p(A/B) = p(A)$ è anche $p(B/A) = p(B)$ e viceversa;
insomma, delle due condizioni che definiscono l'indipendenza stocastica,
una (qualsiasi) è conseguenza dell'altra.

6.5 - Esercizi (probabilità condizionata)

Qualche bell'esercizio sul concetto di "probabilità condizionata" e di "eventi stocasticamente indipendenti".
Trovi le risposte commentate di seguito alla rassegna.

1) Da un mazzo di carte da scopa (40 carte), si estrae una carta.
   a) Che probabilità c'è che sia un "re"?
   b) Se vengo a sapere che la carta estratta è una figura,
      che valutazione darò della probabilità che si tratti di un "re"?

2) Si estraggono, successivamente, e senza reimbussolamento, 2 palline da un'urna
   che contiene 3 Nere e 2 Rosse.
   a) Se la prima estratta è R, che probabilità sussiste che la seconda sia pure R?
   b) Prima di estrarre la prima pallina, come avremmo valutato la probabilità che,
      alla fine della prova, la seconda estratta risultasse una Rossa?

3) Si lancia un dado due volte.
   a) Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10,
      ammesso che uno di questi punti sia 6?
   b) Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10,
      ammesso che il punto ottenuto col primo lancio sia 6?
   c) Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10,
      ammesso che il punto ottenuto col secondo lancio sia 6?

4) In una certa gara le probabilità di vincere dei quattro concorrenti A, B, C, D
   sono state valutate rispettivamente in: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4
   (qui sconfiniamo piuttosto in una concezione "soggettivistica" della probabilità:
   è ovvio che non si sono considerati "casi favorevoli" e "casi possibili",
   ma si è cercato di quantificare, con ragionamenti e confronti,
   le possibilità di ciascun concorrente di vincere quella gara.
   Insomma, si è concluso che le capacità e le condizioni fisiche e psicologiche dei concorrenti
   sembrano tali da equiparare la gara all'estrazione di una pallina da un'urna contenente 10 palline,
   di cui 1 reca il simbolo "A", 2 recano il simbolo "B", 3 il simbolo "C" e 4 il simbolo "D").
   Ora, se il concorrente D si ritira, come verranno ricalcolate le probabilità di A, B, C?

5) Immagina di lanciare tre volte una moneta e considera gli eventi:
   A = "si presenta la stessa faccia in tutti e tre i lanci"
   B = "si presenta Testa in almeno due lanci"
   Dimostra che A, B sono due eventi stocasticamente indipendenti.

6) I due eventi "lanciando una coppia di dadi, esce una somma dispari" e
   "lanciando una coppia di dadi, si presenta almeno una volta la faccia '1' "
   sono stocasticamente indipendenti?

RISPOSTE:

1a) $p(\text{K = King = re}) = 4/40 = 1/10$ 1b) $p(\text{K/F}) = 4/12 = 1/3$
Quindi i due eventi “K, esce un re” e “F, esce una figura” NON sono stocasticamente indipendenti.

2a) $p(2^a \text{ Rossa}/1^a \text{ Rossa}) = 1/4$

2b) $p(2^a \text{ Rossa}) = 2/5$
A questa risposta 2b), oltre che contando
il numero dei casi equipossibili (coppie ordinate di palline distinte: $5 \cdot 4 = 20$)
e quello dei casi favorevoli (che sono $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$: … non sei convinto? Fai un diagramma ad albero!),
si potrebbe pervenire con estrema semplicità nel modo seguente.

Possiamo pensare di chiudere gli occhi e pescare, anziché 2 soltanto,
TUTTE E 5 le palline, una dopo l’altra, disponendole in fila.
Evidentemente, la probabilità richiesta dal quesito 2b coincide con la probabilità
che la seconda pallina della fila sia una Rossa.
Ma non c’è motivo per cui tale probabilità differisca dalla probabilità
di trovare una Rossa in un posto prefissato qualsiasi, ad esempio il 1° posto.
E tale probabilità è, evidentemente, 2/5.

3a) 3/11 3b) 1/3 3c) 1/3

4) Probabilisticamente, è esattamente come avere 10 palline,
1 delle quali reca il simbolo “A”, 2 delle quali “B”, 3 delle quali “C”,
mentre le rimanenti 4 palline portano il simbolo “D”.
Ora, se le 4 palline recanti “D” vengono eliminate restano le rimanenti 6 palline …
Le probabilità richieste sono:
probabilità 1/6 per la vittoria di A, 2/6 per la vittoria di B e 3/6 per la vittoria di C.
Possiamo anche scrivere così:

$$p(\text{A}/\overline{\text{D}}) = \frac{1}{6}, \quad p(\text{B}/\overline{\text{D}}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p(\text{C}/\overline{\text{D}}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo usato disinvoltamente il simbolo $\overline{\text{D}}$
per schematizzare “non D” nel senso di “D ritirato”

5) La nostra tesi è: $p(\text{A/B}) = p(\text{A})$ o, indifferentemente, $p(\text{B/A}) = p(\text{B})$.

- $p(\text{A/B}) = p$("stessa faccia in tutti e 3"/"Testa in almeno 2").
  Ora, l’ipotesi che esca Testa in almeno 2 lanci ci porta all’insieme universo “ristretto”
  {TTT, TTC, TCT, CTT}
  nell’ambito del quale l’evento “stessa faccia in tutti e 3” si verifica nel solo caso TTT. Perciò
  $p(\text{A/B}) = 1/4$.
- Calcoliamo ora $p(\text{A})$.
  n° casi possibili = $2^3 = 8$; n° casi favorevoli = 2
  quindi
  $p(\text{A}) = 2/8 = 1/4$.

Ma allora
$p(\text{A/B}) = p(\text{A}) = 1/4$
e la tesi è dimostrata.

6) Fra i 36 casi possibili nel lancio di due dadi,
quelli nei quali la somma degli esiti è dispari sono 18, per cui
$p(\textit{somma dispari}) = 18/36 = 1/2$

mentre quelli in cui compare almeno una volta la faccia “1” sono i seguenti:
(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1)
ossia sono 11, in 6 dei quali la somma è dispari.
Perciò
$p(\textit{somma dispari} / \textit{almeno un } 1) = 6/11$.

Essendo
$p(\textit{somma dispari} / \textit{almeno un } 1) \neq p(\textit{somma dispari})$,
i due eventi NON sono statisticamente indipendenti.

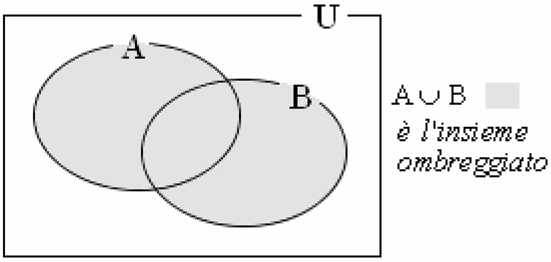
7 - UNIONE, INTERSEZIONE, COMPLEMENTAZIONE

A questo punto siamo in grado di dimostrare, senza grandi difficoltà, alcuni teoremi basilari sul CdP.

E' importante tenere presente fin d'ora che per la risoluzione di alcuni problemi di CdP, l'applicazione dei teoremi che stiamo per stabilire risulta realmente utile; in altri casi, invece, tale applicazione è possibile ma del tutto superflua perché è più semplice valutare la probabilità dell'evento "per via diretta", contando cioè i casi possibili e i casi favorevoli (naturalmente, sempre con la massima attenzione nel controllare se i casi cui ci stiamo riferendo sono realmente tutti "equipossibili").

7.1 - Teorema sulla probabilità dell'evento unione (detto "teorema delle probabilità totali")

Sia U l'insieme universo dei casi equipossibili, e siano $A \subseteq U, \quad B \subseteq U$.



Semplici considerazioni sul numero degli elementi dei vari insiemi che compaiono nella figura, nella quale l'insieme $A \cup B$ è quello ombreggiato, consentono di scrivere:

$$\boxed{p(A \cup B) =} \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \boxed{p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

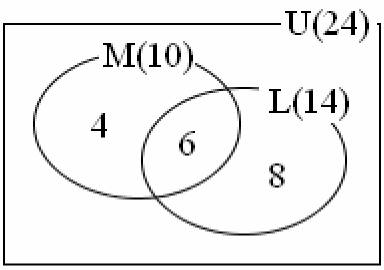
Dunque avremo:

$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$ **(TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI)**

Se A, B sono "**incompatibili**" (cioè, se l'intersezione fra A e B è vuota) la formula diventa semplicemente:

$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$ **(TEOR. DELLE PROBABILITA' TOTALI PER EVENTI INCOMPATIBILI)**

- **Esempio**
  In una classe di 24 alunni, 10 sono insufficienti in Matematica, 14 in Latino, 6 sia in Matematica che in Latino (che strage!). Preso un alunno a caso, che probabilità c'è che sia insufficiente in almeno una delle due materie Matematica e Latino?



Primo modo di risolvere
(col teorema delle probabilità totali):

$$p(M \cup L) = p(M) + p(L) - p(M \cap L) = 10/24 + 14/24 - 6/24 = 18/24$$

Secondo modo di risolvere
(**senza applicare alcun teorema**, molto spontaneamente e semplicemente):

$$p(M \cup L) = n(M \cup L)/n(U) = (4+6+8)/24 = 18/24$$

Ammetto tranquillamente che l'esempio fornito è molto banale, nel senso che in questo caso applicare il teorema è, sì, possibile, ma si rivela completamente superfluo, perché risulta molto più semplice contare direttamente il numero dei casi favorevoli e dei casi possibili. Per incontrare esempi in cui si veda un'effettiva utilità del teorema sopra stabilito, occorre far riferimento a situazioni più complicate, che incontreremo presto proseguendo nella trattazione del CdP.

L'estensione del Teorema delle Probabilità Totali al caso di tre eventi A, B, C è la seguente:

$$\boldsymbol{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)}$$

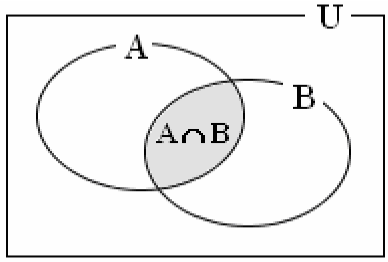
che diventa semplicemente

$\boldsymbol{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)}$ se A, B, C sono **a due a due incompatibili**

7.2 - Teorema sulla probabilità dell'evento intersezione (detto "teorema delle probabilità composte")

Sia U l'insieme universo dei casi equipossibili, e siano $A \subseteq U$, $B \subseteq U$.
Avremo

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} \cdot \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = p(A) \cdot p(B/A)$$



E in modo del tutto analogo si potrebbe ottenere

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$$

Resta così dimostrato il notevole

TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE:

$$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)}$$

Se A, B sono stocasticamente indipendenti la formula diventa semplicemente

$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$ **TEOREMA DELLE PROB. COMPOSTE PER EVENTI INDIPENDENTI**

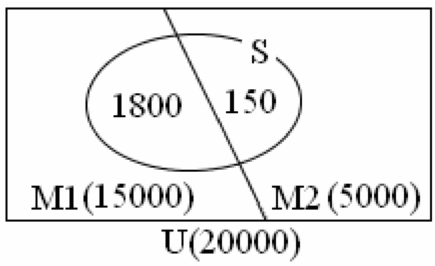
- **Esempio**
  **Due macchine M1 ed M2 di un'officina producono complessivamente 200 copie all'ora di un certo articolo.
  La macchina M1 è più veloce perché produce 150 pezzi all'ora, ma di questi mediamente il 12% è di scarto;
  la produzione della M2 è invece soltanto di 50 pezzi all'ora, ma lo scarto è irrisorio: solo il 3%.
  I pezzi prodotti sono stati immagazzinati tutti insieme, cosicché non ci è possibile stabilire quali provengano dalla M1 e quali dalla M2.
  Se preleviamo un pezzo a caso dal magazzino, qual è la probabilità che provenga dalla macchina M2 e sia di scarto?**

1° modo di risolvere (col teorema delle probabilità composte)

Poniamo
M2 = "il pezzo prelevato proviene dalla macchina M2"
S = "il pezzo prelevato è di scarto".

Avremo: $p(M2 \cap S) = p(M2) \cdot p(S/M2) = \frac{50}{200} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{400}$

2° modo di risolvere (senza teoremi, con visione "frequentista")
Dopo 100 ore di produzione, la situazione del magazzino sarà, pressappoco, quella illustrata nella figura.
Osservandola si ha subito $p(M2 \cap S) = 150/20000 = 3/400$



Una CONSEGUENZA IMPORTANTE DEL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE è:

♥ $$\boldsymbol{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Questa formula viene utilizzata sovente, in Calcolo delle Probabilità.

- **Esempio**
  a) Se, lanciando due dadi, la somma dei punteggi ottenuti è 8, calcolare la probabilità che uno dei due esiti sia stato "6".
  b) Quanto varrebbe la probabilità richiesta se al posto di una somma uguale a 8 considerassimo una somma uguale a 9, 10, 11 rispettivamente?

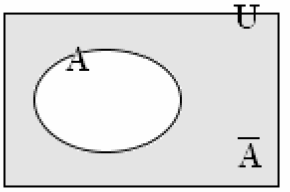
a) Casi possibili: (4, 4); (3, 5); (5, 3); (2, 6); (6, 2); casi favorevoli: (2, 6); (6, 2); $p = 2/5$

oppure: $p(6/\mathit{somma}\ 8) = \dfrac{p(6 \cap \mathit{somma}\ 8)}{p(\mathit{somma}\ 8)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \dfrac{2}{5}$

b) Per il 9: $p = 1/2$; per il 10: $p = 2/3$; per l'11: $p = 1$

7.3 - Teorema sulla probabilità dell'evento contrario

Sia U l'insieme universo dei casi equipossibili, e sia $A \subseteq U$.



Utilizzando il simbolo di "soprallineatura" che, com'è noto,
può essere impiegato coi due significati (strettamente correlati) di

- **NEGAZIONE (in Logica)**
- **COMPLEMENTAZIONE (in Teoria degli Insiemi)**

possiamo indicare con $\overline{A}$ l'evento contrario dell'evento A
(ossia quell'evento che si verifica se e solo se NON si verifica A).

La scrittura $\overline{A}$ verrà letta "non A" se interpretata dal punto di vista logico,
mentre verrà letta "il complementare di A"
(ma si può dire tranquillamente "non A" pure in questo caso)
se interpretata in chiave insiemistica.

Abbiamo

$$p(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(U)} = \frac{n(U) - n(A)}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)} - \frac{n(A)}{n(U)} = 1 - \frac{n(A)}{n(U)} = 1 - p(A)$$

e resta così dimostrato un enunciato semplice ma spesso estremamente utile negli esercizi,
che avevamo già anticipato nelle pagine precedenti, ovvero il

TEOREMA SULLA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A})$$

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

PIU' IN GENERALE,

qualora sia $X \subseteq Y$, si ha $p(Y - X) = p(Y) - p(X)$

(la semplicissima dimostrazione è analoga a quella sul Teorema dell'Evento Contrario)

- **Esempio**
  Si lancia successivamente per 10 volte una moneta,
  e si vuole sapere la probabilità che esca almeno una volta "testa".

Questo problema si risolve molto più agevolmente se si considera l' "evento contrario":
"non esce mai testa", ossia: "esce sempre croce".
E' molto facile stabilire la probabilità di questo evento contrario;
c'è infatti un unico caso favorevole ossia (C, C, C, C, C, C, C, C, C, C) sui $2^{10} = 1024$ casi possibili.
Quindi avremo

$$p(\text{esce sempre "Croce"}) = 1/1024$$

da cui, in virtù del teorema sopra dimostrato,

$$p(\text{esce almeno una volta "Testa"}) = 1 - p(\text{esce sempre "Croce"}) = 1 - 1/1024 = 1023/1024$$

IDEA-GUIDA
In generale, in moltissimi quesiti di CdP in cui compare la parola "almeno",
è conveniente passare all'evento contrario.

La parola "almeno" è una "parola-spia" in CdP:
essa ci deve sempre indurre a riflettere se sia conveniente utilizzare
il Teorema dell'Evento Contrario …
e quasi sempre la convenienza c'è.

7.4 - ESERCIZI

1) In uno "spazio degli eventi" U, un evento E_1 ha probabilità 0,25 di verificarsi.
Un secondo evento E_2 si verifica con probabilità 0,48.
I due eventi non possono verificarsi simultaneamente: uno esclude l'altro, sono incompatibili.
Determinare la probabilità degli eventi:
a) $E_1 \cup E_2$ b) $E_1 \cap E_2$ c) $\overline{E_1}$ d) $\overline{E_2}$ e) $\overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ f) $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

2) In uno "spazio degli eventi" U, un evento E_1 ha probabilità 0,25 di verificarsi.
Un secondo evento E_2 si verifica con probabilità 0,48.
I due eventi sono compatibili: c'è una probabilità uguale a 0,1 che si verifichino simultaneamente.
I) Determinare la probabilità degli eventi: a) $E_1 \cup E_2$ b) $E_1 \cap E_2$ c) $\overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ d) $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$
II) Nel caso si verifichi E_1, la probabilità che si verifichi anche E_2 cambia o resta invariata?
III) Nel caso si verifichi E_2, che probabilità c'è che si verifichi anche E_1?

3) In uno "spazio degli eventi" U, un evento E_1 ha probabilità 0,5 di verificarsi.
Un secondo evento E_2 si verifica con probabilità 0,7;
ma qualora si verifichi E_1, la probabilità di E_2 scende a 0,4.
Determinare la probabilità che E_1 ed E_2 si verifichino simultaneamente.

4) A, B, C sono tre eventi, in uno stesso "insieme universo" U.
Conoscendo $p(A)=0{,}3;\ p(B)=0{,}4;\ p(C)=0{,}5;\ p(A\cap B)=p(A\cap C)=p(B\cap C)=0{,}08$
e sapendo che almeno uno dei tre eventi si deve certamente verificare, determina qual è
a) la probabilità che i tre eventi A, B, C si verifichino tutti e tre simultaneamente
b) la probabilità che si verifichino sia A che B, ma non C

5) Si lanciano due dadi. Ricordando che la probabilità che la somma dei due punteggi dia 8 è uguale a 5/36, determinare la probabilità dell'evento: "i due esiti sono uguali fra loro, oppure danno per somma 8"

6) Ricordando che nel lancio di due dadi, la probabilità massima per la somma dei due punteggi è 7 ($p=6/36$) mentre le probabilità che la somma dei due punteggi valga 6 oppure 8 sono entrambe uguali a 5/36, determinare la probabilità che tale somma non valga né 6, né 7, né 8.

7) In un banco di beneficenza coi biglietti numerati da 100 a 999, sono vincenti i biglietti che portano un multiplo di 12, oppure un numero che abbia "0" come terza cifra, nonché tutti i numeri maggiori di 900. Se acquisto un biglietto, che probabilità ho di perdere?

RISPOSTE

1) *a)* $p(E_1\cup E_2)=p(E_1)+p(E_2)=0,25+0,48=0,73$ (*eventi incompatibili* !) *b)* $p(E_1\cap E_2)=0$
c) $p\left(\overline{E_1}\right)=1-p(E_1)=1-0,25=0,75$ *d)* $p\left(\overline{E_2}\right)=1-p(E_2)=1-0,48=0,52$
e) $p\left(\overline{E_1}\cup\overline{E_2}\right)=p\left(\overline{E_1\cap E_2}\right)=1-p(E_1\cap E_2)=1-0=1$ (*leggi di De Morgan*)
f) $p\left(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\right)=p\left(\overline{E_1\cup E_2}\right)=1-p(E_1\cup E_2)=1-0,73=0,27$ (*leggi di De Morgan*)

2) I) a) $p(E_1\cup E_2)=p(E_1)+p(E_2)-p(E_1\cap E_2)=0,25+0,48-0,10=0,63$ b) $p(E_1\cap E_2)=0,1$
c) $p\left(\overline{E_1}\cup\overline{E_2}\right)=p\left(\overline{E_1\cap E_2}\right)=1-p(E_1\cap E_2)=1-0,1=0,9$ (*leggi di De Morgan*)
d) $p\left(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\right)=p\left(\overline{E_1\cup E_2}\right)=1-p(E_1\cup E_2)=1-0,63=0,37$ (*leggi di De Morgan*)
II) $p(E_2/E_1)=\dfrac{p(E_2\cap E_1)}{p(E_1)}=\dfrac{p(E_1\cap E_2)}{p(E_1)}=\dfrac{0,1}{0,25}=0,4$. Cambia! III) $p(E_1/E_2)=\dfrac{p(E_1\cap E_2)}{p(E_2)}=\dfrac{0,1}{0,48}\approx 0,2$

3) $p(E_1\cap E_2)=p(E_1)\cdot p(E_2/E_1)=0,5\cdot 0,4=0,2$

4) a) $1=p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$ da cui
$p(A\cap B\cap C)=p(A\cup B\cup C)-p(A)-p(B)-p(C)+p(A\cap B)+p(A\cap C)+p(B\cap C)=\ldots=0,04$
b) $p((A\cap B)-C)=p((A\cap B)-(A\cap B\cap C))\underset{\text{NOTA}}{=}0,08-0,04=0,04$ (NOTA: *dato che* $A\cap B\cap C\subseteq A\cap B$)

5) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=6/36+5/36-1/36=10/36$ 6) $p=1-(6/36+5/36+5/36)=20/36$

7) $M=\{\textit{multipli di } 12 \textit{ fra } 100 \textit{ e } 999\}$; $Z=\{\textit{numeri fra } 100 \textit{ e } 999 \textit{ con ultima cifra } 0\}$; $G=\{\textit{numeri fra } 901 \textit{ e } 999\}$
$p(M)=\dfrac{75}{900};\ p(Z)=\dfrac{90}{900};\ p(G)=\dfrac{99}{900};\ p(M\cap Z)=\dfrac{15}{900};\ p(M\cap G)=\dfrac{8}{900};\ p(Z\cap G)=\dfrac{9}{900};\ p(M\cap Z\cap G)=\dfrac{1}{900}$
$p(\textit{vincere})=p(M\cup Z\cup G)=p(M)+p(Z)+p(G)-p(M\cap Z)-p(M\cap G)-p(Z\cap G)+p(M\cap Z\cap G)=$
$=\dfrac{75}{900}+\dfrac{90}{900}+\dfrac{99}{900}-\dfrac{15}{900}-\dfrac{8}{900}-\dfrac{9}{900}+\dfrac{1}{900}=\dfrac{233}{900};\ \ p(\textit{perdere})=p(\overline{M\cup Z\cup G})=1-p(M\cup Z\cup G)=1-\dfrac{233}{900}=\dfrac{667}{900}$

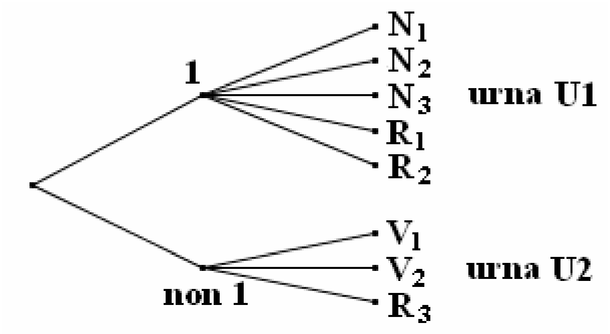
8 - EVENTI A DUE (O PIU') FASI

8.1 - Il Teorema relativo agli "eventi a due fasi"

- **Esempio**

  Lancio un dado.
  Se esce 1 pesco una pallina da un'urna U1 che contiene 3 palline Nere e 2 Rosse.
  Se esce un numero diverso da 1 pesco invece da un'urna U2 contenente 2 palline Verdi e 1 Rossa.
  Si chiede: con una "prova" di questo tipo, qual è la probabilità di estrarre una pallina

  a) Nera?
  b) Rossa?
  c) Verde?



La difficoltà di questo problema sta nel fatto che i casi

$$(1, N_1) \quad (1, N_2) \quad (1, N_3) \quad (1, R_1) \quad (1, R_2) \quad (\text{non}1, V_1) \quad (\text{non}1, V_2) \quad (\text{non}1, R_3)$$

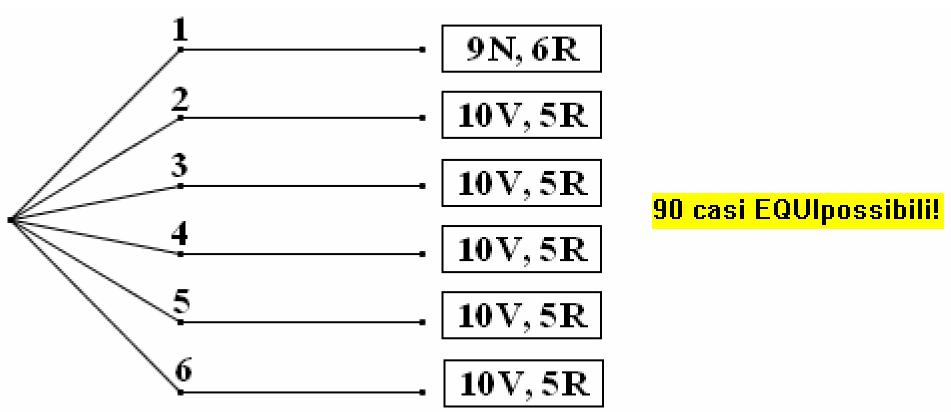
NON sono equipossibili !!!

Viene subito in mente di passare al nuovo insieme di casi

$$\begin{array}{lllll}
(1, N_1) & (1, N_2) & (1, N_3) & (1, R_1) & (1, R_2) \\
(2, V_1) & (2, V_2) & (2, R_3) & & \\
(3, V_1) & (3, V_2) & (3, R_3) & & \\
(4, V_1) & (4, V_2) & (4, R_3) & & \\
(5, V_1) & (5, V_2) & (5, R_3) & & \\
(6, V_1) & (6, V_2) & (6, R_3) & &
\end{array}$$

ma nemmeno questi sarebbero equipossibili !!!

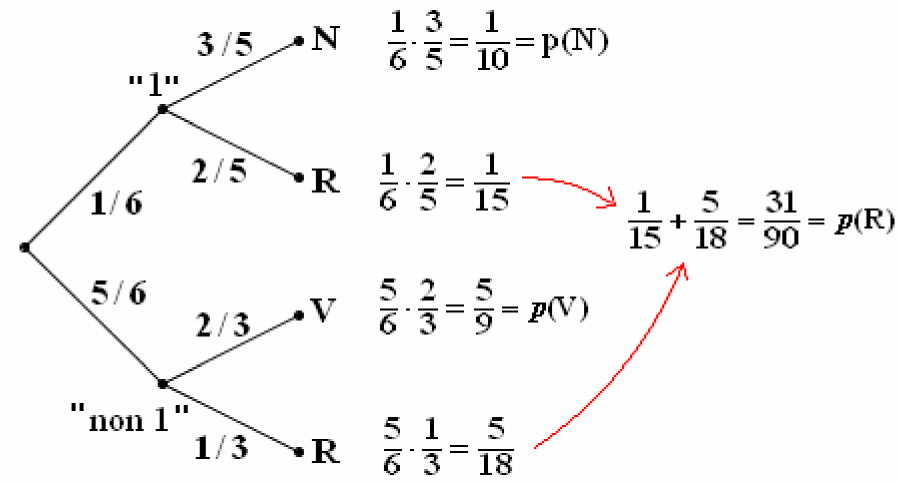
Riusciamo però a ottenere un "set" di casi equipossibili se applichiamo il seguente artificio:
supponiamo di avere, nell'urna **U1, 15 palline anziché 5**: 9 Nere, 6 Rosse
e nell'urna **U2, 15 palline anziché 3**: 10 Verdi, 5 Rosse.
La nuova prova sarà probabilisticamente equivalente alla precedente (giusto? ne sei convinto?)
ma questa volta i casi
(i $\mathbf{6 \cdot 15 = 90}$ **casi** !)
saranno tutti **equipossibili** !!!



Avremo dunque

p(N) = 9/90 = 1/10
p(R) = 31/90
p(V) = 50/90 = 5/9

cosicché, osservando il seguente diagramma, siamo condotti ad una scoperta assai interessante:



Insomma, per quanto riguarda la prova aleatoria a due fasi da noi considerata,
la probabilità di percorrere un "cammino"
(pensiamo ad esempio al cammino "1 dal dado E POI pallina Nera dall'urna")
risulta calcolabile mediante un prodotto di due probabilità:
le probabilità dei singoli segmenti che costituiscono il cammino

Osserviamo che la seconda di queste due probabilità è una probabilità "condizionata"
(ad esempio, il fattore 2/5 che compare nel diagramma è la
"probabilità che esca Rossa dall'urna, SUPPOSTO CHE fosse uscito 1 dal lancio del dado).

In effetti è possibile dimostrare che questo fatto è di validità del tutto generale, ossia che sussiste il seguente

TEOREMA SULLA PROBABILITA' DI UN EVENTO,
COSTITUITO DALLA SUCCESSIONE O DALL'ABBINAMENTO DI DUE "EVENTI PARZIALI"
(IN BREVE: PROBABILITA' DI UN "EVENTO A DUE FASI")

Se una prova aleatoria si articola in due parti o fasi,
cosicché l'evento di cui vogliamo valutare la probabilità si possa pensare costituito
dalla successione, o comunque dall'abbinamento, di due "eventi parziali" A, B
(evento "A e poi B"),
allora:

$$\boxed{p(\text{A e poi B}) = p(\text{A})\cdot p(\text{B/A})}$$

cioè:
la probabilità di "A e poi B" è uguale al prodotto
della probabilità di A
per la probabilità di B, supposto che si sia verificato A.

La dimostrazione generale di questo enunciato, che è riportata più avanti, consiste nella generalizzazione di quanto fatto in relazione all'esempio introduttivo, che ha portato alla "scoperta" del Teorema.

Nel caso A, B siano stocasticamente indipendenti,
cioè tali che il verificarsi dell'uno non modifichi la probabilità del verificarsi dell'altro, allora
$$p(\text{A e poi B}) = p(\text{A})\cdot p(\text{B})$$

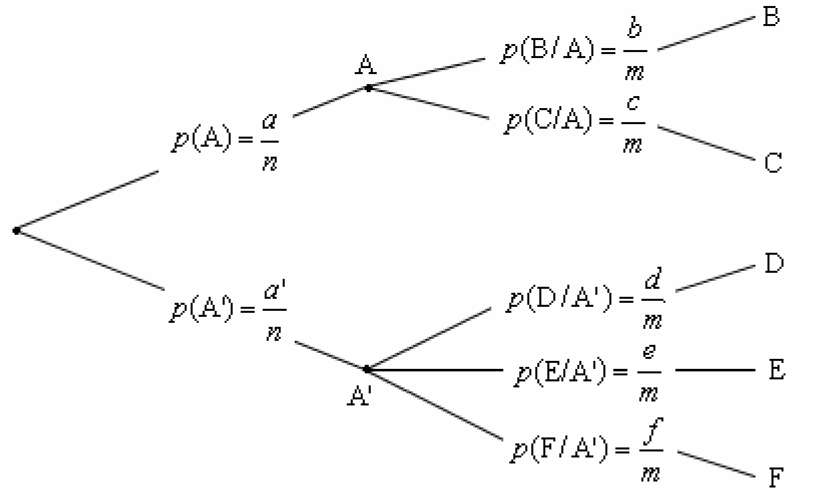
In un grafo ad albero, quanto detto si può tradurre nella seguente comodissima REGOLA:

♥ LA PROBABILITÀ DI UN CAMMINO È UGUALE AL PRODOTTO
DELLE PROBABILITÀ DEI SINGOLI TRATTI CHE COSTITUISCONO IL CAMMINO
(s'intende che se un segmento rappresenta un "ramo secondario",
la probabilità di percorrerlo è da intendersi come probabilità condizionata, cioè come probabilità di percorrere quel tratto, supponendo di essere già giunti all'inizio del segmento stesso).

8.2 - Dimostrazione del Teorema sugli “eventi a due fasi”

Il procedimento dimostrativo consiste nella generalizzazione di quanto fatto nell’esempio introduttivo: passaggio ad una prova modificata, probabilisticamente equivalente a quella di partenza, con lo scopo di ricondursi ad un insieme di casi tutti equipossibili.

Il grafo sottostante mostra la struttura di una generica prova aleatoria a due fasi;
A, A', B, C, D, E, F rappresentano generici eventi.



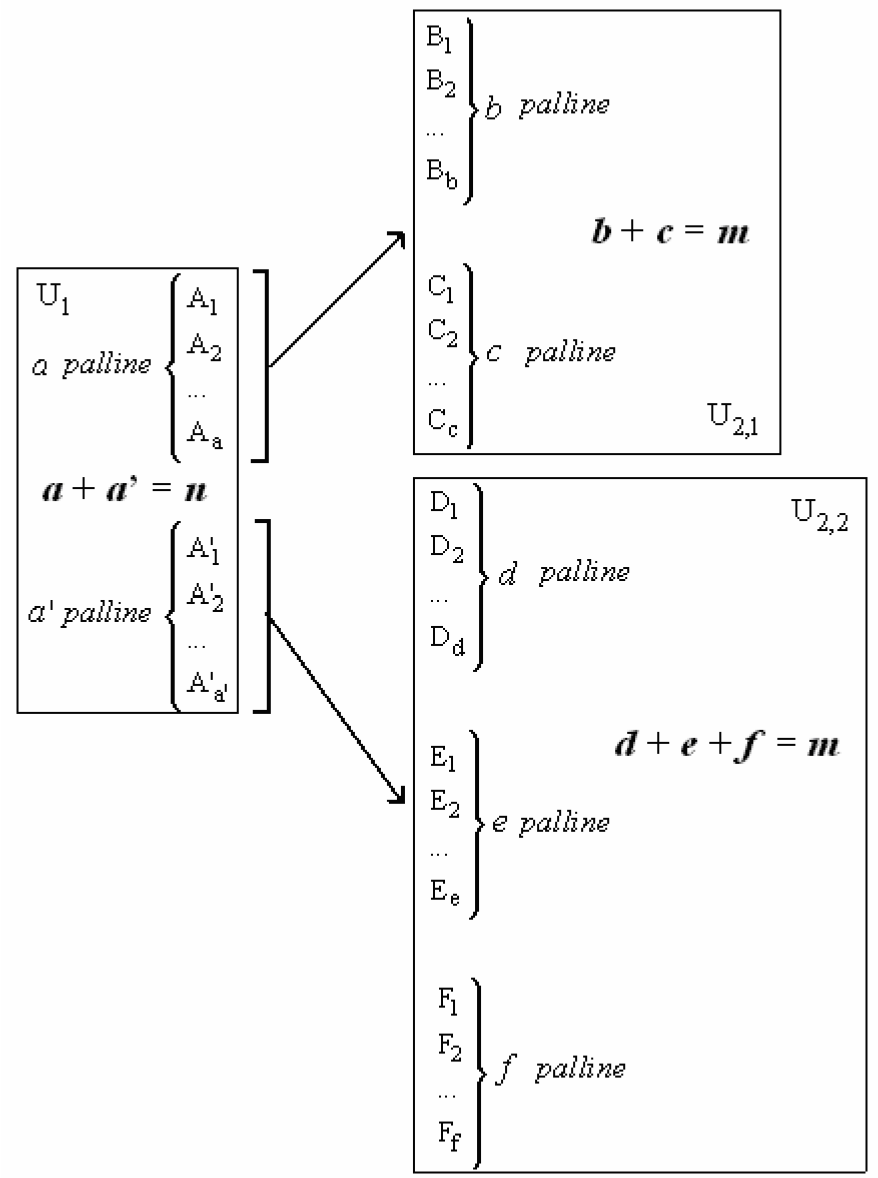
Di ciascun evento è specificata la probabilità (eventualmente, "probabilità condizionata").
Per semplicità, ho supposto che si abbiano 2 esiti possibili per la prima fase (o "prima prova parziale") e 2+3 esiti possibili per la seconda fase (= "seconda prova parziale").
E' chiaro però che la dimostrazione sarebbe facilmente generalizzabile a situazioni diverse, comunque complicate.
Il fatto che le probabilità $p(\mathrm{A})$ e $p(\mathrm{A'})$ siano espresse da due frazioni con lo stesso denominatore n non è restrittivo, voglio dire: non riflette un caso particolare,
perché comunque, se i due denominatori di $p(\mathrm{A})$ e $p(\mathrm{A'})$ fossero diversi,
io potrei sempre ridurre tali due frazioni al minimo comun denominatore.
Analogo discorso vale per le cinque probabilità $p(\mathrm{B}/\mathrm{A}),\ p(\mathrm{C}/\mathrm{A}),\ p(\mathrm{D}/\mathrm{A'}),\ p(\mathrm{E}/\mathrm{A'}),\ p(\mathrm{F}/\mathrm{A'})$:
le suppongo espresse da cinque frazioni con lo stesso denominatore m
(se così non fosse, potrei sempre ricondurmi a questa situazione portando le cinque frazioni al m.c.d.).
Osserviamo che, per ovvi motivi, i numeri interi a, a', b, c, d, e, f sono tali da realizzare le uguaglianze
$a+a'=n,\ \ b+c=m,\ \ d+e+f=m$.
Si tratta dunque di dimostrare (TESI) che $p(\mathrm{A}\ e\ poi\ \mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A})$,
tanto per prendere un’uguaglianza qualsiasi fra le 5 dello stesso tipo.

Poiché gli esiti possibili della prima fase sono:
A con probabilità a/n e A' con probabilità a'/n,
possiamo concepire la prima fase come estrazione di una pallina da un'urna contenente n palline,
su a delle quali ci sia la scritta "A" e sulle rimanenti a' la scritta " A' ".

E analogamente per la seconda fase.

Quindi la nostra "prova a due fasi" potrà, in definitiva, essere considerata equivalente,
dal punto di vista delle valutazioni di probabilità, alla prova descritta come segue:

- si estrae una pallina da un'urna contenente $n=a+a'$ palline,
  su a delle quali compare la scritta "A" mentre sulle rimanenti a' palline compare la scritta " A' "
- se l'esito di questa estrazione è "A", allora si pesca da un'urna con la seguente composizione:
  - m palline in totale;
  - b palline con la scritta "B",
  - c palline con la scritta "C"
- se invece l’esito della prima estrazione è " A' ", allora si va a pescare da un'urna diversa, contenente:
  - m palline in totale;
  - d palline con la scritta "D",
  - e palline con la scritta "E",
  - f palline con la scritta “F”.



(Sei convinto del fatto che la prova originaria
e la "prova modificata", quella con le urne e le palline,
sono probabilisticamente equivalenti?
Solo se la tua risposta è affermativa puoi accettare il presente procedimento dimostrativo ...)

Dunque:

i casi possibili sono

$$a\cdot(b+c)+a'\cdot(d+e+f)=a\cdot m+a'\cdot m=(a+a')\cdot m=n\cdot m$$

Essi appaiono tutti equipossibili (ne sei convinto?)

I casi favorevoli al verificarsi dell'evento "A e poi B" sono $a\cdot b$.

La probabilità dell'evento "A e poi B" è data dal rapporto

$$\frac{n°\ casi\ \ favorevoli}{n°\ casi\ \ possibili}$$

quindi

$$p(\text{A}\ e\ \ poi\ \ \text{B})=\frac{a\cdot b}{n\cdot m}=\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}=p(\text{A})\cdot p(\text{B}/\text{A})$$

come volevasi dimostrare.

- **Esempio 1**

Da un'urna con 5 palline Rosse e 10 Nere si estraggono, una dopo l'altra e senza reimbussolamento, due palline; determinare la probabilità che siano entrambe Rosse.

Si tratta di un **EVENTO "A DUE FASI"**, per cui $p(\mathrm{A}\ e\ poi\ \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B/A}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$

E' $p(\mathrm{B/A}) = \frac{4}{14}$ perché, se dall'urna è stata estratta una pallina Rossa, rimangono 14 palline, di cui 4 Rosse.

Si poteva procedere anche **contando i casi possibili**: $15 \cdot 14$ **e i favorevoli**: $5 \cdot 4$, da cui $p = \frac{5 \cdot 4}{15 \cdot 14} = \frac{2}{21}$

Conoscendo, poi, il Calcolo Combinatorio, si sarebbe potuto ragionare pensando a coppie non ordinate di palline, perché, evidentemente, la probabilità di pescare 2 Rosse non cambia se, anziché pescare una pallina dopo l'altra senza reimbussolare, si pescano in un colpo solo, simultaneamente, 2 palline!

$$p = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}}{\frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1}} = \frac{2}{21}$$

- **Esempio 2**

Se sia la professoressa di Latino che quella di Matematica pescheranno quest'oggi coi bigliettini per determinare il primo studente da interrogare in una classe di 20, che probabilità c'è per la timida Marinella di essere lei la vittima in entrambi i casi?

Pensandolo come un **EVENTO "A DUE FASI"**, con la fase A e la fase B *indipendenti* fra loro, si avrà

$$p(\mathrm{A}\ e\ poi\ \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$$

Si può anche rispondere **pensando direttamente al rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili**:

$p = \frac{1}{20 \cdot 20} = \frac{1}{400}$ dove $20 \cdot 20$ è il numero delle coppie ordinate che si possono ottenere dall'insieme dei 20 studenti (supponendo che il 2° elemento della coppia possa anche coincidere col 1°)

8.3 - "Regola della somma"; generalizzazione a più di due fasi

REGOLA DELLA SOMMA PER LE PROVE A DUE FASI:
in una "prova a due fasi", la probabilità dell'evento che si verifica se e solo se si verifica l'uno o l'altro di due eventi *INCOMPATIBILI* è la somma delle rispettive probabilità.

Ne omettiamo la dimostrazione (che si effettuerebbe tramite una "prova modificata" tipo quella di pag. 54).

NOTA - Osserviamo che un enunciato analogo a questa "regola della somma" era stato stabilito già in precedenza (teorema sulla probabilità dell'evento unione, o "teorema delle probabilità totali"); tuttavia, in quella circostanza si faceva riferimento ad uno spazio di eventi elementari equipossibili, mentre nelle "prove a due fasi" di cui ci stiamo occupando al presente, non abbiamo più tale condizione, che si recupera soltanto nel momento in cui si sostituisce la "prova originaria" con la "modificata". Di qui l'esigenza di una dimostrazione autonoma.

- **Esempio**

Come es. di applicazione di questa "regola della somma", riferiamoci ancora al dado e all'urna di pag. 52. Se venisse richiesta la "probabilità di estrarre una pallina Rossa", questa potrebbe essere calcolata come

$$p(\text{"1 } e \text{ } poi \text{ R"}) + p(\text{"non 1 } e \text{ } poi \text{ R"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{5}{18} = \frac{31}{90}$$

GENERALIZZAZIONE A PIU' DI DUE FASI

Il teorema sugli eventi a due fasi si può facilmente generalizzare al caso di eventi "a più fasi":

$$p(\mathrm{A1\ e\ poi\ A2\ e\ poi\ A3\ e\ poi\ ...}) = p(\mathrm{A1}) \cdot p(\mathrm{A2/A1}) \cdot p(\mathrm{A3/(A2\ e\ poi\ A1)}) \cdot ...$$

La "regola della somma" continua a valere anche nel caso in cui le fasi siano più di due.

- **Esempio**

Probabilità, estraendo 3 palline di seguito da un'urna con 4 Rosse e 4 Nere, che siano tutte e tre Rosse?

Vedendolo come EVENTO "A TRE FASI": $p(\mathrm{R}\ e\ poi\ \mathrm{R}\ e\ poi\ \mathrm{R}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{14}$.

In alternativa, se si conosce il **Calcolo Combinatorio**, dato che la probabilità resterebbe uguale se pensassimo di estrarre le 3 palline non una dopo l'altra, ma simultaneamente: $p = \binom{4}{3} \Big/ \binom{8}{3} = ... = \frac{1}{14}$

ESERCIZI

1a) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae a sorte l'urna da scegliere, e da questa si estrae una pallina.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, a) una Rossa b) una Verde

1b) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae una pallina da U1, e la si butta in U2; si estrae poi una pallina da U2.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, alla fine: a) una Rossa b) una Verde

1c) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae una pallina da U2, e la si butta in U1; si estrae poi una pallina da U1.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, alla fine: a) una Rossa b) una Verde

1d) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae una pallina da U1, la si mette da parte, e si versano le palline restanti nell'altra urna, da cui si estrae una pallina. Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, alla fine: a) una Rossa b) una Verde

2) Se da un'urna contenente 1 pallina Rossa e 6 palline Verdi si estraggono 4 palline una dopo l'altra, determinare la probabilità che siano tutte Verdi.

3) Si estraggono tre carte da un mazzo da scopa. Determinare la probabilità che siano tre "ori" (=denari, quadri)

4) In una classe con 8 ragazzi e 12 ragazze, la professoressa di Latino estrarrà a sorte, uno dopo l'altro, 3 "volontari" per le interrogazioni. Calcolare la probabilità che il primo sia un maschio seguito da 2 femmine.

5) Si lancia un dado per quattro volte di seguito e si domanda la probabilità che esca "4" almeno una volta.

6) Si lancia un dado per quattro volte di seguito e si domanda la probabilità che esca "4" una e una sola volta.

RISPOSTE

1a) $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{U1}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) + p(\mathrm{U2}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) = p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1}) + p(\mathrm{U2})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U2}) =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{13}{35};\quad p(\mathrm{V}) = 1 - p(\mathrm{R}) = \frac{22}{35}$

1b) $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{R}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) + p(\mathrm{V}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) = p(\mathrm{R\ da\ U1})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U2/R\ da\ U1}) + p(\mathrm{V\ da\ U1})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U2/V\ da\ U1}) =$
$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{8} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};\quad p(\mathrm{V}) = 1 - p(\mathrm{R}) = \frac{4}{5}$

1c) $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{R}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) + p(\mathrm{V}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) = p(\mathrm{R\ da\ U2})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U1/R\ da\ U2}) + p(\mathrm{V\ da\ U2})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U1/V\ da\ U2}) =$
$= \frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{6}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{21} + \frac{3}{7} = \frac{11}{21};\quad p(\mathrm{V}) = 1 - p(\mathrm{R}) = \frac{10}{21}$

1d) $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{R}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) + p(\mathrm{V}\ \textit{e poi}\ \mathrm{R}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{11} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{11} = \frac{17}{55};\quad p(\mathrm{V}) = 1 - p(\mathrm{R}) = \frac{38}{55}$

2) $p = \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{7}$ oppure, col Calcolo Combinatorio, pensando alle quaterne ordinate, $p = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{7\cdot6\cdot5\cdot4} = \frac{3}{7}$

Si può anche immaginare di estrarre le palline tutte assieme anziché in successione; la probabilità che risultino tutte Verdi non cambierebbe; in questo caso, le quaterne verrebbero pensate NON ordinate $\rightarrow$ $p = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{7}{4}} = \frac{\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{3}{7}$

3) Pensare di estrarle simultaneamente o una dopo l'altra è indifferente dal punto di vista della probabilità. Se pensiamo a tre estrazioni successive potremo applicare il teorema dell'evento a più fasi e avremo: $\rightarrow$ $p = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38} \approx 0{,}012$

Pensando invece all'estrazione di 3 carte simultaneamente, col Calcolo Combinatorio otterremo: $\rightarrow$ $p = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2\cdot1}} \approx 0{,}012$

4) Come evento a tre fasi: $p(\mathrm{MFF}) = \frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{11}{18} = \frac{44}{285} \approx 0{,}15$. Col Calcolo Combinatorio: $p = \frac{8\cdot12\cdot11}{20\cdot19\cdot18}$

5) $p(\text{"4"}\ \textit{almeno una volta}) = 1 - p(\textit{mai}\ \text{"4"}) = 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 1 - \frac{625}{1296} \approx 0{,}52$

6) $p = p(4\overline{444}) + p(\overline{4}4\overline{44}) + p(\overline{44}4\overline{4}) + p(\overline{444}4) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324}$

9 - OSSERVAZIONI UNIFICANTI

Il Teorema sugli Eventi a Due Fasi porta a una formula, $p(\text{A e poi B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A})$, che richiama quella relativa al Teorema delle Probabilità Composte: $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A})$.

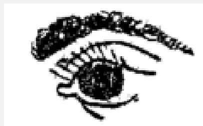
Se consideriamo il fatto che “$\cap$” viene spesso letto “ET” ($\wedge$), per il fatto che l’intersezione insiemistica ($\cap$) è strettissimamente legata alla congiunzione logica ($\wedge$), possiamo in definitiva scrivere la TERNA DI FORMULE

I) $p(\text{A e poi B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A})$
II) $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A})$
III) $p(\text{A} \wedge \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A})$

dove L’ULTIMA CONDENSA LE PRIME DUE, nel senso che quell’ “$\wedge$” potrà essere interpretato, a seconda dei casi, come “$\cap$” oppure come “e poi”.

- **Anche la relazione $p(\text{A/B}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{B})}$ (pag. 49) si può riscrivere con il simbolo $\wedge$:**

  così facendo, essa diventa $\boxed{p(\text{A/B}) = \dfrac{p(\text{A} \wedge \text{B})}{p(\text{B})}}$



  e in essa “$\wedge$” potrà essere interpretato come indicante intersezione (“$\cap$”) oppure successione temporale (“A e poi B” o “B e poi A” a seconda dei casi).

Per l'occasione, tengo a segnalare che parecchi libri di testo, occupandosi di calcolo delle probabilità, tendono a IDENTIFICARE i due teoremi

I. $p(\text{A e poi B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B/A})$ II. $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B/A})$

mentre in realtà si tratta di teoremi BEN DISTINTI !

E sovente viene dimostrato II), mentre I) non viene nemmeno citato, perché confuso con l’altro!!!
E’ infatti facile leggere un “e poi” semplicemente come “e”, quindi interpretare (erroneamente!) quella congiunzione “e” come indicante “intersezione” e non “abbinamento”.
Purtroppo quasi tutti i testi mostrano una certa superficialità a questo proposito.
Ma nel caso “A e poi B”, come si fa a parlare di “intersezione” quando A, B NON sono sottoinsiemi di uno stesso insieme universo?!?!
E’ vero che la confusione concettuale in cui rimane appiattita la maggior parte dei testi non ha poi conseguenze pratiche, in quanto il risultato finale è poi fortuitamente esatto in virtù dell’analogia fra I), II) e III); ma l’impostazione è comunque sbagliata!

Va detto che **a volte la situazione “A e poi B” può essere ricondotta ad “$\text{A} \cap \text{B}$”.**
Ad esempio, consideriamo il problema: *si estraggono due palline (senza reimbussolamento) da un’urna contenente 4 Bianche e 3 Nere; che probabilità c’è che siano entrambe Nere*?

Qui potremo, indifferentemente, pensare

- *all’**evento a due fasi** “A e poi B”* avendo noi posto
  A = “Siamo alla 1ª estrazione; esce una Nera”
  B = “Siamo alla 2ª estrazione, nell’urna non c’è più la pallina estratta precedentemente; esce una Nera”
- *o all’**intersezione** fra i due eventi*:
  E1 = “esce una pallina Nera alla prima estrazione e una pallina di colore qualsiasi alla seconda”
  E2 = “esce una pallina di colore qualsiasi alla prima estrazione e una pallina Nera alla seconda”
  (osserviamo che E1, E2 sono due insiemi di coppie ordinate!)

Ma non sempre ciò è realizzabile …
… Ad esempio, prendendo il problema del dado e delle urne di pagina 52, con riferimento, per fissare le idee, all’uscita di una Nera, se tentassimo di interpretarlo in un’ottica di intersezione non ci riusciremmo, perché senza il ricorso alla “prova modificata” non si ha un insieme universo in cui i casi siano fra loro equipossibili.

Analogamente a quanto osservato riguardo al connettivo “et”, possiamo ancora rilevare che il legame fra l’operazione insiemistica di unione ($\cup$) e il connettivo logico di disgiunzione (VEL, $\vee$) consente di dare al Teorema delle Probabilità Totali una qualsiasi delle due formulazioni alternative:

$\boxed{p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B})}$

e in particolare, se A e B sono incompatibili, $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$

$\boxed{p(\text{A} \vee \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \wedge \text{B})}$

e in particolare, se A e B sono incompatibili, $p(\text{A} \vee \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$

Nella successiva rassegna di esercizi svolti 1 … 18, emergono ripetutamente le tematiche di questo paragrafo.

10 - ESERCIZI SVOLTI

Esercizio 1
La probabilità che un tiratore A colpisca il bersaglio è 1/2, la probabilità che lo colpisca B è 1/5.
Se A e B sparano contemporaneamente contro il bersaglio, che probabilità c'è che questo venga colpito?

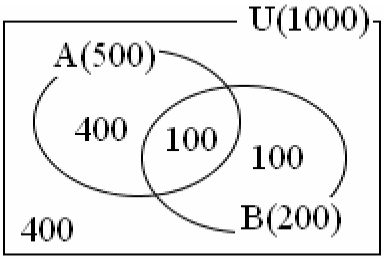
Risoluzione

$$p = p(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \underset{\text{NOTA}}{=}$$

$$= p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

NOTA
A, B sono indipendenti
e quindi
$p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = p(\mathrm{B})$

Per inquadrare il problema in modo da sentirci effettivamente autorizzati ad applicare i Teoremi studiati, possiamo osservare che mediamente ogni 1000 prove (dove per "prova" si deve intendere "doppio tiro"), 500 volte colpisce il bersaglio A, 200 volte B.
Supponiamo che qualcuno registri gli esiti di una sequenza di 1000 "doppi tiri" e scriva ogni singolo esito (che potrà essere: "nessuno"; "solo A"; "solo B"; "sia A che B") su di un bigliettino: si avranno quindi 1000 bigliettini.
Pescando un bigliettino a caso, ci chiediamo che probabilità c'è di trovarvi scritto almeno uno dei due nomi A o B.
Tracciamo un diagramma di Venn che rappresenti questo insieme di 1000 bigliettini con i suoi sottoinsiemi: comprenderemo in modo realmente efficace la situazione probabilistica considerata. Dunque:



E' evidente che abbiamo posto circa 500 bigliettini nell'insieme A, per il fatto che il tiratore A fa centro con probabilità 1/2, quindi su 1000 tentativi ne azzeccherà pressappoco 500.
Analogamente è immediato comprendere come l'insieme B debba avere (all'incirca) $1/5 \cdot 1000 = 200$ elementi.

Potrai chiederti invece come mai abbiamo collocato proprio 100 bigliettini in $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Se ti rispondessi che questo viene dalla relazione
$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$
la quale poi, data l'indipendenza stocastica fra gli eventi A e B
(supponiamo che le prestazioni di un tiratore non influenzino quelle dell'altro), diventa
$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}),$$
non sarei, immagino, convincente come conto invece di esserlo col ragionamento seguente.

Rifletti su questo fatto:
il tiratore A va a segno mediamente 1 volta su 2, giusto?
Bene! Consideriamo esclusivamente quei circa 200 "doppi tiri" in cui è andato a segno B.
Nell'ambito di questi circa 200 "doppi tiri", i centri di A saranno pressappoco la metà, quindi circa 100.
Perciò A e B fanno centro entrambi simultaneamente per circa 100 volte.
D'altronde, se, simmetricamente, noi confiniamo la nostra attenzione esclusivamente sui (circa) 500 "doppi tiri" in cui ha centrato il bersaglio A, cosa possiamo dire riguardo alla prestazione di B nell'ambito di questo gruppo di prove?
Sappiamo che B, quando tira, ci azzecca in media 1 volta su 5, quindi, fra le 500 prove considerate, avrà fatto centro pressappoco $1/5 \cdot 500 = 100$ volte.

E allora effettivamente sarà
$$n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 100 \text{ (più correttamente: } \textit{circa } 100)$$

I rimanenti numeri che figurano nel diagramma di Venn sono stati poi ricavati per differenza:
$$n(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 500 - 100 = 400$$
$$n(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = 200 - 100 = 100$$
$$n(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = 1000 - 400 - 100 - 100 = 400$$

A questo punto, la semplice osservazione del diagramma consente di calcolare, con **visione "frequentista"**, la probabilità richiesta:

$$p(\textit{bersaglio colpito}) = \frac{400 + 100 + 100}{1000} = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$$

Esercizio 2
Supponiamo che da indagini statistiche si tragga
che la probabilità per un gatto di vivere 12 anni è $\frac{1}{4}$, per un cane $\frac{1}{3}$.
Se posseggo un cagnetto e un gattino appena nati, stabilire in tal caso qual è la probabilità che:

a) siano entrambi vivi fra 12 anni;
b) almeno uno sia vivo fra 12 anni;
c) nessuno dei due sia vivo fra 12 anni

Risoluzione

Poniamo

C = "il cane sarà vivo fra 12 anni",
G = "il gatto sarà vivo fra 12 anni".

Avremo:

a) $p(\mathrm{C} \wedge \mathrm{G}) = p(\mathrm{C}) \cdot p(\mathrm{G}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
(probabilità composte per eventi indipendenti)

b) $p(\mathrm{C} \vee \mathrm{G}) = p(\mathrm{C}) + p(\mathrm{G}) - p(\mathrm{C} \wedge \mathrm{G}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$
(probabilità totali per eventi compatibili; probabilità composte per eventi indipendenti)

c) $p(\overline{\mathrm{C}} \wedge \overline{\mathrm{G}}) = p(\overline{\mathrm{C} \vee \mathrm{G}}) = 1 - p(\mathrm{C} \vee \mathrm{G}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
dove abbiamo sfruttato le importantissime FORMULE DI DE MORGAN,
le quali, come dovrebbe essere noto,
hanno una versione "insiemistica" e una versione "logica"
e che qui di seguito andiamo a ripassare:

FORMULE DI DE MORGAN

$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$ *in Insiemistica*, $\overline{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}}$ *in Logica*

$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$ *in Insiemistica*, $\overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \vee \overline{\mathrm{B}}$ *in Logica*

dove **la soprallineatura**
significa "complementazione", ossia "passaggio all'insieme complementare", in Insiemistica
e significa "negazione" in Logica.
Osserviamo che nelle versioni "logiche" delle formule il simbolo " = " va letto "logicamente equivalente".

Risoluzione alternativa dello stesso problema del Cane e del Gatto, parte c):

$$p(\overline{\mathrm{C}} \wedge \overline{\mathrm{G}}) = p(\overline{\mathrm{C}}) \cdot p(\overline{\mathrm{G}}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo tenuto conto che

$$p(\overline{\mathrm{C}}) = 1 - p(\mathrm{C}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

e

$$p(\overline{\mathrm{G}}) = 1 - p(\mathrm{G}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e abbiamo potuto scrivere semplicemente $p(\overline{\mathrm{G}})$ anziché $p(\overline{\mathrm{G}} / \overline{\mathrm{C}})$
perché abbiamo ipotizzato l'indipendenza stocastica degli eventi
(sebbene a rigore ciò non sia necessariamente vero perché comunque gli animali sono molto sensibili).

Esercizio 3
Se si sa che

$$p(A)=\frac{1}{2},\quad p(B)=\frac{1}{3}\quad \text{e}\quad p(A\cap B)=\frac{1}{4}\qquad (A\subseteq U,\ \ B\subseteq U),$$

calcolare:

1) $p(A\cup B)$ **2)** $p(A/B)$ **3)** $p(B/A)$ **4)** $p(\overline{A}\cap B)$ **5)** $p(\overline{A}/B)$ **6)** $p(\overline{A}/\overline{B})$

Risoluzione

1) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

2) $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$

3) $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

4) $p(\overline{A}\cap B)=p(B-A)=p(B-(A\cap B))=p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

dove abbiamo utilizzato l'ovvia catena $\overline{A}\cap B=B-A=B-(A\cap B)$
(verificala con un diagramma di Venn!)
e abbiamo poi effettuato una sottrazione di due probabilità perché, evidentemente,

$$p(B-(A\cap B))=\frac{n(B-(A\cap B))}{n(U)}=\frac{n(B)-n(A\cap B)}{n(U)}=\frac{n(B)}{n(U)}-\frac{n(A\cap B)}{n(U)}=p(B)-p(A\cap B)$$

D'altronde, parlando, a pagina 50, di "evento contrario",
avevamo messo in rilievo che, in generale,
ogniqualvolta è $\mathbf{X\subseteq Y}$ (e, appunto, $A\cap B\subseteq B$ **),**
si ha sempre $\boldsymbol{p(Y-X)=p(Y)-p(X)}$**.**

Attenzione: se ci fossimo limitati a scrivere

$$p(\overline{A}\cap B)=p(B-A),$$

saremmo rimasti bloccati in un VICOLO CIECO,
in quanto NON avremmo poi potuto continuare scrivendo $p(B-A)=p(B)-p(A)$
perché, non essendo A sottoinsieme di B, NON vale la relazione $n(B-A)=n(B)-n(A)$.

5) $p(\overline{A}/B)=\dfrac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$

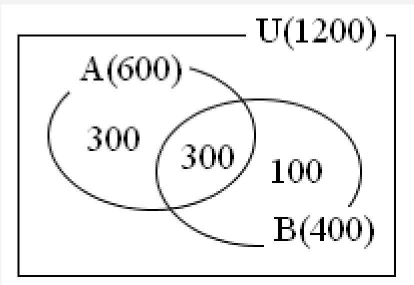
6) $p(\overline{A}/\overline{B})=\dfrac{p(\overline{A}\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\dfrac{p(\overline{A\cup B})}{p(\overline{B})}=\dfrac{1-p(A\cup B)}{1-p(B)}=\dfrac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$

Per capire bene questo Esercizio 3),
o eventualmente per svolgerlo con un procedimento alternativo,
è efficacissima una VISIONE FREQUENTISTA.

Ad esempio, un diagramma di Venn compatibile coi dati

$$p(A)=\frac{1}{2},\quad p(B)=\frac{1}{3}\quad \text{e}\quad p(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

è quello riportato qui a fianco,
dal quale è immediato trarre le risposte
ai precedenti quesiti 1) … 6).



Esercizio 4

Da un'urna contenente 7 palline numerate
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
si estraggono, UNA DOPO L'ALTRA E SENZA REIMBUSSOLAMENTO, due palline.
Calcola la probabilità che portino entrambe un numero pari,

a) interpretando la "prova" come un "evento a due fasi" ed applicando il teorema relativo
b) mediante (se conosci il Calcolo Combinatorio) il rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili

Risoluzione

a) Interpretando la prova come un evento a due fasi, avremo:

$$p(\text{"}entrambe\ pari\text{"}) = p(\text{"}1^a\ estratta\ pari\text{"}\ E\ POI\ \text{"}2^a\ estratta\ pari\text{"}) =$$
$$= p(\text{"}1^a\ estratta\ pari\text{"}) \cdot p\,(\text{"}2^a\ estratta\ pari\text{"}\ /\ \text{"}1^a\ estratta\ pari\text{"}) =$$
$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

b) I casi possibili sono
$7 \cdot 6 = 42$
(osserviamo che quelle parole "una dopo l'altra"
ci invitano senz'altro a pensare a coppie ORDINATE di palline: PRIMA estratta, SECONDA estratta).
I casi favorevoli all'uscita di una coppia di numeri pari sono $3 \cdot 2 = 6$.
La probabilità cercata è perciò
$$\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

… *Quale dei due metodi preferisci?*

Esercizio 5

Da un'urna contenente 7 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
si estraggono, CONTEMPORANEAMENTE, due palline.
Calcolare la probabilità che portino entrambe un numero pari.

Risoluzione

a) E' vero che il quesito dice che le due palline vengono estratte "contemporaneamente",
ma la probabilità richiesta (che siano cioè entrambe pari) evidentemente non varia
se pensiamo di estrarre prima una pallina e poi un'altra
(in modo da poter parlare di "prima estratta" e di "seconda estratta").
Se preferisci, potremmo pensare di
estrarle contemporaneamente, ma di guardare prima una pallina, poi l'altra.

In questo modo, avendo noi riconosciuto che le situazioni dei due problemi 4) e 5)
sono probabilisticamente del tutto equivalenti,
è lecito risolvere esattamente come si è fatto per il problema 4).

Quindi si ha subito $p = \frac{1}{7}$.

b) CC (puoi applicare questo secondo metodo se conosci il Calcolo Combinatorio)

Oppure, volendo, si potrebbe pensare alle coppie NON ORDINATE di palline.

Si individua così un insieme universo di $\binom{7}{2} = 21$ casi EQUIpossibili.

E poiché i casi favorevoli sono $\binom{3}{2} = 3$, se ne trae subito $p = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$

Esercizio 6

Da un'urna contenente 7 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 si estraggono, UNA DOPO L'ALTRA E CON REIMBUSSOLAMENTO, due palline.

Calcolare la probabilità che portino entrambe un numero pari,

a) mediante il rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili
b) interpretando la "prova" come un "evento a due fasi" ed applicando il teorema relativo.

… Sarebbe possibile, in questo caso, ragionare in termini di coppie non ordinate?

Risoluzione

a) Questa volta, per via del reimbussolamento, i casi possibili sono
$7 \cdot 7 = 49$.
E i casi favorevoli all'uscita di una coppia di numeri pari sono
$3 \cdot 3 = 9$.
La probabilità cercata è perciò
$9/49$.

b) Interpretando la prova come un evento a due fasi, avremo:

$$p(entrambe\ pari) = p(1^a\ pari\ E\ POI\ 2^a\ pari) = p(1^a\ pari) \cdot p(2^a\ pari/1^a\ pari) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$

Osserviamo che in questo caso
$p(2^a\ pari/1^a\ pari) = p(2^a\ pari) = p(1^a\ pari)$
perché i due eventi sono indipendenti.

c) Assolutamente no.
A parte il fatto che comunque l'enunciato del problema invita a pensare ad una successione temporale, ragionare in termini di coppie non ordinate porterebbe qui ad un universo di casi NON EQUIPOSSIBILI!!!

Infatti, ad esempio, i due casi
$\{1, 1\}$
e
$\{1, 2\}$ (l'uso delle graffe indica coppie non ordinate)

NON sono affatto equipossibili in quanto il primo si può verificare solo se la prima pallina estratta porta il numero 1 e la seconda pallina estratta pure (una sola modalità),
mentre il secondo si verifica "con più facilità", in quanto si può verificare
tanto se la prima pallina porta "1" e la seconda "2",
quanto se la prima pallina porta "2" e la seconda "1" (due modalità).

Non sei convinto di questo discorso?
Prova ad esempio a pensare di lanciare due volte di seguito una moneta.

I casi
{T, T} (due teste)
{C, C} (due croci)
{T, C} (una testa e una croce)
NON sono equipossibili!

Per persuaderti di questo, mettiti con pazienza a fare una sequenza di 400 doppi lanci (eventualmente, chiedi la collaborazione di qualche amico/a!):
vedrai che il numero di volte in cui esce "doppia testa" si aggirerà intorno alle 100, "doppia croce" pure intorno alle 100, "una testa e una croce" intorno alle 200 volte.

Sono invece equipossibili i casi (coppie ordinate):
(T, T) (testa al primo lancio, testa al secondo)
(T, C) (testa al primo lancio, croce al secondo)
(C, T) (croce al primo lancio, testa al secondo)
(C, C) (croce al primo lancio, croce al secondo)

Esercizio 7

Da un'urna contenente 19 palline numerate 1, 2, 3, … , 19 si estraggono,
UNA DOPO L'ALTRA E SENZA REIMBUSSOLAMENTO, 4 palline.
Calcolare la probabilità che portino tutte un numero pari.

Risoluzione

a) Interpretando la prova come un evento a più fasi, avremo:

$$p(\text{tutte e 4 pari}) =$$
$$= p(1^a \text{ pari E POI } 2^a \text{ pari E POI } 3^a \text{ pari E POI } 4^a \text{ pari}) =$$
$$= p(1^a \text{ pari}) \cdot p(2^a \text{ pari}/1^a \text{ pari}) \cdot p(3^a \text{ pari}/"1^a \text{ pari} \wedge 2^a \text{ pari}") \cdot p(4^a \text{ pari}/"1^a \text{ pari} \wedge 2^a \text{ pari} \wedge 3^a \text{ pari}") =$$
$$= \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} = \frac{21}{646}$$

b) CC (questo secondo metodo richiede semplicissimi elementi di Calcolo Combinatorio)

Per il conteggio del numero di casi favorevoli ed equipossibili, avremo che:

- i casi possibili sono $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$;
- i casi favorevoli all'uscita di una quaterna ordinata di numeri pari sono $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

La probabilità cercata è perciò

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{21}{646}$$

c) CC (puoi applicare questo terzo metodo se conosci il Calcolo Combinatorio)

C'è anche l'alternativa di ragionare in termini di quaterne non ordinate,
pensando di estrarre le quattro palline contemporaneamente.
In effetti il problema, riformulato in questo modo, è probabilisticamente equivalente
a quello in cui si pensa ad estrazioni successive.
Che io estragga 4 palline una dopo l'altra (senza reimbussolamento),
oppure che io prenda "una manciata di 4 palline", la "facilità" (o piuttosto, diremmo, la difficoltà!)
di trovarmi fra le mani 4 palline tutte pari è sempre la stessa.

I casi possibili, se pensiamo alle quaterne non ordinate, sono $\binom{19}{4}$.

I casi favorevoli all'uscita di una quaterna non ordinata di numeri pari sono $\binom{9}{4}$.

La probabilità cercata è perciò $\dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{19}{4}} = \dfrac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}}{\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4!}} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = \dfrac{21}{646}$.

Esercizio 8
Lanciando 6 dadi, qual è la probabilità di ottenere su tutti un multiplo di 3?

Risoluzione

Fra i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 ci sono 2 multipli di 3: il 3 e il 6.

Quindi, in un singolo lancio, la probabilità di uscita di un multiplo di 3 è $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Allora avremo:

$$p(\text{tutti multipli di } 3) = p(\text{multiplo di } 3 \text{ al } 1° \text{ lancio}) \cdot p(\text{multiplo di } 3 \text{ al } 2° \text{ lancio}) \cdot \ldots =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^6} \approx 0{,}00137$$

Ovviamente qui ciascun evento è indipendente dai rimanenti.

Anche a questo quesito si sarebbe potuto rispondere senza pensare all' "evento a più fasi",
ma applicando invece direttamente la definizione $p = $ n° casi favorevoli / n° casi possibili:
n° casi favorevoli $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$, n° casi possibili $= 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6$

Esercizio 9

Due urne contengono:

- **U1, 3 palline Bianche (B) e 2 Nere (N);**
- **U2, 3 palline Bianche e 1 Nera.**

Si estrae una pallina da U1, e le rimanenti palline di U1 vengono versate in U2, da cui si estrae poi una seconda pallina.

Che probabilità c'è di ottenere 2 palline di diverso colore?

Risoluzione

Psst … in confidenza … vuoi un consiglio da amico?
SCHEMATIZZA SEMPRE un problema prima di risolverlo!

Dunque:

$$\mathrm{U1}:\ 5\ (3\mathrm{B},\ 2\mathrm{N}) \qquad \mathrm{U2}:\ 4\,(3\mathrm{B},\ 1\mathrm{N})$$

Ora possiamo cominciare.

$$p(diverso\ colore) \overset{\text{NOTA}}{=}$$
$$= p(\mathrm{B}\ e\ poi\ \mathrm{N}) + p(\mathrm{N}\ e\ poi\ \mathrm{B}) =$$
$$= p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{N}/\mathrm{B}) + p(\mathrm{N})\cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{N}) = \ldots$$

NOTA
Applicando la Regola della somma

… prima di proseguire, osserviamo che ad esempio,
il simbolo $p(\mathrm{N/B})$ *ha il significato di*
"probabilità che esca N alla seconda estrazione, supposto che sia uscita B alla prima estrazione":
ma se è uscita Bianca alla prima estrazione,
si va a pescare in un'urna che contiene tutte le palline della U2 *iniziale,*
più tutte le palline della U1 *iniziale tranne quella Bianca che è stata estratta,*
quindi 8 palline, di cui 3+2=5 Bianche e 1+2 = 3 Nere,
per cui la probabilità di estrarre una Nera risulta uguale a 3/8 …
… e con considerazioni analoghe si calcolerà $p(\mathrm{B/N})$ *…*

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8} + \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{8} = \frac{21}{40}$$

Esercizio 10

Un'urna contiene 2 R e 10 N. In un'altra urna ci sono 3 R e 2 N. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Qual è la probabilità che le due palline estratte siano entrambe R ?

Risoluzione

$$p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U1}\text{"} \wedge \text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"}) = p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U1}\text{"})\cdot p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"}) = \frac{2}{12}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

Osserviamo che gli eventi sono indipendenti quindi anziché $p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"}/\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U1}\text{"})$ abbiamo potuto scrivere semplicemente $p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"})$.

Esercizio 11

Un'urna U1 contiene 2 R e 1 N, in una seconda urna U2 ci sono 1 R e 4 N.
Si sceglie un'urna a occhi bendati, e da quest'urna si estrae una pallina.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, una R.

Risoluzione

$$p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{U1}\ \underbrace{e\ poi}_{\substack{\text{possiamo}\\ \text{usare anche}\\ \text{un "}\wedge\text{" con questo}\\ \text{significato}\\ \text{"esteso"}\\ \text{di "e poi":}\\ p(\mathrm{U1}\wedge\mathrm{R})}}\ \mathrm{R}) + p(\mathrm{U2}\ \underbrace{e\ poi}_{\substack{\text{possiamo}\\ \text{usare anche}\\ \text{un "}\wedge\text{" con questo}\\ \text{significato}\\ \text{"esteso"}\\ \text{di "e poi":}\\ p(\mathrm{U2}\wedge\mathrm{R})}}\ \mathrm{R}) =$$

$$= p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1}) + p(\mathrm{U2})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$$

Esercizio 12
Ci sono 20 biglietti in una minuscola lotteria che una compagnia di bambini ha organizzato per gioco, e a 7 di essi sono abbinati altrettanti piccoli premi. Pierino compra 4 biglietti. Che probabilità c'è che siano tutti vincenti?

Risoluzione

$$p(\textit{tutti e 4 vincenti}) = p(1°\textit{vincente})\cdot p(2°\textit{vincente}/1°\textit{vincente})\cdot ... = \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}=\frac{7}{969}$$

(Prosegui la lettura se hai studiato il Calcolo Combinatorio)

Si potrebbe anche ragionare tramite il rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili, e addirittura in DUE MODI.

♪ Dal punto di vista dell'estrazione dei 7 biglietti vincenti (supponendo che questa abbia luogo successivamente all'acquisto dei biglietti), i casi possibili sono $\binom{20}{7}$

e i casi favorevoli sono tanti quanti i gruppi di 7 biglietti ottenibili prendendo i 4 biglietti che Pierino possiede, e accostando loro 3 qualsiasi fra i 16 biglietti rimanenti: ora, tali gruppi sono in numero di $\binom{16}{3}$, da cui

$$p=\frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{7}}=\frac{\dfrac{\cancel{16\cdot 15\cdot 14}}{3!}}{\dfrac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot \cancel{16\cdot 15\cdot 14}}{7!}}=\frac{\dfrac{7!}{3!}}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{20}\cdot 19\cdot\cancel{18}_3\cdot 17}=\frac{7}{969}$$

♫ Dal punto di vista di Pierino che acquista i biglietti (supponiamo che i vincenti siano già stati estratti, e l'esito dell'estrazione tenuto segreto: nulla cambia, per quanto riguarda le probabilità di vincere!) i casi equipossibili sono tanti, quante le possibilità, fra i 20 biglietti esistenti, di sceglierne 4, quindi $\binom{20}{4}$

mentre i casi favorevoli saranno le quaterne di biglietti costruibili utilizzando i soli 7 biglietti vincenti, ossia $\binom{7}{4}$.

Ragionando in questo modo, si ha $p=\dfrac{\binom{7}{4}}{\binom{20}{4}}=\dfrac{\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{\cancel{4!}}}{\dfrac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{\cancel{4!}}}=\dfrac{7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{20}\cdot 19\cdot\cancel{18}_3\cdot 17}=\dfrac{7}{969}$

Possiamo anche domandarci se sia possibile, volendo, utilizzare la probabilità dell' "evento a più fasi" ma da una prospettiva diversa, ossia: "Pierino ha già comprato i suoi 4 biglietti, ora vengono estratti i 7 biglietti vincenti, valutiamo la probabilità che tutti e 4 i biglietti in possesso di Pierino compaiano fra i 7 estratti".
La risposta è affermativa, ma c'è una complicazione per quanto riguarda il conteggio dei casi favorevoli: quando vengono estratti i 7 biglietti, fra i quali supponiamo ci siano tutti e 4 quelli in mano a Pierino, ci sono parecchie possibilità affinché la circostanza fortunata si verifichi, in quanto i biglietti di Pierino potrebbero essere estratti alle posizioni numero 1, 2, 3 e 4 ma anche alle posizioni 2, 4, 5 e 7, oppure 1, 3, 4 e 6, ecc. ecc.
Incominciamo con l'osservare che, come è evidente, la probabilità che i 4 biglietti di Pierino escano *tutti*, quando vengono estratti i 7, sarà uguale alla probabilità che questi 4 biglietti escano alle prime 4 estrazioni, moltiplicata per il numero dei modi in cui è possibile, in una sequenza di 7 estrazioni, sceglierne 4. Riflettiamo: non c'è ragione alcuna affinché la probabilità che, ad esempio, nelle 7 estrazioni, i biglietti di Pierino escano alle posizioni 1, 2, 3 e 4 sia diversa dalla probabilità che escano in altre 4 posizioni fissate, che so, la 2, da 3, la 5 e la 7 …
Ma in quanti modi, su 7 posizioni di estrazione, ne possiamo scegliere 3? In $\binom{7}{3}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=35$ modi. Allora avremo

$$p=\binom{7}{3}\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot\frac{1}{17}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot\frac{1}{17}=\frac{7}{969}$$

Esercizio 13
Al banco di beneficenza restano ancora invenduti 10 biglietti, di cui so che 4 sono vincenti (sono rimasti infatti 4 premi: un quaderno, uno strofinaccio, un Mon Cheri e un kit per bolle di sapone).
Se acquisto proprio 4 biglietti, che probabilità c'è che siano vincenti:
a) tutti e 4; b) esattamente 3; c) esattamente 2; d) esattamente 1; e) nessuno

Risoluzione

a) $p(\textit{tutti e 4 vincenti}) = p(1°\textit{vincente}) \cdot p(2°\textit{vincente}/1°\textit{vincente}) \cdot ... = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}$

b) $p(3 \textit{ vincenti}) =$

$$= p(1°\textit{vincente} \wedge 2°\textit{vincente} \wedge 3°\textit{vincente} \wedge 4°\textit{ perdente}) +$$
$$+ p(1°\textit{vincente} \wedge 2°\textit{vincente} \wedge 3°\textit{ perdente} \wedge 4°\textit{vincente}) +$$
$$+ p(1°\textit{vincente} \wedge 2°\textit{ perdente} \wedge 3°\textit{vincente} \wedge 4°\textit{vincente}) +$$
$$+ p(1°\textit{ perdente} \wedge 2°\textit{vincente} \wedge 3°\textit{vincente} \wedge 4°\textit{vincente}) =$$
$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{4}{35}$$

Si sarebbe comunque dovuto intuire che le quattro probabilità sommate DOVEVANO essere uguali.
Io acquisto 4 biglietti, e la probabilità che ce ne sia uno e uno solo perdente non dipende, evidentemente, dall'ordine in cui io li ricevo materialmente, o li apro. Quindi, ad esempio, la probabilità che sia perdente solo il primo biglietto aperto (e tutti gli altri vincenti) DEVE coincidere con la probabilità che sia perdente solo il secondo biglietto aperto, ecc. ecc.

CC (Prosegui la lettura se hai studiato il Calcolo Combinatorio)

… Ma … un attimo … ! Non era meglio ragionare in termini di casi equipossibili e casi favorevoli?
Se si conosce il Calcolo Combinatorio, la risposta è senz'altro affermativa!!!

Dunque: i casi possibili sono tante quante le quaterne non ordinate di biglietti che posso comprare, ossia $\binom{10}{4}$.

E i casi favorevoli ad avere 3 biglietti vincenti sono tanti quante sono le possibilità di scegliere 3 biglietti tra i 4 vincenti: $\binom{4}{3} = 4$ possibilità

per poi abbinarli con 1 fra i biglietti perdenti (6 possibilità). Abbiamo perciò $4 \cdot 6 = 24$ casi favorevoli.

Calcola ora il rapporto $\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$ e verifica che coincide con il valore $\frac{4}{35}$ trovato per altra via.

Prova ora tu a dare risposta ai quesiti c), d), e): dovrai ottenere c) 3/7 d) 8/21 e) 1/14

Esercizio 14
In una famiglia con quattro figli, che probabilità sussiste che i maschi siano esattamente due? (Supponiamo, per semplicità, che le probabilità di nascere maschio o femmina siano entrambe uguali a 1/2. Nella realtà si ha una leggera prevalenza delle nascite maschili rispetto a quelle femminili)

Risoluzione

$$p = p(\text{MMFF}) + p(\text{MFMF}) + p(\text{MFFM}) + p(\text{FMMF}) + p(\text{FMFM}) + p(\text{FFMM}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

CC (Prosegui la lettura se hai studiato il Calcolo Combinatorio)

Si poteva anche risolvere semplicemente tramite il rapporto casi favorevoli/casi possibili:
i casi equipossibili sono tanti quante le quaterne ordinate costruibili utilizzando i due simboli M, F
e quindi sono $2^4 = 16$ (volendo, sono tanti quante le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti, di classe 4).

*Osserviamo per inciso che pensare alle quaterne **ORDINATE** è indispensabile:*
se non si tenesse conto dell'ordine, e si scrivesse che i casi possibili sono:
0 maschi; esattamente 1 maschio; esattamente 2 maschi; esattamente 3 maschi; 4 maschi
*si perverrebbe ad un insieme di casi **NON equipossibili** !!!*
(confronta con quanto si è detto in fondo a pagina 63 riguardo al doppio lancio di una moneta)

I casi favorevoli sono tanti quante le quaterne ordinate costruibili utilizzando i due simboli M, F col vincolo di utilizzare per esattamente 2 volte il simbolo M.
Per contarli, possiamo pensare di avere a disposizione una sequenza ordinata di 4 caselle,

Prima casella	Seconda casella	Terza casella	Quarta casella

e di dover scegliere quelle due in cui scrivere M (nelle rimanenti scriveremo F).

Ma questa scelta la possiamo effettuare in $\binom{4}{2} = 6$ modi. 6 casi favorevoli, dunque, e in definitiva $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 15
Di 6 persone, si sa che sono nate tutte a Giugno.
Che probabilità c'è che almeno due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Risoluzione
Sarà
$$p(\text{"}almeno\ 2\ sono\ nate\ lo\ stesso\ giorno\text{"}) = 1 - p(\text{"}nessuna\ è\ nata\ lo\ stesso\ giorno\ di\ un'altra\text{"})$$
Indicate con A, B, C, D, E, F le 6 persone, affinché si verifichi l'evento
"nessuna è nata lo stesso giorno di un'altra",
qualunque sia il giorno in cui è nata A,
B *non* dovrà essere nata in quel giorno,
C *non* dovrà essere nata né nello stesso giorno di A, né in quello di B,
ecc.
Insomma:
$$p(\text{"}nessuna\ è\ nata\ lo\ stesso\ giorno\ di\ un'altra\text{"}) = 1 \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{27}{30} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{30}$$
e dunque
$$p(\text{"}almeno\ 2\ sono\ nate\ lo\ stesso\ giorno\text{"}) = 1 - \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{30^5} \approx 0,414$$
La probabilità cercata è già abbastanza vicina a 1/2… dì la verità, te lo aspettavi?

Esercizio 16
Per 3 diversi test di ingresso universitari, le statistiche dicono che le probabilità di promozione sono rispettivamente: 0,4 ; 0,7 ; 0,8.
Se si va a pescare uno studente a caso per ciascuno dei 3 test, valuta qual è:

a) **la probabilità che tutti e tre abbiano superato la prova;**
b) **la probabilità che almeno uno l'abbia superata;**
c) **la probabilità che uno e uno solo l'abbia superata.**

Risoluzione
Simbologia: A = *il primo studente ha passato il test*, ecc.

a) $p(A \wedge B \wedge C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = 0,224$ (gli eventi sono indipendenti).

b) $p(\text{"}almeno\ uno\ promosso\text{"}) = 1 - p(\text{"}nessun\ promosso\text{"}) =$
$= 1 - p\left(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}\right) = 1 - 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,036 = 0,964$

Simbologia:
$\overline{A}$ = A *non ha superato il test*, ecc.

c) $p(\text{"}uno\ e\ un\ solo\ promosso\text{"}) = p\left((A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)\right) =$
$= 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,252$

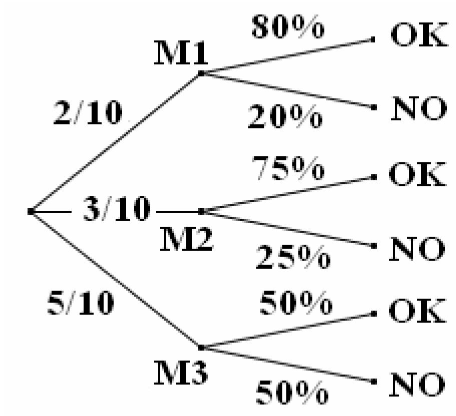
Esercizio 17
In uno scatolone ci sono 10 dispositivi elettronici,
dei quali 2 sono della marca M1, 3 della marca M2 e 5 della marca M3.
Tuttavia non è possibile, per nessun dispositivo, riconoscere di che marca sia.
Statisticamente, i dispositivi M1 sono "buoni" nell' 80% dei casi (quindi con probabilità 0,8), gli M2 nel 75% dei casi e gli M3 nel 50% dei casi.
Mi chiedo qual è la probabilità che, prendendo un dispositivo a caso, esso risulti funzionante.

Risoluzione
Prima schematizzo!!!

M1	M2	M3	
2	3	5	10 *in totale*
80%	75%	50%	*probabilità di funzionamento*

$$\begin{aligned} p(\mathrm{OK}) &= p((\mathrm{M1} \wedge \mathrm{OK}) \vee (\mathrm{M2} \wedge \mathrm{OK}) \vee (\mathrm{M3} \wedge \mathrm{OK})) = \\ &= p(\mathrm{M1} \wedge \mathrm{OK}) + p(\mathrm{M2} \wedge \mathrm{OK}) + p(\mathrm{M3} \wedge \mathrm{OK}) = \\ &= p(\mathrm{M1}) \cdot p(\mathrm{OK}/\mathrm{M1}) + p(\mathrm{M2}) \cdot p(\mathrm{OK}/\mathrm{M2}) + p(\mathrm{M3}) \cdot p(\mathrm{OK}/\mathrm{M3}) = \\ &= \frac{2}{10} \cdot 0,8 + \frac{3}{10} \cdot 0,75 + \frac{5}{10} \cdot 0,5 = 0,635 \end{aligned}$$

L'ideale, in questo caso, è una rappresentazione "ad albero":



La mia prova aleatoria
(pescaggio di un dispositivo)
non si articola in due fasi dal punto di vista TEMPORALE,
ma dal punto di vista LOGICO, sì
(o, perlomeno, come tale la posso "vedere"):

I. mi chiedo con che probabilità il dispositivo pescato proviene da M1, da M2, da M3;
II. posto che provenga da Mk, mi chiedo con che probabilità sarà buono o difettoso.

Esercizio 18

Paolo prende la sufficienza con probabilità 1/2, Monica con probabilità 1/3.
Se almeno uno ha preso la sufficienza, che probabilità c'è che Paolo l'abbia presa?

a) Risoluzione tramite la formula $\boldsymbol{p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}}$

E' richiesta $p(\mathrm{P}/(\mathrm{P} \vee \mathrm{M}))$.

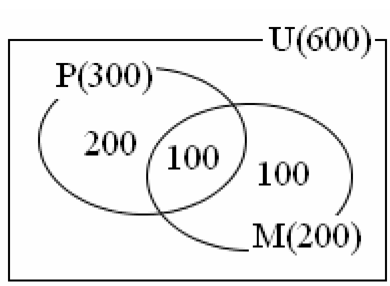
Utilizzando la formula $p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ si ha $p(\mathrm{P}/(\mathrm{P} \vee \mathrm{M})) = \dfrac{p(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{M}))}{p(\mathrm{P} \vee \mathrm{M})}$.

Ma $p(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{M})) = p(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{2}$,

mentre $p(\mathrm{P} \vee \mathrm{M}) = p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{M}) - p(\mathrm{P} \wedge \mathrm{M}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$,

da cui: $p\big(\mathrm{P}/(\mathrm{P} \vee \mathrm{M})\big) = \dfrac{1/2}{2/3} = \dfrac{3}{4}$

b) Risoluzione con visione frequentista
(per schematizzare, niente di meglio di un diagramma di Venn!)



Su 600 verifiche,
Paolo avrà preso la sufficienza circa 300 volte, Monica circa 200 volte;
l'avranno presa entrambi nella stessa verifica circa 100 volte,
perché $p(\mathrm{P} \wedge \mathrm{M}) = p(\mathrm{P}) \cdot p(\mathrm{M}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{1}{6} \cdot 600 = 100$
(d'altronde, poiché Paolo prende la sufficienza mediamente una volta su 2, se si vanno a considerare esclusivamente quelle circa 200 prove nelle quali ha preso la sufficienza Monica, all'incirca per 100 volte l'avrà presa anche Paolo).

Quindi le volte in cui almeno uno avrà preso la sufficienza saranno circa
300+200 –100 = 400
oppure, indifferentemente,
200+100+100 = 400.

Su queste 400 volte, sono all'incirca 300 le volte in cui Paolo risulta sufficiente.

Di qui la risposta $p = \dfrac{300}{400} = \dfrac{3}{4}$.

11 - IL "PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE"

☼ **E' richiesto di conoscere il CALCOLO COMBINATORIO!**

a) Lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c'è che esca PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia "1"?

b) Generalizzazione: il "PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE".

CONSIDERIAMO UN EVENTO ELEMENTARE
(nell'esempio: l'uscita della faccia "1" dal lancio di un dado)
CHE ABBIA UNA DATA PROBABILITÀ *p* DI VERIFICARSI IN UNA SINGOLA PROVA
(nel nostro caso, è $p = 1/6$).

Ci chiediamo:
SE SI EFFETTUANO *n* PROVE, CHE PROBABILITÀ C'È CHE QUELL'EVENTO SI VERIFICHI PER ESATTAMENTE *k* VOLTE
$(0 \le k \le n)$?

RISOLUZIONE di a)

L'evento

"lanciando 5 volte un dado, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1"

può verificarsi in parecchie modalità diverse:

- ad esempio, si verifica qualora "1" esca ai primi 3 lanci, e poi non esca più ai successivi 2 lanci;
- oppure, si verifica qualora "1" esca esclusivamente agli ultimi 3 lanci (ma non esca ai primi 2);
- oppure ancora, si verifica qualora "1" esca al secondo, al terzo e al quinto lancio, ma non agli altri lanci;
- ecc. ecc.

Fissiamo la nostra attenzione su UNA di queste modalità.

Ad esempio, cominciamo col chiederci:

- *lanciando un dado 5 volte di seguito,*
  che probabilità c'è che la faccia "1" esca ai primi 3 lanci, e poi non esca più?

  Facile rispondere: pensando all' "evento a più fasi" e tenendo conto del fatto che l'esito di un lancio non è condizionato in alcun modo dall'esito del lancio precedente, abbiamo:

$$p(1\ \ 1\ \ 1\ \ \overline{1}\ \ \overline{1}) =$$
$$= p(1\ al\ 1°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 2°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 3°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 4°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 5°\ lancio) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

Consideriamo ora UN'ALTRA fra le possibili modalità.
Ad esempio,

- *lanciando un dado 5 volte di seguito,*
  che probabilità c'è che la faccia "1" esca esclusivamente agli ultimi 3 lanci (ma non esca ai primi 2)?

  Avremo

$$p(\overline{1}\ \ \overline{1}\ \ 1\ \ 1\ \ 1) =$$
$$= p(NON\ 1\ al\ 1°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 2°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 3°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 4°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 5°\ lancio) =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

E pensiamo ancora ad UN'ALTRA modalità.

- *Lanciando un dado 5 volte di seguito,*
  che probabilità c'è che "1" esca al secondo, al terzo e al quinto lancio, ma non agli altri lanci?

$$p(\overline{1}\ \ 1\ \ 1\ \ \overline{1}\ \ 1) =$$
$$= p(NON\ 1\ al\ 1°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 2°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 3°\ lancio) \cdot p(NON\ 1\ al\ 4°\ lancio) \cdot p(1\ al\ 5°\ lancio) =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

Abbiamo perfettamente capito, a questo punto, che CIASCUNA delle tante modalità con cui l'evento *"su 5 lanci, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1"* si può verificare,
ha probabilità data dal prodotto

$$\boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

Ora, in virtù del teorema sulle probabilità totali per eventi incompatibili, abbiamo:

$$p(su\ 5\ lanci,\ esce\ PER\ ESATTAMENTE\ 3\ VOLTE\ la\ \ faccia\ 1) =$$
$$= p\big(("1"\ esce\ le\ \ prime\ 3\ volte) \vee ("1"\ esce\ le\ ultime\ 3\ volte) \vee ("1"\ esce\ la\ seconda,\ la\ terza\ e\ la\ quinta\ volta) \vee \ldots\big) =$$
$$= p("1"\ esce\ le\ \ prime\ 3\ volte) + p("1"\ esce\ le\ ultime\ 3\ volte) + p("1"\ esce\ la\ seconda,\ la\ terza\ e\ la\ quinta\ volta) + \ldots =$$
$$= \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2} + \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2} + \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2} + \ldots$$

Per calcolare la probabilità cercata, dobbiamo dunque sommare tanti addendi, ciascuno uguale a $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

La questione è: QUANTI SONO questi addendi?

Beh … sono TANTI QUANTE LE MODALITA' CON CUI L'EVENTO
"esce per esattamente 3 volte la faccia 1"
SI PUO' PRESENTARE.

E l'evento "esce per esattamente 3 volte la faccia 1" si può presentare in tante modalità,
quanti sono i modi in cui, sui 5 lanci, possiamo fissare quei 3 nei quali immaginiamo esca "1".

Ora, è ben noto che fra 5 oggetti (nel nostro caso: i 5 lanci) noi ne possiamo selezionare 3
(nel nostro caso: quei 3 lanci nei quali immaginiamo esca "1") in $\binom{5}{3}$ modi.

Ricordiamo infatti che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$
è quel numero che risponde alla domanda: " dati *n* oggetti, in quanti modi se ne possono scegliere *k*? "

Dunque avremo:

$$\boxed{p(su\ 5\ lanci,\ esce\ PER\ ESATTAMENTE\ 3\ VOLTE\ la\ \ faccia\ 1) =}$$
$$= \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots\ldots.}_{\binom{5}{3}\ addendi} \boxed{= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

GENERALIZZAZIONE

Generalizzando, possiamo enunciare e risolvere, in astratto, il

"PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE"

Consideriamo un evento elementare
(nell'esempio precedente: l'uscita della faccia "1" dal lancio di un dado)
che abbia una data probabilità *p* di verificarsi IN UNA SINGOLA PROVA
(nel nostro esempio del dado, sarebbe *p* = 1/6).
Ci chiediamo:

SE SI EFFETTUANO *n* PROVE, CHE PROBABILITÀ C'È
CHE QUELL'EVENTO SI VERIFICHI PER ESATTAMENTE *k* VOLTE ($0 \le k \le n$) ?

RISPOSTA:
la probabilità cercata è data da

$$\boxed{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

avendo posto, per comodità,

$$\boxed{q = 1 - p}.$$

Se andiamo adesso a rivisitare l'esercizio 14) di pagina 67,
scopriremo che può anche essere risolto, volendo, con l'appena stabilita "formula delle prove ripetute" …

In una famiglia con quattro figli, che probabilità sussiste che i maschi siano esattamente due?

In una singola "prova", abbiamo: $p(maschio)=\frac{1}{2}$

per cui, effettuando 4 "prove", sarà: $p(esattamente\ 2\ maschi)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4\cdot 3}{2!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

SCHEDA RIASSUNTIVA sul "PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE"

Supponiamo di effettuare *n* prove,
in ciascuna delle quali potrà presentarsi oppure non presentarsi un dato evento E.

Indichiamo con p la probabilità che E si presenti in una singola prova; porremo poi
$\boldsymbol{q=1-p}$,
e di conseguenza q indicherà la probabilità dell'evento contrario $\overline{\text{E}}$ in una singola prova.

Bene! Dato ora un intero *k*, con $0\le k\le n$, vogliamo determinare la probabilità p_k
che l'evento E si verifichi esattamente *k* volte nel corso nelle *n* prove.

Risoluzione

L'evento E si presenta esattamente *k* volte nel corso delle *n* prove
se e solo se, in quelle *n* prove, E si presenta *k* volte e il suo evento contrario $\overline{\text{E}}$ si presenta $n-k$ volte.

Il "presentarsi dell'evento E esattamente *k* volte nelle *n* prove" può avvenire secondo parecchie modalità.

Ad esempio, l'evento:
"lanciando 5 volte una moneta, esce Testa esattamente 3 volte"
si può presentare secondo le modalità:
TTTCC TTCCT TCCTT CCTTT CTCTT TCTCT TTCTC CTTCT TCTTC CTTTC.

Consideriamo ***una sola*** di queste modalità: per fissare le idee, potremmo pensare alla modalità
"E si presenta le prime k volte, $\overline{\text{E}}$ le ultime $n-k$ volte".
La probabilità di questa modalità fissata è evidentemente $p^k q^{n-k}$
(teorema delle probabilità composte per eventi indipendenti).

Ma noi non dobbiamo considerare una sola, bensì *tutte* le modalità con le quali E si può presentare per esattamente *k* volte sulle *n* prove; e tali modalità sono tante quante le possibilità di scegliere, dall'insieme delle *n* prove, quelle *k* nelle quali supponiamo che si verifichi E.

Tali modalità sono in numero di $\binom{n}{k}$ e di conseguenza avremo

$$\boxed{\boldsymbol{p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}}$$

❑ Es. 1: *lanciando un dado per 10 volte, che probabilità c'è che esca il "6" esattamente per 3 volte?*

Risposta: $p_3=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$

❑ Es. 2: *lanciando una moneta per 10 volte, che probabilità c'è che esca "Testa" esattamente per 5 volte?*

Risposta: $p_5=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$

ESERCIZI

1) C'è un'urna con 5 palline, 2 rosse e 3 nere. Si estrae una pallina, se ne guarda il colore, la si reimbussola.
Si fa questo per 5 volte. Che probabilità c'è che, così facendo, si peschi 2 volte una rossa e 3 volte una nera?

2) Se si prende 1 persona a caso, la probabilità che sia nata il giorno di domenica è 1/7.
Se invece si prendono 3 persone a caso, la probabilità che 1 e 1 sola di esse sia nata di domenica qual è?

3) Lanciando un dado per 6 volte, con che probabilità uscirà per esattamente 3 volte un multiplo di 3?

RISPOSTE

1) $\binom{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3=34{,}56\%$ 2) $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{7}\right)^1\left(\frac{6}{7}\right)^2=3\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{36}{49}=\frac{108}{343}\approx 31{,}5\%$ 3) $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\approx 22\%$

12 - SIMULAZIONE DI EVENTI ALEATORI IN LINGUAGGIO PASCAL

- In PASCAL la funzione RANDOM(n), essendo n di tipo **intero**, restituisce un intero pseudocasuale che potrà valere: $0, 1, 2, ..., n-1$. Quindi, ad esempio,

  esito:=random(2) si presta a simulare il lancio di una moneta (0 potrà essere interpretato come "Testa" e 1 come "Croce", o viceversa);

  x:=random(6)+1 assegnerà alla variabile x uno dei valori: 1, 2, 3, 4, 5 o 6 simulando così il lancio di un dado.

- Invece la funzione RANDOM, usata senza alcun argomento (senza, quindi, la coppia di parentesi successiva), restituisce un numero pseudocasuale di tipo **reale**, compreso fra 0 (incluso) e 1 (escluso). Ad esempio

  x:=random assegna alla variabile x, che deve essere stata dichiarata di tipo reale, un valore pseudocasuale "con la virgola" (=punto decimale) compreso fra 0 e 1: $0 \le x < 1$.

- E' importante ricordarsi che quando in un programma Pascal si utilizza una RANDOM, occorre premettere, all'inizio del programma, l'istruzione **RANDOMIZE**; essa ordina al computer di "rendere casuale il seme del generatore di numeri pseudocasuali". E' un po' come scuotere preventivamente l'urna da cui si estrarranno le palline; se non lo si fa, la pallina estratta, quando viene posata, resterà sempre in superficie e continuerà ad essere ripescata.

Esempio

Lancio una moneta; se esce Testa, mi viene consegnata un'urna U1 in cui ci sono una pallina Nera (N) e una Rossa (R): da quest'urna estraggo una pallina; se invece esce Croce, mi viene consegnata una diversa urna U2 in cui vi sono 3 palline Verdi (V1, V2, V3) e 1 Gialla (G); da quest'urna estraggo una pallina. Qual è la probabilità di estrarre una pallina Gialla? E una Rossa? (Questo quesito si trova a pagina 6)

Scrivi un programma Pascal che utilizzi la funzione RANDOM (n) in modo tale da simulare la prova aleatoria considerata nel problema, ripeterla un gran numero di volte e calcolare i rapporti n° di volte in cui è uscita G / n° di prove effettuate; n° di volte in cui è uscita R / n° di prove effettuate.

```
program probab;  uses crt;
var r, g, i, k, u, p: integer;
      begin
            clrscr;
            randomize;
            writeln ('Quante prove vuoi effettuare?'); readln (k);
            r:=0; g:=0;
            for i:=1 to k do
                  begin
                        u:=random(2)+1;
                        if u=1 then   begin   p:=random(2);   if p=0 then r:=r+1;   end;
                        if u=2 then   begin   p:=random(4);   if p=0 then g:=g+1;   end;
                  end;
            writeln ('Probabilità a posteriori uscita di una Rossa ', r/k:5:7);
            writeln ('Probabilità a posteriori uscita di una Gialla ', g/k:5:7);
            readln;
      end.
```

ESERCIZI

1) Scrivi un programma Pascal che simuli il lancio di una coppia di dadi, per un numero di volte fornito in input dall'utente. Il programma dovrà calcolare ogni volta la somma dei due punteggi ottenuti nel "doppio lancio", e alla fine la frequenza relativa di ciascuna delle somme (2, 3, …, 12) così ottenute. Lancia il programma ripetutamente, e confronta le frequenze relative con le rispettive "probabilità a priori".
2) Nascono 4 figli, in una famiglia. Che probabilità c'è che si tratti di 2 maschi e 2 femmine? (n° 14, pag. 67). Saresti capace di scrivere un programma Pascal che simuli un numero elevato di "quadruple nascite", per calcolare la frequenza relativa dell'evento "2 maschi e 2 femmine"?
3) La probabilità che un tiratore A colpisca il bersaglio è 1/2, la probabilità che lo colpisca B è 1/5. Se A e B sparano contemporaneamente contro il bersaglio, che probabilità c'è che questo venga colpito? (n°1, p. 59) Scrivi un programma Pascal adeguato a valutare la probabilità richiesta.
4) Aldo e Bruno si sfidano a scopa, stabilendo che il vincitore sarà chi totalizzerà per primo 3 partite. Posto che in una singola partita abbiano la stessa probabilità (1/2, dunque) di vittoria, se dopo 3 partite ha vinto 2 volte Aldo e 1 volta Bruno, che probabilità rimangono a Bruno di essere il vincitore della sfida? Scrivi un programma Pascal che risponda a questo interrogativo, simulando un numero elevato (scelto dall'utente) di sfide di questo tipo.

13 - ESERCIZI VARI

☼ **Può essere utile, o necessario, il CALCOLO COMBINATORIO!**

1) Lanciando un dado e simultaneamente una moneta,
che probabilità c'è di ottenere 1 col dado e Testa con la moneta?

2) Se si lanciano 3 dadi, qual è la probabilità che non compaia mai la faccia "6"?

3) Se si lanciano *n* dadi, qual è la probabilità che compaia almeno una volta un multiplo di 3?

4) Si lanciano simultaneamente 2 monete e 2 dadi. Determinare la probabilità che gli esiti siano tutti differenti.

5) Se un medico specialista riceve dal Lunedì al Venerdì, su prenotazione, 8 pazienti al giorno,
prendendo nella lista dei 40 pazienti di questa settimana i primi 3 in ordine alfabetico,
che probabilità c'è che gli appuntamenti per queste persone siano tutti in giorni diversi?

6) Un insegnante anticonformista sistema la classe in circolo intorno alla cattedra,
sorteggiando i posti a sedere. Se il timido Alessandro spera nel suo intimo di avere in sorte
un posto a fianco di Martina, e la classe è di 20 alunni, che probabilità c'è che realizzi il suo sogno?

7) 5 compagni di scuola si divertono a ricostruire il giorno della settimana in cui sono nati.
   a) Che probabilità c'è che siano nati tutti nel fine settimana (ossia, di Sabato o di Domenica)?
   b) Che probabilità c'è che siano nati in 5 giorni della settimana tutti diversi fra loro?
   c) Che probabilità c'è che esattamente 2 di loro siano nati di Domenica?
   d) Che probabilità c'è che almeno 2 di loro siano nati di Domenica?
   e) Che probabilità c'è che almeno 2 di loro siano nati nello stesso giorno della settimana?
   f) Che probabilità c'è che 3 siano nati di Martedì e 2 di Venerdì?

8) Un banco di beneficenza ha ancora 10 biglietti invenduti, di cui 3 sono vincenti.
Determina la probabilità che, comprando 3 biglietti, almeno uno di questi sia vincente.

9) Da rilevazioni statistiche, si trae che in una determinata nazione la probabilità che una famiglia
possegga un computer "da tavolo" è del 50%, la probabilità che possegga un portatile è del 20%,
mentre è del 10% la probabilità che disponga di entrambi.
Determinare la probabilità, per una famiglia, in quella nazione, di
   a) possedere un computer di almeno un tipo
   b) non possedere alcun computer.

   c) I due eventi "possedere un computer fisso" e "possedere un portatile"
   sono stocasticamente indipendenti?

10) Una piccola lotteria di paese ha emesso 100 biglietti, di cui 5 vincenti.
Stabilisci che probabilità ha una persona di possedere almeno un biglietto vincente, se ne ha acquistati
a) 1 b) 2 c) 5 d) 10 e) 20 f) 95 g) 96

11) Calcolare la probabilità che, lanciando una coppia di dadi (per meglio fissare le idee,
potresti pensarli di colori diversi: ad esempio, uno rosso e uno blu), si ottenga:
   a) 3 su entrambi
   b) 3 sul dado blu e non su quello rosso
   c) 3 sul dado blu
   d) uno e un solo "3"
   e) nessun "3"
   f) almeno un "3"

12) In una partita di 50 ventilatori, 4 sono difettosi.
Se una persona ne acquista 2, determina la probabilità che siano entrambi ben funzionanti.

13) Se fra i 20 soldati della compagnia in cui militano Aldo e Bruno ne vengono estratti 5
per il turno di guardia, che probabilità c'è che
   a) Aldo e Bruno vengano estratti entrambi?
   b) non venga estratto né Aldo né Bruno?
   c) venga estratto uno e uno solo dei due?
   d) venga estratto almeno uno dei due?

14) Se per una verifica orale vengono estratti 4 nomi in una classe con 10 maschi e 10 femmine,
determina la probabilità che siano
a) tanti maschi quante femmine b) più maschi che femmine c) più femmine che maschi

15) Lanciando 2 dadi, a quanto ammonta la probabilità di ottenere due numeri uno divisibile per l'altro?

16) Un cretino ha iniettato del purgante in 2 fra le 7 confezioni di latte,
che il negoziante ha poi disposto sullo scaffale per la vendita.
Se una signora ne acquista 3 confezioni, determinare la probabilità di portar via
a) almeno una confezione alterata
b) entrambe le confezioni alterate

17) Un paese di pianura non ha, in novembre, un clima particolarmente fortunato.
Una statistica effettuata dagli abitanti mostra che ogni giorno
- piove, in ore serali, con probabilità del 50%
- e c'è nebbia al mattino con probabilità del 40%

Inoltre si è visto che mediamente, 3 giorni su 10 si ha tanto la nebbia mattutina quanto la pioggia serale.
a) Supposto che ci sia nebbia al mattino, che probabilità c'è che poi piova alla sera?
(*indicazione: applica la formula* $p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ *per la quale ti invito a rileggere l'osservazione nel 1° riquadro a pag. 58*)
b) Se piove alla sera, che probabilità c'è che ci sia stata nebbia al mattino?
Qual è la probabilità che in un dato giorno almeno uno dei due fenomeni sia
c) presente? d) assente?
e) I due eventi "pioggia di sera", "nebbia al mattino" sono stocasticamente indipendenti?

18) Supponiamo di giocare al Totocalcio nella versione "classica" a 13 partite.
Supponiamo anche di decidere "a caso" che pronostico assegnare a ogni singola partita,
senza valutare quindi la "forza" delle squadre in campo.
Giocando una singola colonna, determina quale sarà la probabilità di realizzare
a) 13 b) 0 c) 12 d) 10
e) esattamente k punti su 13 $(0 \le k \le 13)$.

19) Supponiamo di aver giocato al Totocalcio (quello "classico", con 13 partite).
Se veniamo a sapere che la colonna vincente ha 4 "1", 4 "2" e 5 "X",
e ci ricordiamo di aver giocato una colonna compilata a caso,
ma nella quale avevamo messo proprio 4 "1", 4 "2" e 5 "X",
che probabilità abbiamo di aver fatto "13" con quella giocata?

20) Un'urna A contiene 6 palline Rosse e 3 palline Nere, un'altra urna B ne contiene 3 Rosse e 6 Nere.
Si estrae una pallina da A e la si mette in B; a questo punto si estrae una pallina anche da B.
Determinare la probabilità che le due palline siano:
a) entrambe Rosse
b) entrambe Nere
c) di colore diverso
d) almeno una Rossa

21) Un'urna A contiene 6 palline Rosse e 3 palline Nere, un'altra urna B ne contiene 3 Rosse e 6 Nere.
Si estrae una pallina da A e la si mette in B; a questo punto si estrae una pallina anche da B
e la si rimette in A. Infine, si estrae una pallina da A.
Determinare la probabilità che questa sia
a) Rossa b) Nera

22) Si può comunicare con un certo ente pubblico per mezzo di 3 linee telefoniche a scelta.
Tuttavia, le statistiche dicono che per il primo tentativo di telefonata
il 1° numero viene scelto dal 50% degli utenti, il secondo dal 30% e il terzo dal 20% soltanto.
Prese 3 persone a caso fra quelle che hanno tentato di mettersi in contatto questa mattina
con l'ente pubblico, che probabilità c'è che abbiano scelto, per il primo tentativo,
a) tutte lo stesso numero?
b) numeri tutti diversi?
c) numeri non tutti uguali?

23) Un tale gioca sempre lo stesso numero al lotto, per 10 estrazioni consecutive
(sappiamo che la probabilità di azzeccare il numero singolo in una estrazione fissata, è uguale a 1/18).
Che probabilità ha qual tale di
a) non vincere mai?
b) vincere almeno una volta?
c) vincere una e una sola volta?
d) vincere esattamente 2 volte?

RISPOSTE

> **Ovviamente, per molti quesiti c'è la possibilità di arrivare alla risposta in più modi diversi.**
> Ricorda sempre, fra l'altro, che in presenza della parola "*almeno*" è spesso conveniente utilizzare l'*evento contrario*

1) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$; *anche, volendo*: $\frac{cf}{cp}=\frac{1\cdot 1}{6\cdot 2}$ 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^3\approx 58\%$; *anche, volendo*: $\frac{cf}{cp}=\frac{5^3}{6^3}$

3) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 4) $1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$ 5) $1\cdot\frac{32}{39}\cdot\frac{24}{38}\approx 52\%$

6) 2/19.
Dal punto di vista probabilistico, evidentemente nulla cambia se si suppone che Martina e Alessandro siano rispettivamente la prima e la seconda persona a cui viene assegnato, per estrazione, il posto. Ad ogni posto si abbina dunque un numero (da 1 a 20), e si preparano i bigliettini. Si estrae poi un numero, e al posto corrispondente va a sedersi Martina. Fra i 19 bigliettini rimanenti, se ne estrae uno e si manda a sedere Alessandro al posto corrispondente. Ora, l'evento felice per Alessandro ha come casi favorevoli i due bigliettini che indicano i 2 posti a sinistra o a destra di quello dove si è accomodata Martina.

7) a) $\left(\frac{2}{7}\right)^5\approx 0{,}0019$ b) $1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\approx 15\%$ c) $\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\approx 13\%$

d) $1-\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}+5\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\right)\approx 15\%$ e) $1-1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\approx 85\%$

f) $\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\approx 0{,}06\%$; infatti $\binom{5}{3}$ è il numero dei modi in cui, sulle 5 persone, si possono scegliere quelle 3 che si supporranno nate di Martedì

8) $1-\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$ *oppure*: $1-\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=1-\frac{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}}=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$

9) $p(\mathrm{T}\vee\mathrm{P})=p(\mathrm{T})+p(\mathrm{P})-p(\mathrm{T}\wedge\mathrm{P})=0{,}5+0{,}2-0{,}1=0{,}6=60\%$; $p(nessuno)=1-p(\mathrm{T}\vee\mathrm{P})=1-0{,}6=0{,}4=40\%$
(oppure, si poteva rispondere disegnando un diagramma di Venn).

$p(\mathrm{T})=0{,}5;\ \boxed{p(\mathrm{T}/\mathrm{P})=}\frac{p(\mathrm{T}\wedge\mathrm{P})}{p(\mathrm{P})}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=\boxed{0{,}5=p(\mathrm{T})}$ *per cui i due eventi sono stocasticamente indipendenti*

10)

a) $\frac{5}{100}=0{,}05$ b) $1-\frac{\binom{95}{2}}{\binom{100}{2}}\approx 0{,}1$ *oppure (è lo stesso!)* $1-\frac{\binom{98}{5}}{\binom{100}{5}}\approx 0{,}1$

Nel **1° MODO**, si pensa ai casi possibili e favorevoli **dal punto di vista dei 2 biglietti comprati**; nel **2° MODO**, **dal punto di vista dei 5 biglietti estratti.**

c) $1-\frac{\binom{95}{5}}{\binom{100}{5}}\approx 0{,}23$ d) $1-\frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}}\approx 0{,}42$ *oppure (è lo stesso!)* $1-\frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}}\approx 0{,}42$.

e) $1-\frac{\binom{95}{20}}{\binom{100}{20}}\approx 0{,}68$ *oppure* $1-\frac{\binom{80}{5}}{\binom{100}{5}}$ f) $1-\frac{1}{\binom{100}{95}}\approx 0{,}999999987$ *oppure* $1-\frac{1}{\binom{100}{5}}$ g) 1

11) a) 1/36 b) 5/36 c) 1/6 d) 5/18 e) 25/36 f) 11/36 12) $\frac{46}{50}\cdot\frac{45}{49}\approx 84{,}5\%$, *oppure*: $\binom{46}{2}\Big/\binom{50}{2}$

13) a) $\frac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{5}}$ (le cinquine non ordinate contenenti sia Aldo che Bruno sono tante, quante sono le possibilità di completare la cinquina abbinando ad Aldo+Bruno 3 soldati scelti a piacere fra i 18 rimanenti) b) $\frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}}$ c) $\frac{\binom{18}{4}+\binom{18}{4}}{\binom{20}{5}}$ d) $1-\frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}}$

14) $p(tanti\ m.\ quante\ f.)=\frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}}=\frac{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0{,}418$; $p(m>f)=p(f>m)\approx\frac{1-0{,}418}{2}=0{,}291$

15) I casi favorevoli sono: (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2,2); (2, 4); (2, 6); (3, 1); (3, 3); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 4); (5, 1); (5, 5); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 6)

e la probabilità richiesta è $22/36 = 11/18$

16) a) $1-\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = 1-\dfrac{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}} = \dfrac{5}{7}$ b) $\dfrac{\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{5}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}} = \dfrac{1}{7}$

Il numero di terne di confezioni, contenenti entrambe quelle alterate, è uguale a $\binom{5}{1} = 5$ perché coincide col numero di modi in cui è possibile completare la terna, abbinando alle 2 confezioni alterate una di quelle "sane"

17) $\mathrm{P} = $"*in un dato giorno c'è pioggia alla sera*"; $\mathrm{N} = $"*in un dato giorno c'è nebbia al mattino*"

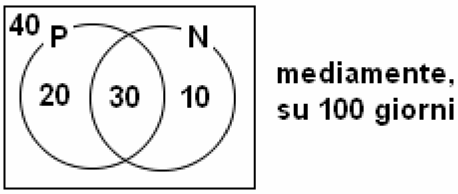
a) $p(\mathrm{P}/\mathrm{N}) = \dfrac{p(\mathrm{P}\wedge\mathrm{N})}{p(\mathrm{N})} = \dfrac{0,30}{0,40} = 0,75 = 75\%$ b) $p(\mathrm{N}/\mathrm{P}) = \dfrac{p(\mathrm{N}\wedge\mathrm{P})}{p(\mathrm{P})} = \dfrac{0,30}{0,50} = 0,60 = 60\%$

c) $p(\textit{almeno uno presente}) = p(\mathrm{P}\vee\mathrm{N}) = p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{N}) - p(\mathrm{P}\wedge\mathrm{N}) = 0,50+0,40-0,30 = 0,60 = 60\%$

d) $p(\textit{almeno uno assente}) = 1 - p(\textit{entrambi presenti}) = 1 - 0,30 = 0,70 = 70\%$

e) $p(\mathrm{P}) = 50\%$ *mentre* $p(\mathrm{P}/\mathrm{N}) = 75\%$:
non essendo $p(\mathrm{P}) = p(\mathrm{P}/\mathrm{N})$, *i due eventi* P *ed* N *non sono stocasticamente indipendenti*

Un diagramma di Venn
può essere utile in questo contesto:



18) a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{13}$ b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{13}$ c) *Il pronostico sbagliato, può essere uno qualsiasi dei* 13 ... $13\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{12}$ *Oppure* $\left(\dfrac{n°\ \textit{casi fav.}}{n°\ \textit{casi poss.}}\right)$: $\dfrac{13\cdot 2}{3^{13}}$

Volendo, si può pensare al "problema delle prove ripetute" ...

d) $\binom{13}{10}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}$ *opp.* $\dfrac{\binom{13}{10}\cdot 2^3}{3^{13}} = \dfrac{\binom{13}{3}\cdot 2^3}{3^{13}}$ e) $\binom{13}{k}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{13-k}$ *opp.* $\dfrac{\binom{13}{k}\cdot 2^{13-k}}{3^{13}} = \dfrac{\binom{13}{13-k}\cdot 2^{13-k}}{3^{13}}$

19) $n°\ \textit{casi poss.} = n°\ \textit{colonne con esattamente}\ 4\,"1",\ 4\,"2",\ 5\,"X" = \binom{13}{4}\cdot\binom{9}{4} = \dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 90090$

$n°\ \textit{casi favorevoli} = 1$ *da cui* $p = \dfrac{1}{90090}$

20) $p(\mathrm{RR}) = p(\mathrm{R}\ \textit{da}\ \mathrm{A})\cdot p(\mathrm{R}\ \textit{da}\ \mathrm{B}/\mathrm{R}\ \textit{da}\ \mathrm{A}) = \dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{4}{10} = \dfrac{4}{15}$; $p(\mathrm{NN}) = p(\mathrm{N}\ \textit{da}\ \mathrm{A})\cdot p(\mathrm{N}\ \textit{da}\ \mathrm{B}/\mathrm{N}\ \textit{da}\ \mathrm{A}) = \dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{7}{10} = \dfrac{7}{30}$

$p(\textit{colori diversi}) = 1 - \left(\dfrac{4}{15}+\dfrac{7}{30}\right) = \dfrac{1}{2}$ *oppure* $\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{6}{10}+\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{2}$; $p(\textit{almeno una Rossa}) = 1 - p(\mathrm{NN}) = 1 - \dfrac{7}{30} = \dfrac{23}{30}$

21) $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{RRR}) + p(\mathrm{RNR}) + p(\mathrm{NRR}) + p(\mathrm{NNR}) = \dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{6}{9} + \dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{5}{9} + \dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9} + \dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9} = \ldots = \dfrac{19}{30}$

$p(\mathrm{N}) = 1 - \dfrac{19}{30} = \dfrac{11}{30}$

22) a) $\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{50}{100} + \dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{30}{100} + \dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{20}{100} = 16\%$

b) $p(\textit{tutti diversi}) = p(\mathrm{ABC}) + p(\mathrm{ACB}) + p(\mathrm{BAC}) + p(\mathrm{BCA}) + p(\mathrm{CAB}) + p(\mathrm{CBA}) =$
$= \dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{20}{100} + \dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{30}{100} + \dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{20}{100} + \ldots = 6\cdot\dfrac{50}{100}\cdot\dfrac{30}{100}\cdot\dfrac{20}{100} = 18\%$

c) $p(\textit{non tutti uguali}) = 1 - p(\textit{tutti uguali}) = 100\% - 16\% = 84\%$

23) a) $\left(\dfrac{17}{18}\right)^{10} \approx 0,56$ b) $1-\left(\dfrac{17}{18}\right)^{10} \approx 1 - 0,56 = 0,44$ c) $10\cdot\dfrac{1}{18}\cdot\left(\dfrac{17}{18}\right)^{9} \approx 0,33$ d) $\binom{10}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{18}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{17}{18}\right)^{8} \approx 0,088$

14 - TEOREMA DI BAYES (SULLA "PROBABILITÀ DELLE CAUSE")

14.1 - La "probabilità delle cause": formula di Bayes

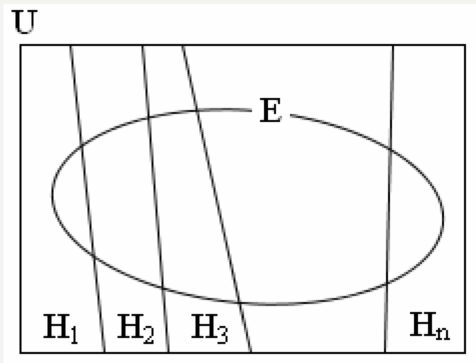
- **In un paese scandinavo il 70% delle ragazze ha i capelli Biondi, il 20% li ha Rossi, il 10% Mori. Risulta poi che ha gli occhi Scuri il 10% delle Bionde, il 25% delle Rosse, il 50% delle More. Se la ragazza con cui ho fatto amicizia tramite Internet mi fa sapere che ha gli occhi Scuri, che probabilità c'è che sia Bionda?**
- **In un bar ci sono due macchinette mangiasoldi A e B. Effettuando una singola giocata su A si vince con probabilità 1/2 (in altre parole: si vince mediamente 1 volta su 2, o, se preferisci, all'incirca 500 volte su 1000), mentre giocando su B si vince con probabilità 1/4. Supponiamo di non sapere quale sia la macchinetta A e quale la B; se ne scegliamo una a caso, giochiamo una sola volta, e vinciamo, che probabilità c'è che la macchinetta scelta sia stata A?**

Ecco **due tipici problemi di "probabilità delle cause".**

Per tali problemi, esistono più tecniche di risoluzione; ad esempio, sono molto belle ed efficaci quelle che si basano su di una "visione frequentista", o sull'idea delle "fette di certezza".

Comunque, in un problema di "probabilità delle cause" la risorsa più utile è senz'altro la *formula di Bayes*.

TEOREMA DI BAYES (sulla "probabilità delle cause")



Supponiamo che in una singola prova possa verificarsi uno e uno solo fra più possibili eventi $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (indichiamo con $p(H_i)$ la probabilità che si verifichi H_i), e che, qualora si verifichi l'evento H_i, ci sia una ben determinata probabilità $p(E/H_i)$ che si verifichi un dato evento E.

Insomma, gli eventi $H_1, H_2, \ldots, H_n$ costituiscono le possibili CAUSE dell'evento E; tali cause sono:

- **fra loro INCOMPATIBILI**
  (= non è possibile che si verifichino contemporaneamente due eventi H_i, H_j, se $i \neq j$)
- **ed "ESAUSTIVE"** (= nessuna altra causa, al di fuori delle $H_1, \ldots, H_n$, può generare l'evento E).

Allora, se si verifica l'evento E, la probabilità che esso sia stato provocato dalla causa H_i è data dalla formula

$$p(H_i/E) = \frac{p(H_i) \cdot p(E/H_i)}{p(H_1) \cdot p(E/H_1) + p(H_2) \cdot p(E/H_2) + \ldots + p(H_n) \cdot p(E/H_n)} = \frac{p(H_i) \cdot p(E/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(E/H_i)}$$

OSSERVAZIONE CHE AIUTA MOLTO A RICORDARE LA FORMULA
Il denominatore si ottiene riscrivendo il numeratore,
e poi scrivendo gli altri addendi analoghi, che si ottengono "facendo variare le cause".

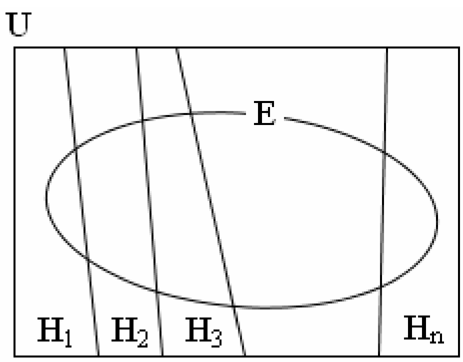
Dimostrazione (con riferimento alla figura):

$$p(H_i/E) = \frac{p(H_i \cap E)}{p(E)} =$$

$$= \frac{p(H_i \cap E)}{p((H_1 \cap E) \cup (H_2 \cap E) \cup \ldots \cup (H_n \cap E))}$$

$$= \frac{p(H_i) \cdot p(E/H_i)}{p(H_1 \cap E) + p(H_2 \cap E) + \ldots + p(H_n \cap E)} =$$

$$= \frac{p(H_i) \cdot p(E/H_i)}{p(H_1) \cdot p(E/H_1) + p(H_2) \cdot p(E/H_2) + \ldots + p(H_n) \cdot p(E/H_n)}$$



Giustificazioni dei passaggi nella dimostrazione:

- nel primo passaggio abbiamo applicato una nota formula ricavata dal Teorema delle Probabilità Composte:

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$$

- nel secondo passaggio, un'ovvia relazione insiemistica
- nel terzo passaggio,
  - il Teorema delle Probabilità Composte a numeratore
  - e il Teorema delle Probabilità Totali per eventi incompatibili a denominatore
- nel quarto passaggio, nuovamente il Teorema delle Probabilità Composte

OSSERVAZIONI

- **La dimostrazione data si riferisce a situazioni in cui possiamo porci**
  in un insieme universo di casi equipossibili,
  quindi si adatterebbe perfettamente al primo dei due esempi da cui abbiamo preso le mosse
  (le ragazze scandinave),
  in quanto il secondo esempio
  (le macchinette mangiasoldi)
  è piuttosto una "prova a due fasi", nella quale i casi non sono equipossibili,
  a meno di passare ad una opportuna
  "prova modificata, probabilisticamente equivalente a quella di partenza".
  Bene!
  Si può tuttavia dimostrare che
  ♥ **IL TEOREMA DI BAYES VALE ANCHE CON RIFERIMENTO AGLI "EVENTI A DUE FASI".**
  Basterà, a tale scopo, semplicemente sostituire, nei passaggi formali della nostra dimostrazione,
  il simbolo di $\cap$ con una congiunzione "$\wedge$" da intendersi come indicante
  successione temporale o comunque "accostamento, abbinamento" di eventi;
  oppure, si potrà ricorrere ad una opportuna
  "prova modificata, probabilisticamente equivalente a quella data",
  analogamente a quanto già fatto nel paragrafo 8.2.

- **Si comprende poi facilmente che**
  ♥ **LA FORMULA DEL TEOREMA DI BAYES RIMANE VALIDA**
  PURE SE GLI EVENTI $\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2,\ldots,\mathrm{H}_n$
  NON VENGONO INTERPRETATI COME "CAUSE" DI E, MA SEMPLICEMENTE
  COME EVENTI CHE POSSONO ESSERE "CONCOMITANTI" CON E.

ESEMPIO

- **In una certa facoltà universitaria, è obbligatorio sostenere un esame di Lingua Straniera.**
  Ogni studente può scegliere fra:
  Inglese, Francese, Spagnolo, Tedesco.
  Le statistiche dicono che le probabilità di scelta sono rispettivamente:
  0,4   0,3   0,2   0,1
  D'altra parte, per la diversa difficoltà dei corsi e severità degli insegnanti,
  le probabilità di riportare la massima votazione (30 trentesimi)
  variano da lingua a lingua e sono rispettivamente:
  0,1   0,2   0,3   0,9
  Supponiamo di sapere che un certo studente ha riportato 30 trentesimi nell'esame di Lingua.
  Che probabilità c'è che la materia d'esame sia stata Inglese?

  Risoluzione

$$p(\text{Inglese}/\text{"30"})=$$

$$=\frac{p(\mathrm{I})\cdot p(\text{"30"}/\mathrm{I})}{p(\mathrm{I})\cdot p(\text{"30"}/\mathrm{I})+p(\mathrm{F})\cdot p(\text{"30"}/\mathrm{F})+p(\mathrm{S})\cdot p(\text{"30"}/\mathrm{S})+p(\mathrm{T})\cdot p(\text{"30"}/\mathrm{T})}=$$

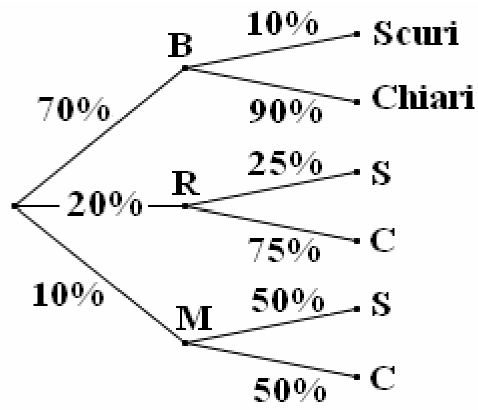
$$=\frac{0{,}4\cdot 0{,}1}{0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 0{,}9}=\frac{0{,}04}{0{,}04+0{,}06+0{,}06+0{,}09}=\frac{0{,}04}{0{,}25}=\frac{4}{25}=0{,}16$$

14.2 - Esercizi svolti (Teorema di Bayes)

Riprendiamo ora i problemi da cui avevamo preso spunto e risolviamoli.

- **In un paese scandinavo il 70% delle ragazze ha i capelli Biondi, il 20% li ha Rossi, il 10% Mori. Risulta poi che ha gli occhi Scuri il 10% delle Bionde, il 25% delle Rosse, il 50% delle More. Se la ragazza con cui ho fatto amicizia tramite Internet mi fa sapere che ha gli occhi Scuri, che probabilità c'è che sia Bionda?**

B	R	M	
70%	20%	10%	della popolazione femminile
10%	25%	50%	occhi Scuri



Risoluzione con la Formula di Bayes:

$p(\mathrm{B}) = 0{,}7 \qquad p(\mathrm{R}) = 0{,}2 \qquad p(\mathrm{M}) = 0{,}1$

$p(\mathrm{S/B}) = 0{,}1 \qquad p(\mathrm{S/R}) = 0{,}25 \qquad p(\mathrm{S/M}) = 0{,}5$

$$p(\mathrm{B/S}) = \frac{p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{S/B})}{p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{S/B}) + p(\mathrm{R})\cdot p(\mathrm{S/R}) + p(\mathrm{M})\cdot p(\mathrm{S/M})} =$$

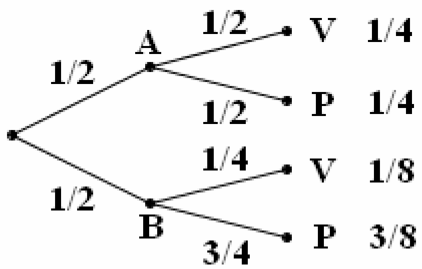
$$= \frac{0{,}7\cdot 0{,}1}{0{,}7\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}5} =$$

$$= \frac{0{,}07}{0{,}07 + 0{,}05 + 0{,}05} = \frac{0{,}07}{0{,}17} \approx 0{,}41 = 41\%$$

- **In un bar ci sono due macchinette mangiasoldi A e B. Effettuando una singola giocata su A si vince con probabilità 1/2 (in altre parole: si vince mediamente 1 volta su 2, o, se preferisci, all'incirca 500 volte su 1000), mentre giocando su B si vince con probabilità 1/4. Supponiamo di non sapere quale sia la macchinetta A e quale la B; se ne scegliamo una a caso, giochiamo una sola volta, e vinciamo, che probabilità c'è che la macchinetta scelta sia stata A?**

DIVERSI METODI O STILI DI RISOLUZIONE

1) Con la formula di Bayes



$$p(\mathrm{A/V}) = \frac{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{V/A})}{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{V/A}) + p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{V/B})} =$$

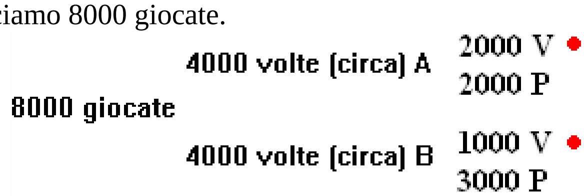
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

2) Pensando semplicemente ad un'applicazione della formula $\boldsymbol{p(\mathrm{X/Y}) = \dfrac{p(\mathrm{X}\wedge\mathrm{Y})}{p(\mathrm{Y})}}$

$$p(\mathrm{A}/\text{"Vittoria"}) = \frac{p(\mathrm{A}\wedge\mathrm{V})}{p(\mathrm{V})} = \frac{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{V/A})}{p(\mathrm{A}\wedge\mathrm{V}) + p(\mathrm{B}\wedge\mathrm{V})} = \frac{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{V/A})}{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{V/A}) + p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{V/B})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = \ldots = \frac{2}{3}$$

3) Con visione "frequentista"

Supponiamo di effettuare un numero elevato di giocate, diciamo 8000 giocate.



Pressappoco 4000 volte la scelta casuale della macchinetta cadrà su A, e pressappoco 4000 volte su B (legge empirica del caso). Delle circa 4000 volte che avremo giocato su A, vinceremo circa 2000 volte, mentre delle circa 4000 volte che avremo giocato su B vinceremo circa 1000 volte. Avremo perciò vinto 3000 volte circa. E di queste, pressappoco 2000 volte dovremo ringraziare A.

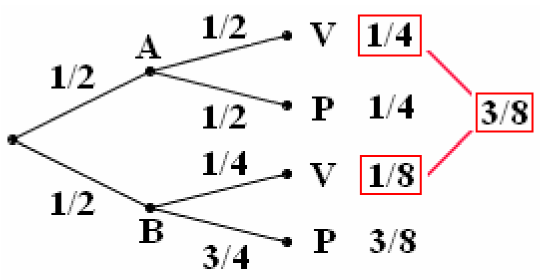
Perciò la probabilità richiesta (= probabilità che, avendo noi vinto, si debba ringraziare A) è $\frac{2000}{3000} = \frac{2}{3}$.

4) Pensando alle “fette di certezza”

Nella “torta della certezza”, di “peso” 1,
la “fetta di certezza” relativa a V
“pesa”, complessivamente, $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

Di questa fetta da 3/8,
la parte che compete all’evento “A, poi V” ha peso 1/4.

Il rapporto tra le due fette è quindi $\frac{1/4}{3/8}=\frac{2}{3}$.



UN ULTERIORE, BELL’ESEMPIO: GLI ARCIERI

a) Se quattro arcieri A, B, C, D scoccano la loro freccia contemporaneamente e hanno probabilità, rispettivamente, 1/2, 1/3, 1/4 e 1/5 di colpire il bersaglio (NOTA) che probabilità c’è che dopo il tiro simultaneo risulti conficcata nel bersaglio esattamente 1 freccia?
NOTA: si tratta, evidentemente, di valutazioni approssimative, di tipo soggettivo/frequentista

b) Se dopo il tiro simultaneo risulta conficcata nel bersaglio 1 e 1 sola freccia, che probabilità c’è che si tratti di quella dell’arciere A?

Risoluzione di a)

$$p(\mathrm{A})=1/2 \quad p(\mathrm{B})=1/3 \quad p(\mathrm{C})=1/4 \quad p(\mathrm{D})=1/5$$

$$p(\text{"}esattamente\ 1\ \ freccia\text{"}) = p(\mathrm{A}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{D}}) + p(\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{D}}) + p(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\mathrm{C}\,\overline{\mathrm{D}}) + p(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}\,\mathrm{D}) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{24+12+8+6}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

Risoluzione di b)

Possiamo risolvere questo quesito b) ricorrendo, formalmente,

1) **alla formula** $\boldsymbol{p(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) = \frac{p(\mathrm{X}\wedge\mathrm{Y})}{p(\mathrm{Y})}}$
2) **oppure alla formula di Bayes.**

I due procedimenti non differiscono molto né riguardo al principio ispiratore
(sempre di “cause”, o piuttosto, in questo caso, di “eventi concomitanti”, o di “fette di certezza”, si tratta),
né riguardo alla difficoltà nei calcoli (che sono anzi del tutto identici).

Dunque, vediamo.

1) **con la formula** $\boldsymbol{p(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) = \frac{p(\mathrm{X}\wedge\mathrm{Y})}{p(\mathrm{Y})}}$

$$p(\mathrm{A}/1\,\mathrm{e}\,1\,\mathrm{sola}) = \frac{p\big(\mathrm{A}\wedge(1\,\mathrm{e}\,1\,\mathrm{sola})\big)}{p\big(1\,\mathrm{e}\,1\,\mathrm{sola}\big)} = \frac{p(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}})}{p(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}}) + p(\overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}}) + p(\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}\overline{\mathrm{D}}) + p(\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\mathrm{D})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{24}{120}}{\frac{24}{120}+\frac{12}{120}+\frac{8}{120}+\frac{6}{120}} = \frac{24}{50} = 48\%$$

2) **con la formula di Bayes**

$$p(\mathrm{A}/1\,e\,1\,sola) =$$

$$= \frac{p(\mathrm{A})\cdot p(1\,e\,1\,sola/\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})\cdot p(1\,e\,1\,sola/\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})\cdot p(1\,e\,1\,sola/\mathrm{B}) + p(\mathrm{C})\cdot p(1\,e\,1\,sola/\mathrm{C}) + p(\mathrm{D})\cdot p(1\,e\,1\,sola/\mathrm{D})} =$$

$$= \frac{p(\mathrm{A})\cdot p(\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}})}{p(\mathrm{A})\cdot p(\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}}) + p(\mathrm{B})\cdot p(\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}}) + p(\mathrm{C})\cdot p(\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{D}}) + p(\mathrm{D})\cdot p(\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{24}{120}}{\frac{24}{120}+\frac{12}{120}+\frac{8}{120}+\frac{6}{120}} = \frac{24}{50} = 48\%$$

NOTA: abbiamo scritto semplicemente $p(1\,e\,1\,sola/\mathrm{A}) = p(\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}})$ anziché $p(1\,e\,1\,sola/\mathrm{A}) = p(\overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{D}}/\mathrm{A})$
per il fatto che le prestazioni di B, C e D in un dato tiro non sono condizionate dall'esito di A

ESERCIZI sul Teorema di Bayes

1) In un'urna U1 ci sono 2 palline Rosse e 1 Verde; in U2, 1 Rossa e 3 Blu; in U3, 2 Rosse e 3 Verdi.
Se si pesca da un'urna a caso non conoscendo di che urna si tratta, e la pallina estratta risulta Rossa, valutare la probabilità che l'urna di provenienza sia U3.

2) Le statistiche di un tribunale di provincia, relative ai processi ultimati nei trascorsi 15 anni, evidenziano che, fra gli accusati di un reato penale, il 24% era stato trattenuto in custodia cautelare (=carcerazione preventiva), gli altri lasciati a piede libero in attesa del processo.
Dei sottoposti a carcerazione preventiva, l'80% aveva poi avuto una sentenza di condanna definitiva, mentre fra gli altri soltanto il 64% erano stati riconosciuti colpevoli.
Determina, per un condannato di reato penale preso a caso, la probabilità di aver subito la custodia cautelare.

3) In un club di tifosi, i maschi sono il 75% e la metà di loro fuma. Fra le femmine, invece, fuma solo il 25%.
Che probabilità c'è per una persona presa a caso fra gli iscritti, di essere fumatore/fumatrice?
E presa a caso una persona che fuma in quel club, che probabilità c'è che si tratti di una donna?

4) Fra i fumatori di una certa città, il 60% acquista la marca "Bravo Furbo", e fra questi l'80% sono maschi.
Fra coloro che non comprano le sigarette "Bravo Furbo", la maggioranza (75%) è di femmine.
Presa una fumatrice a caso in quella città, che probabilità c'è che acquisti le "Bravo Furbo"?

5) In un paese asiatico, la probabilità che una radiolina della marca A sia difettosa è bassa: 0,1%.
La marca B, unica concorrente di A in quella nazione, fa ancora meglio: probabilità dello 0,05%.
Sul mercato, tuttavia, la marca A risulta prevalere, col 60% degli acquisti, perché la linea dei suoi prodotti è più carina. Che probabilità ha una radiolina perfettamente funzionante presa a caso, di essere della marca A?

6) Imposta un foglio elettronico in modo che l'utente possa inserire le probabilità relative ad un problema risolubile tramite la formula di Bayes (con $n=2$ e anche con $n=3$) e gli venga calcolata la risposta.

		p(H1/E)	P(H2/E)
p(H1)=	0,3	0,461538	0,538462
p(H2)=	0,7		
p(E/H1)=	0,8		
p(E/H2)=	0,4		

I dati vanno introdotti nelle celle ombreggiate

Dal sito http://classweb.gmu.edu *della George Mason University di Washington, USA, ecco due bei quesiti, uno sull'educazione dei figli e un altro sugli incidenti stradali.*

7) In una certa nazione è noto che il 20% delle madri suole sculacciare i figli indisciplinati. L'85% delle madri che applicano questa pratica fanno uso di Valium, contro il 25% soltanto delle madri che non sculacciano.
Questi dati sono tali da far supporre che il Valium induca le madri a sculacciare i loro figli? Discutine.

8) Una compagnia di assicurazioni auto prevede per i guidatori giovani una polizza più alta, in quanto questo gruppo tende ad avere un numero maggiore di incidenti. La compagnia distingue le età in 3 gruppi:
A (sotto i 25 anni, 22% di tutti i suoi assicurati), B (25-39 anni, 43%), C (da 40 anni in su).
I dati mostrano che in media ogni anno le percentuali di assicurati che hanno un incidente sono:
11% per il gruppo A, 3% per il B, 2% per il C.
  a) Che percentuale di assicurati ci si attende abbia un incidente nei prossimi 12 mesi?
  b) Se un assicurato X ha appena avuto un incidente, che probabilità c'è che abbia meno di 25 anni?

RISPOSTE

1) $p(\mathrm{U3}/\mathrm{R})=\dfrac{p(\mathrm{U3})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U3})}{p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1})+p(\mathrm{U2})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U2})+p(\mathrm{U3})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U3})}=\dfrac{1/3\cdot 2/5}{1/3\cdot 2/3+1/3\cdot 1/4+1/3\cdot 2/5}=\ldots=\dfrac{24}{79}\approx 30\%$

2) $p(\mathrm{CC}/\mathrm{cond})=\dfrac{p(\mathrm{CC})\cdot p(\mathrm{cond}/\mathrm{CC})}{p(\mathrm{CC})\cdot p(\mathrm{cond}/\mathrm{CC})+p(\overline{\mathrm{CC}})\cdot p(\mathrm{cond}/\overline{\mathrm{CC}})}=\dfrac{0,24\cdot 0,80}{0,24\cdot 0,80+0,76\cdot 0,64}=\dfrac{0,192}{0,6784}\approx 0,283$

3) Il 43,75%; intorno al 14%   4) Il calcolo dà un valore prossimo al 28,6%   5) Circa il 60%

7) $p(\mathrm{S}/\mathrm{V})=\dfrac{p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{V}/\mathrm{S})}{p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{V}/\mathrm{S})+p(\overline{\mathrm{S}})\cdot p(\mathrm{V}/\overline{\mathrm{S}})}=\dfrac{0,20\cdot 0,85}{0,20\cdot 0,85+0,80\cdot 0,25}=\dfrac{0,17}{0,17+0,20}=\dfrac{0,17}{0,37}\approx 0,46$

$p(\mathrm{S}/\overline{\mathrm{V}})=\dfrac{p(\mathrm{S})\cdot p(\overline{\mathrm{V}}/\mathrm{S})}{p(\mathrm{S})\cdot p(\overline{\mathrm{V}}/\mathrm{S})+p(\overline{\mathrm{S}})\cdot p(\overline{\mathrm{V}}/\overline{\mathrm{S}})}=\dfrac{0,20\cdot 0,15}{0,20\cdot 0,15+0,80\cdot 0,75}=\dfrac{0,03}{0,03+0,60}=\dfrac{0,03}{0,63}\approx 0,05$

Dai dati emerge che se una donna assume Valium, è senz'altro molto più incline a sculacciare i propri figli, ma… attenzione! … Sarà il Valium in sé a favorire questo comportamento, o piuttosto la depressione di cui plausibilmente soffrono queste donne, dato che fanno uso di Valium?

8a) $\dfrac{22}{100}\cdot\dfrac{11}{100}+\dfrac{43}{100}\cdot\dfrac{3}{100}+\dfrac{35}{100}\cdot\dfrac{2}{100}=\dfrac{242+129+70}{10000}=\dfrac{441}{10000}\approx 4,4\%$

8b) $p(\mathrm{A}/\mathrm{I})=\dfrac{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{I}/\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{I}/\mathrm{A})+p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{I}/\mathrm{B})+p(\mathrm{C})\cdot p(\mathrm{I}/\mathrm{C})}=\dfrac{0,22\cdot 0,11}{0,22\cdot 0,11+0,43\cdot 0,03+0,35\cdot 0,02}\approx 55\%$

14.3 - Ancora sulle “fette di certezza”

Volevo infine ritornare ancora un attimo sull’idea delle “fette di certezza”.
Un giorno sulla mailing list “*matfis*”, frequentata da insegnanti italiani di Matematica e Fisica interessati a scambi di idee e di esperienze didattiche, comparve la seguente e-mail:

“Non riesco a risolvere questo problema (tratto dal testo *Format SPE* di Maraschini-Palma). Ringrazio chi vorrà cimentarsi e comunicare la soluzione ottenuta ed il procedimento adottato”.

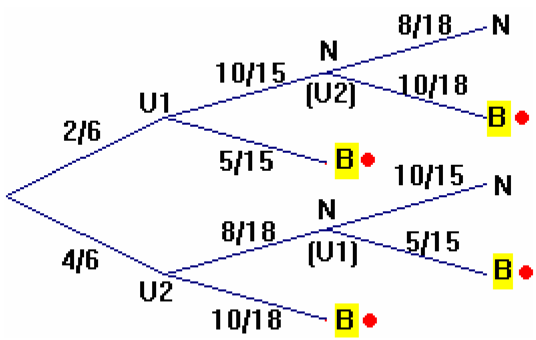
Si hanno due urne così composte:
U1 contiene 10 palline nere e 5 palline bianche,
U2 contiene 8 palline nere e 10 palline bianche.
Si lancia un dado e

- **se escono i numeri 1 o 2 si estrae una pallina dalla 1ª urna,**
- **altrimenti se ne estrae una dalla seconda.**

Se questa prima pallina estratta è nera, la si rimette nell'urna e si estrae un'altra pallina dall'urna che non conteneva la prima.

a) Rappresenta la situazione con un grafo ad albero

b) Nell'ipotesi che l'ultima pallina estratta, cioè la pallina visibile fuori dall'urna, sia bianca, calcola la probabilità che essa provenga dalla prima urna.



Diversi insegnanti risposero al messaggio proponendo loro risoluzioni del problema;
non fu facilissimo né immediato pervenire ad un accordo sullo svolgimento corretto…
il che indica chiaramente l’obiettiva difficoltà di problematiche di questo tipo.
Noi ora, con il nostro diagramma ad albero e l’idea vincente delle “*fette di certezza*”, troveremo abbastanza rapidamente il risultato esatto.

Dunque: i cammini che terminano con B sono quattro, e vengono percorsi con probabilità, rispettivamente, uguali a

$2/6\cdot 10/15\cdot 10/18; \quad 2/6\cdot 5/15; \quad 4/6\cdot 8/18\cdot 5/15; \quad 4/6\cdot 10/18.$

Essi costituiscono quindi quella parte della “torta” della certezza (posta uguale a 1) che è espressa dalla somma

$2/6\cdot 10/15\cdot 10/18 + 2/6\cdot 5/15 + 4/6\cdot 8/18\cdot 5/15 + 4/6\cdot 10/18.$

Fra i cammini considerati, quelli nei quali la pallina Bianca estratta risulta provenire dall’urna U1 sono soltanto due: il secondo cammino ed il terzo, ossia quei cammini che vengono percorsi con probabilità, rispettivamente,

$2/6\cdot 5/15$ e $4/6\cdot 8/18\cdot 5/15.$

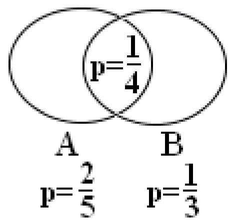
Pertanto questi due cammini si spartiscono una “fetta” di certezza uguale a

$2/6\cdot 5/15 + 4/6\cdot 8/18\cdot 5/15.$

Rapportando questa fetta di certezza con la fetta di certezza occupata dai quattro cammini che terminano con B, si perviene alla risposta al quesito:

$$\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{15}+\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{18}\cdot\frac{5}{15}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{10}{18}+\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{15}+\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{18}\cdot\frac{5}{15}+\frac{4}{6}\cdot\frac{10}{18}}=\ldots=\frac{17}{57}$$

Ci tengo comunque a sottolineare che **l’idea delle “fette di certezza” non è nient’altro che un modo “carino” di manipolare la probabilità “condizionata” (con l’annesso discorso della “restrizione dell’insieme universo”)!**



Se io per esempio dico che osservando il diagramma qui a fianco ($p(A\cap B)=\frac{1}{4},\ p(B)=\frac{1}{3}$)

posso desumere immediatamente la relazione $p(A/B)=\frac{1/4}{1/3}=\frac{3}{4}$, io affermo ciò perché

I) nella mia mente ho una “fetta di certezza” che “pesa” $1/4$ (quella di $A\cap B$)
e un’altra “fetta di certezza” che “pesa” $1/3$
(quella di B, nell’ambito del quale voglio rimanere perché, se mi interessa *p*(A/B), è B il mio insieme universo)
quindi, per andare a valutare quanto “pesa” A nell’ambito di B, mi viene spontaneo calcolare il quoziente $\frac{1/4}{1/3}$;

II) ma anche e soprattutto perché so (l’ho dimostrato!) che sussiste la relazione $\boxed{p(A/B)=\frac{p(A\wedge B)}{p(B)}}$!!!

… Come d’altronde, a ben guardare, nel quesito sulle urne e le palline dal quale abbiamo preso le mosse, la frazione che ci ha portato al risultato 17/57 coincide con quella frazione che avremmo ottenuto pensando di applicare il TEOREMA DI BAYES. Controlla tu stesso che è davvero così! $p(U1/\text{Bianca})=\ldots$

14.4 - Falsi positivi, falsi negativi

TEST DIAGNOSTICI: FALSI POSITIVI, FALSI NEGATIVI

Nella vita purtroppo capita (ad alcuni più sovente che ad altri) di essere sottoposti ad esami medici: che siano del sangue, o radiologici, o di qualsivoglia tipo, essi generalmente sono finalizzati a verificare se si è affetti o meno da una data patologia.

Se risulto "POSITIVO" all'esame vuol dire che PROBABILMENTE SONO MALATO.
Per la maggior parte dei test clinici, questo "probabilmente" non vuol dire "sicuramente": potrei infatti essere un "FALSO POSITIVO",
ossia potrebbe capitare che l'esame indichi erroneamente che sono malato mentre in realtà non lo sono.

Se risulto "NEGATIVO" all'esame vuol dire che PROBABILMENTE SONO SANO;
tuttavia, in genere, questo "probabilmente" non è una sicurezza completa;
potrei infatti essere un "FALSO NEGATIVO",
ossia potrebbe capitare che l'esame indichi erroneamente che sono sano mentre in realtà sono malato.

In medicina di solito si indaga sulla possibile presenza di una patologia mediante un test preliminare, poco costoso e/o poco "invasivo", per trarne una *prima indicazione* sulla probabilità che la malattia ci sia o non ci sia; eventualmente, se lo ritiene opportuno, il medico potrà poi prescrivere indagini più accurate e specialistiche, le quali dovrebbero stabilire con certezza pressoché assoluta la verità.

Tutto ciò si può riassumere nella tabella seguente:

		Esito del test preliminare	
		Positivo	Negativo
Condizione reale	Malati	Veri Positivi (VP)	Falsi Negativi (**FN**)
	Sani	Falsi Positivi (**FP**)	Veri Negativi (VN)

Un test diagnostico è "buono", è "affidabile",
nella misura in cui tende, in *presenza* di malattia, a fornire esito "positivo",
e nella misura in cui tende, in *assenza* di malattia, a fornire esito "negativo".

Questi due aspetti della bontà di un test
(rilevare effettivamente la malattia, se questa è presente, non rilevarla se questa è assente)
vengono chiamati rispettivamente la sua "sensibilità" e la sua "specificità".

$$\text{SENSIBILITA' di un test} = \text{probabilità che questo risulti positivo, nel caso si sia malati} = p(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})$$

$$\text{SPECIFICITA' di un test} = \text{probabilità che questo risulti negativo, nel caso si sia sani} = p(\mathrm{T}^-/\mathrm{S})$$

La sensibilità e la specificità di un test si stabiliscono tramite studi molto approfonditi nell'ambito dei quali la presenza o assenza della malattia in ognuno dei soggetti partecipanti all'indagine vengono riconosciute con sicurezza perché a tal fine si fa uso di metodi *più generali* e/o *più sofisticati* rispetto al test stesso.

Le cosiddette ricerche "epidemiologiche", poi, permettono di determinare, in una data popolazione, la "PREVALENZA" della malattia, ossia la percentuale della popolazione che ne è portatrice,
o, il che è lo stesso, la probabilità, per un soggetto "pescato" a caso nella popolazione, di essere malato.

$$\begin{aligned}&\text{PREVALENZA di una malattia in una popolazione} =\\&= \text{percentuale di malati sul totale della popolazione} =\\&= \text{probabilità, per un individuo preso a caso nella popolazione, di essere malato} =\\&= p(\mathrm{M}) = \frac{\textit{numero malati}}{\textit{numero totale di individui nella popolazione}}\end{aligned}$$

Si dice "VALORE PREDITTIVO POSITIVO" di un test la probabilità,
per un individuo che si è sottoposto al test e ha avuto esito positivo, di avere realmente la malattia:

$$\text{VALORE PREDITTIVO POSITIVO di un test (V.P.P.)} = \text{prob., se il test è positivo, di essere davvero malati}$$

$$\text{V.P.P.} = p(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = \frac{n^\circ\ \textit{malati fra i positivi}}{n^\circ\ \textit{positivi}} \quad \textit{opp.} \quad \text{V.P.P.} = p(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) \overset{Bayes}{=} \frac{p(\mathrm{M})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})}{p(\mathrm{M})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{M}) + p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{S})}$$

Si dice "VALORE PREDITTIVO NEGATIVO" di un test la probabilità,
per un individuo che si è sottoposto al test e ha avuto esito NEGATIVO, di essere realmente sano:

$$\text{VALORE PREDITTIVO NEGATIVO di un test (V.P.N.)} = \text{prob., se il test è negativo, di essere davvero sani}$$

$$\text{V.P.N.} = p(\mathrm{S}/\mathrm{T}^-) = \frac{n^\circ\ \textit{sani fra i negativi}}{n^\circ\ \textit{negativi}} \quad \textit{opp.} \quad \text{V.P.N.} = p(\mathrm{S}/\mathrm{T}^-) \overset{Bayes}{=} \frac{p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{T}^-/\mathrm{S})}{p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{T}^-/\mathrm{S}) + p(\mathrm{M})\cdot p(\mathrm{T}^-/\mathrm{M})}$$

ESEMPIO 1 (PRELIMINARE: si fanno conteggi su un gran numero di persone, poi da questi conteggi si traggono valutazioni di probabilità)

Da studi epidemiologici si sa che una data malattia è presente nel 4% della popolazione considerata.
Ora, un determinato test (ancora in fase sperimentale … pochissimo costoso, ma anche assai poco affidabile!)

♪ se praticato su di una persona effettivamente malata,
produce esito positivo nel 90% dei casi (Veri Positivi) e negativo nel rimanente 10% (Falsi Negativi)

♫ se praticato su di una persona sana,
produce esito negativo nel 95% dei casi (Veri Negativi) e positivo nel rimanente 5% (Falsi Positivi)

Se si prendono10000 persone a caso nella popolazione, e le si sottopone tutte e 10000 al test,

a) quanti pressappoco saranno davvero i Malati?
b) quanti pressappoco saranno davvero i Sani?
c) quanti saranno i Veri Positivi al test?
d) quanti saranno i Falsi Negativi al test?
e) quanti saranno i Falsi Positivi al test?
f) quanti saranno i Veri Negativi al test?
g) quanti saranno *in totale* i Positivi al test?
h) quanti saranno *in totale* i Negativi al test?
i) per un Malato, qual è la probab. di essere Positivo?
j) per un Malato, qual è la probab. di essere Negativo?
k) per un Sano, qual è la probab. di essere Negativo?
l) per un Sano, qual è la probab. di essere Positivo?
m) per un Positivo, qual è la probab. di essere Malato?
n) per un Negativo, qual è la probab. di essere Malato?
o) per un Negativo, qual è la probab. di essere Sano?
p) per un Positivo, qual è la probab. di essere Sano?

RISPOSTE:

a) $M = 10000 \cdot 4/100 = 400$

b) $S = 10000 - 400 = 9600$

c) $VP = 400 \cdot \frac{90}{100} = 360$

d) $FN = 400 \cdot \frac{10}{100} = 40 \ \ (\textit{oppure}: 400 - 360 = 40)$

e) $FP = 9600 \cdot \frac{5}{100} = 480$

f) $VN = 9600 \cdot \frac{95}{100} = 9120$

g) $P = VP + FP = 360 + 480 = 840$

h) $N = VN + FN = 9120 + 40 = 9160$

i) $p(T^+/M) = \frac{VP}{M} = \frac{360}{400} = 0{,}90$ (*già lo si sapeva*)

j) $p(T^-/M) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$ (*già lo si sapeva*)

k) $p(T^-/S) = \frac{VN}{S} = \frac{9120}{9600} = 0{,}95$ (*già lo si sapeva*)

l) $p(T^+/S) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ (*già lo si sapeva*)

m) $\underbrace{p(M/T^+)}_{V.P.P.} = \frac{VP}{P} = \frac{360}{840} \approx 0{,}4286$

n) $p(M/T^-) = \frac{FN}{N} = \frac{40}{9160} \approx 0{,}0044$

o) $\underbrace{p(S/T^-)}_{V.P.N.} = \frac{VN}{N} = \frac{9120}{9160} \approx 0{,}9956$

p) $p(S/T^+) = \frac{FP}{P} = \frac{480}{840} \approx 0{,}5714$

OSSERVAZIONE
Le probabilità di cui ai punti m), n), o), p) si sarebbero potute calcolare anche applicando il **Teorema di Bayes**:

m) $\underbrace{p(M/T^+)}_{V.P.P.} = \frac{p(M) \cdot p(T^+/M)}{p(M) \cdot p(T^+/M) + p(S) \cdot p(T^+/S)} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}90}{0{,}04 \cdot 0{,}90 + 0{,}96 \cdot 0{,}05} = \frac{0{,}036}{0{,}036 + 0{,}048} = \frac{0{,}036}{0{,}084} \approx 0{,}4286$

n) $p(M/T^-) = \frac{p(M) \cdot p(T^-/M)}{p(M) \cdot p(T^-/M) + p(S) \cdot p(T^-/S)} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}10}{0{,}04 \cdot 0{,}10 + 0{,}96 \cdot 0{,}95} = \frac{0{,}004}{0{,}004 + 0{,}912} = \frac{0{,}004}{0{,}916} \approx 0{,}0044$

o) $\underbrace{p(S/T^-)}_{V.P.N.} = \frac{p(S) \cdot p(T^-/S)}{p(S) \cdot p(T^-/S) + p(M) \cdot p(T^-/M)} = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}95}{0{,}96 \cdot 0{,}95 + 0{,}04 \cdot 0{,}10} = \frac{0{,}912}{0{,}912 + 0{,}004} = \frac{0{,}912}{0{,}916} \approx 0{,}9956$

m) $p(S/T^+) = \frac{p(S) \cdot p(T^+/S)}{p(S) \cdot p(T^+/S) + p(M) \cdot p(T^+/M)} = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}05}{0{,}96 \cdot 0{,}05 + 0{,}04 \cdot 0{,}90} = \frac{0{,}048}{0{,}048 + 0{,}036} = \frac{0{,}048}{0{,}084} \approx 0{,}5714$

ESERCIZI

1) Una patologia virale infetta il 3% della popolazione di un dato territorio. Il test diagnostico più diffuso, su 100 persone sane che si sottopongono al test, mediamente diagnostica per errore 2 falsi positivi; e in compenso su 100 malati che si sottopongono al test, mediamente diagnostica per errore 2 falsi negativi.
   a) Se una persona ha avuto esito positivo al test, che probabilità c’è che sia davvero malata?
   b) E se ha avuto esito negativo al test, che probabilità c’è che sia davvero immune?
   c) Se la percentuale dei malati nella popolazione raddoppiasse, come cambierebbero tali due probabilità?

2) Un test per la gravidanza è ancora in fase sperimentale.
Negli studi per perfezionarlo, fino ad ora si sono sottoposte al test 912 donne, delle quali la metà davvero incinte e la metà no, coi risultati raccolti nella tabella qui a fianco.

	incinte	non incinte
positive	424	10
negative	32	446

Si domanda: se il test venisse commercializzato così com'è,
a) una donna davvero incinta, che probabilità avrebbe, pressappoco, di risultare positiva?
b) E una donna che risultasse positiva, che probabilità avrebbe di essere davvero incinta?
c) Se una donna risultasse negativa, che probabilità avrebbe di essere invece incinta?

3) Imposta un foglio elettronico in modo che l'utente possa inserire le probabilità relative ad un problema sui test diagnostici e gli venga calcolata la risposta.
Utilizzalo poi per fare simulazioni, variando prevalenza, sensibilità e specificità.

prevalenza=p(M)=	0,08	p(M/T+)=VPP	0,892018779
da cui p(S)	0,92	p(S/T-)=VPN	0,99562746
p(T+/M)=sensibilità=	0,95	**Gli unici dati che l'utente deve inserire**	
p(T+/S), conseguenza della specificità (qui sotto)	0,01	**sono quelli nelle celle grigie:**	
p(T-/S)=specificità=	0,99	**tutti gli altri valori li deve calcolare**	
p(T-/M), conseguenza della sensibilità (in alto)	0,05	**automaticamente il foglio elettronico**	

4) Supponiamo che, per un test diagnostico, la probabilità di risultare positivi se malati sia del 96% e la probabilità di risultare negativi se si è sani sia del 98%.
Supponiamo di somministrare il test a tappeto in una popolazione di 10000 individui.
Allora il numero di falsi positivi e di falsi negativi dipende dalla prevalenza della malattia nella popolazione, ossia dalla percentuale di popolazione affetta dalla malattia.
Calcola il numero atteso di falsi positivi e di falsi negativi sotto l'ipotesi
a) che la prevalenza della patologia sia del 5%   b) che la prevalenza della patologia sia dell'1%.

5)

	T –	T +	
M –	2280	5	2285
M+	27	124	151
	2307	129	2436

La tabella qui a fianco è stata riempita sperimentando un nuovo test diagnostico su 2436 persone (i veri malati sono stati riconosciuti attraverso indagini più costose e accurate).
Quanti falsi positivi ci sono stati? Quanti falsi negativi?
In che percentuale (arrotondando all'intero) si può valutare il V.P.P. (= Valore Predittivo Positivo) di questo test? E in che percentuale (sempre arrotondando all'intero) il V.P.N. (Valore Predittivo Negativo)?

6) Una accurata ricerca clinica ha mostrato che un determinato virus è presente nel 2% della popolazione.
Il test più diffuso per rilevare la presenza del virus (pericoloso soltanto qualora la persona abbia il sistema immunitario compromesso) ha una "sensibilità" del 97% e una "specificità" del 999 per 1000.
Calcolare il "V.P.P." (= Valore Predittivo Positivo) del test.

7) Se la specificità di un test è 1, cosa si può dire del Valore Predittivo Positivo di quel test?

Il seguente problema, preso dal sito www.ufl.edu della University of Florida, ha un risultato che forse non ci si aspetta, ma di cui, riflettendo, si comprende bene la ragione!

8) Per un test diagnostico, sono uguali al 95% tanto la sensibilità quanto la specificità.
La prevalenza della malattia nella popolazione è dell'1%.
Una persona viene selezionata a caso nella popolazione, e sottoposta al test.
Se putacaso questa persona risulta positiva, che probabilità ha di essere davvero malata?

RISPOSTE

1) a) $p(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = \dfrac{p(\mathrm{M})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})}{p(\mathrm{M})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{M}) + p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{S})} = \dfrac{0{,}03\cdot 0{,}98}{0{,}03\cdot 0{,}98 + 0{,}97\cdot 0{,}02} \approx 60\%$

b) $p(\mathrm{S}/\mathrm{T}^-) = \dfrac{p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{T}^-/\mathrm{S})}{p(\mathrm{S})\cdot p(\mathrm{T}^-/\mathrm{S}) + p(\mathrm{M})\cdot p(\mathrm{T}^-/\mathrm{M})} = \dfrac{0{,}97\cdot 0{,}98}{0{,}97\cdot 0{,}98 + 0{,}03\cdot 0{,}02} \approx 99{,}9\%$ (*il calcolo dà* 0,999369...)

c) Se la percentuale dei malati nella popolazione raddoppiasse, la 1ª percentuale diventerebbe del 76% circa e la 2ª, pur diminuendo leggerissimamente, sarebbe ancora vicina al 99,9% (il calcolo dà 0,998699…)

2) Arrotondando all'unità: a) ≈93% b) ≈98% c) ≈7%   4) a) 190; 20 b) 198; 4   5) 5; 27; 96%; 99%

6) $\text{V.P.P.} = p(\mathrm{V}/\mathrm{T}^+) = \dfrac{p(\mathrm{V})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{V})}{p(\mathrm{V})\cdot p(\mathrm{T}^+/\mathrm{V}) + p(\overline{\mathrm{V}})\cdot p(\mathrm{T}^+/\overline{\mathrm{V}})} = \dfrac{0{,}02\cdot 0{,}97}{0{,}02\cdot 0{,}97 + 0{,}98\cdot 0{,}001} \approx 95\%$ 7) che è anch'esso =1

8) ≈16%. Perché così bassa? Logico: i sani nella popolazione sono tanti, e il 5% dei sani, se testato, risulta falsamente positivo, quindi se la persona - estratta a caso fra tutta la popolazione - riporta dal test esito positivo, è più facile che si tratti di un falso positivo che di un malato … Meno male!

☼ **Per parecchi di essi è richiesto di conoscere il CALCOLO COMBINATORIO … o comunque il CC è una delle possibili strade per rispondere**

15 - ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1) In una piccola classe di 15 allievi ne vengono estratti 4 per un'interrogazione. Panico. La probabilità che tanto Aldo quanto Bruno (entrambi impreparati) la facciano franca, è maggiore o minore di 1/2?

2) Da un mazzo di 52 carte (per ciascuno dei 4 semi: A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)
se ne pescano, dopo aver mischiato, due. Che probabilità c'è di ottenere un "blackjack"
(= ossia, che una carta sia un asso e l'altra abbia valore 10 quindi sia un 10 o una figura)?

3) Un bosco di montagna ospita un gruppetto di 12 cerbiatti.
5 animali vengono catturati, marchiati con un segno di riconoscimento e poi lasciati nuovamente liberi.
Se dopo un po' di giorni se ne ricatturano 3, che probabilità c'è che
a) tutti e tre portino il marchio? b) almeno uno porti il marchio?

4) Si lancia una moneta per 10 volte consecutive. Che probabilità c'è che si abbiano almeno 2 esiti diversi fra loro?

5) In un'urna, ci sono 30 palline Bianche e 20 Nere. Viene estratta una pallina, che viene messa da parte.
Dall'urna con una pallina in meno viene estratta una seconda pallina.
Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

6) In un'urna, ci sono 30 palline Bianche e 20 Nere. Viene estratta una pallina, che viene poi rimessa nell'urna.
Viene quindi fatta un'altra estrazione. Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

7) La "tabella di vita" seguente si riferisce a un campione di 1000 elefanti di mare (Mirounga angustirostri) dell'isola di Año Nuevo (California), e riporta il numero di sopravvissuti all'età x (Clinton-Leboeuf, 1993).

x (*anni*)	*numero di sopravvissuti all'età x*	x (*anni*)	*numero di sopravvissuti all'età x*
0	1000	8	104
1	490	9	69
2	396	10	41
3	324	11	14
4	283	12	11
5	264	13	8
6	202	14	2
7	139	15	0

Si domanda, per un elefante marino, come può essere valutata la probabilità di
a) raggiungere i 5 anni di età b) raggiungere i 10 anni c) vivere non meno di 10 anni

8) Si sono iscritte ad una Università 104 matricole, dopo il superamento di un impegnativo test di ingresso.
Tuttavia, viste le risultanze del test, 24 fra questi studenti sono chiamati a frequentare un corso di recupero di Computer, 18 uno di Inglese; e i 2/3 di questi ultimi dovranno seguire pure Computer.
Si domanda qual è la probabilità che uno studente scelto a caso fra quei 104 non sia tenuto a partecipare a nessuno dei due corsi.

9) Se un giocatore di poker ha un tris d'assi in mano, che probabilità c'è che fra questi ci sia l'asso di cuori?

10) Gli iscritti a un club sono per i 3/5 maschi e per i 2/5 femmine.
Il 30% dei maschi beve alcoolici, contro il 10% soltanto delle più intelligenti femmine.
Per un maschio preso a caso, la probabilità di essere astemio qual è?
E per un astemio a caso, qual è la probabilità di essere maschio?

11) Nel mio astuccio tengo 5 penne biro, ma 2 non funzionano … sì, sono d'accordo, dovrei buttarle via, ma intanto mi domando: se pescassi 2 penne a caso, che probabilità avrei che siano entrambe buone?

12) Gastone Paperone, quell'odioso fortunello, aveva comprato 3 biglietti alla lotteria della festa del quartiere. Erano stati messi in vendita 1000 biglietti, e l'ultimo giorno della festa furono estratti a sorte i 5 vincenti …
bene, tanto per cambiare, proprio *tutti e tre* i biglietti di Gastone risultarono vincenti! Quack! ☹
a) Che probabilità c'era che accadesse una circostanza così favorevole all'antipatico pennuto?
Anche Paperino aveva acquistato 10 biglietti, ma purtroppo nessuno di essi risultò vincente.
b) Che probabilità c'era per Paperino di non riuscire a beccare neppure uno dei premi?
c) Se dopo l'estrazione di ciascuno dei primi 3 biglietti vincenti, si sente Gastone esultare perché ha vinto tutte e tre le volte … che probabilità ha *in questo momento* Paperino di possedere almeno un biglietto vincente?

13) Ci sono 2 urne, U1 con 1 pallina Rossa e 4 Nere e U2 con 3 R e 1 N.
E’ maggiore la probabilità di pescare una Rossa:
a) scegliendo un’urna a caso e pescando?
b) o mettendo insieme, in un’urna sola, il contenuto delle due urne, e pescando?

14) Una popolazione di batteri è formata per il 10% da individui resistenti all’azione di un dato antibiotico, per il 90% da individui non resistenti. Si valuta che ciascuno di questi ultimi abbia probabilità 0,01 (1%) di sopravvivere più di 24 ore alla terapia con quell’antibiotico, mentre per i batteri del ceppo “resistente” tale probabilità sale allo 0,2.
a) Preso a caso un batterio, che probabilità c’è che sopravviva più di 24 ore alla somministrazione dell’antibiotico?
b) E se un batterio è sopravvissuto, che probabilità c’è che sia del tipo “resistente”?

15) Supponi che nella tabella seguente (compilata a partire da rilevazioni statistiche in una determinata nazione) q_x indichi la probabilità, per una persona di sesso maschile di x anni, di morire prima di compiere x+1 anni.

q_{85}	0,130
q_{86}	0,140
q_{87}	0,151
q_{88}	0,163
q_{89}	0,175

Sapresti calcolare la probabilità, per un uomo di quella nazione che ha appena compiuto gli 85 anni, di festeggiare il novantesimo compleanno?

16) Con 8 lanci di una moneta, determina la probabilità che esca Testa:
a) le prime 3 volte (poi, un esito qualsiasi) b) le prime 3 volte soltanto (poi, sempre croce)
c) esattamente 3 volte d) meno di 3 volte e) almeno 3 volte

17) Se una coppia ha un numero pari di figli, determina la probabilità che siano tanti maschi quante femmine, supponendo che la probabilità di nascere maschio oppure femmina sia esattamente ½ (anche se non è precisamente vero: nella realtà, le nascite maschili sono un pochino più frequenti di quelle femminili) e ipotizzando che il numero dei figli sia: a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

18) Ci sono 2 urne, U1 con 1 pallina Rossa e 4 Nere e U2 con 3 R e 1 N.
Se si sceglie un’urna a caso, si pesca una pallina e questa risulta Rossa, stabilisci qual è la probabilità che l’urna di provenienza sia U1.

19) Se una persona sale deliberatamente sull’autobus senza biglietto (e si espone così al rischio di pagare una multa), supponendo che il biglietto costi 2 euro e 50 centesimi, e la contravvenzione in caso di controllo sia di 80 euro, è un po’ come se quella persona attribuisse al passaggio del controllore una certa probabilità! Quale, in percentuale?

20) Un insegnante di matematica assegna a ciascuno dei 24 ragazzi di una classe un’equazione diversa, scritta su un bigliettino. Poi si fa restituire i bigliettini, chiama uno degli studenti alla lavagna e gli fa correggere 3 esercizi pescandoli a caso fra quelli già assegnati.
Che probabilità c’è, in percentuale, che uno di questi coincida con quello che l’alunno ha già eseguito?

21) Un’urna contiene 9 palline numerate da 1 a 9. Se ne pescano, una dopo l’altra e senza reimbussolamento, due. Qual è la probabilità che moltiplicando i due numeri corrispondenti, il prodotto sia maggiore di 50?

22) Un’urna contiene n palline Bianche, n Rosse, n Verdi.
a) Calcolare la probabilità che, pescando simultaneamente 2 palline, esse siano dello stesso colore.
b) Calcolare la probabilità che, estraendo una pallina, reinserendola nell’urna, poi estraendo una seconda pallina, esse risultino dello stesso colore.

23) Un’urna contiene 9 palline numerate progressivamente da 1 a 9. Estraendone 5, e sommando i numeri che portano, che probabilità c’è di ottenere un risultato a) pari? b) dispari?

24) Si lanciano 4 dadi a forma di tetraedro regolare e ci si chiede con quali probabilità:
a) gli esiti saranno tutti diversi fra loro b) gli esiti saranno tutti uguali fra loro
c) usciranno due, e due soltanto, delle quattro facce 1, 2, 3, 4

25) Ho messo 5 paia di vecchie scarpe, alla rinfusa, in uno scatolone, che ho poi scosso più volte con energia.
a) Se adesso vado a pescare 5 scarpe a casaccio, che probabilità c’è che fra queste ci sia almeno un paio?
b) E se di scarpe ne pescassi 4? c) E se ne pescassi 3? d) E se ne pescassi 6?

26) Sul ripiano della reception dell'hotel ci sono 10 chiavi,
fra cui quelle delle stanze di Aldo, Bruno, Carlo e Dario.
Se i quattro scegliessero a caso, senza guardare, che probabilità ci sarebbe che
a) becchino ciascuno la chiave giusta?
b) becchino, nel complesso, le 4 chiavi giuste, salvo poi doversele eventualmente scambiare fra loro?

27) Lanciando 10 volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere più Teste che Croci?
E se le monete fossero 9?

28) Si effettuano 5 lanci successivi di una moneta.
Determinare la probabilità che esca Testa a) almeno 2 volte di seguito b) almeno 3 volte di seguito

29) Si lanciano 5 dadi. Che probabilità c'è che almeno 2 mostrino la stessa faccia?

30) Si lanciano 5 dadi. Che probabilità c'è che almeno 3 mostrino la stessa faccia?

31) Si lanciano 5 monete. Si attribuisce a ogni uscita di "Testa" 1 punto, a ogni uscita di "Croce" 2 punti.
Calcolare le probabilità di totalizzare, in questo modo, i vari punteggi possibili.

32) Si lanciano 10 dadi a forma di tetraedro regolare (ciascuno ha 4 facce, numerate 1, 2, 3, 4)
e ci si chiede qual è la probabilità che l'esito "4" si presenti almeno 3 volte.

33) Ci sono due monete, una regolare e l'altra truccata.
Lanciando la moneta truccata si ottiene "Testa" con probabilità del 60%.
Si sceglie una moneta a caso e la si lancia per 3 volte di seguito.
Nel caso si siano ottenute tutte "Teste", che probabilità c'è che la moneta scelta sia stata quella truccata?

34) **I DUE GIOCHI DEL CAVALIERE DI MERÉ**

Nell'anno 1654 un accanito giocatore d'azzardo, il Cavaliere di Meré, si rivolse al filosofo e matematico Blaise Pascal perché lo aiutasse a far luce su due questioni che lo arrovellavano.

LA PRIMA era questa.

Come mai, si domandava il Cavaliere, se punto sull'uscita di un 6 con 4 lanci di un dado, mi rendo conto, nella pratica del gioco, che non ho le stesse probabilità di vincere che avrei puntando sull'uscita di un doppio 6 con 24 lanci di 2 dadi?

Il gentiluomo riteneva che le due probabilità dovessero essere uguali,
perché faceva nella sua mente il ragionamento che segue:
la probabilità che esca 6 lanciando un singolo dado è 1/6;
ma allora, lanciando 4 dadi, la probabilità di uscita del 6 dovrebbe essere $4 \cdot 1/6 = 4/6 = 2/3$*;*
e allo stesso modo, poiché nel lancio di una coppia di dadi la probabilità di un "doppio 6" è 1/36,
lanciando i due dadi per 24 volte questa probabilità dovrebbe valere $24 \cdot 1/36$ *che è ancora uguale a 2/3*.

a) Sapresti spiegare per qual motivo il ragionamento del Cavaliere era sbagliato?
b) E sapresti ricalcolare in modo corretto le due probabilità in esame?

LA SECONDA questione era relativa a un "problema delle poste".

**Supponiamo che due giocatori A e B disputino una sequenza di partite,
in ciascuna delle quali ognuno ha la stessa probabilità di vincere dell'altro.
L'accordo è di assegnare la vittoria a colui che si aggiudica per primo 3 partite.
La posta in gioco è di 64 monete.
Come andrà suddivisa equamente tale posta se A e B interrompono il gioco quando A è in vantaggio 2 a 1 su B?**

c) Rispondi tu al Cavaliere
d) E se il punteggio parziale fosse di 2 a 0 per A, come andrebbe suddivisa la posta?

35) **IL PROBLEMA DI PEPYS E NEWTON**

Nel 1693 Samuel Pepys pose a Isaac Newton il problema seguente:
è più probabile ottenere

a) almeno un 6 lanciando 6 dadi?
b) o almeno due 6 lanciando 12 dadi?
c) o almeno tre 6 lanciando 18 dadi?

… Tu, che risposta daresti?
(serviti di un foglio elettronico per i calcoli!)

36) Se si estraggono due palline da un'urna contenente $b+n$ palline, di cui b Bianche ed n Nere, dimostra che la probabilità che escano due palline di colori diversi è uguale a $\frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$.
E quale sarà la probabilità che escano due palline dello stesso colore??

37) *Il "classico" problema dell'ubriacone*
Immaginiamo la situazione seguente:
un ubriaco rientra con grande fatica a casa, ma non ricorda più quale sia la chiave e, trovandosi nelle tasche ben 5 chiavi simili, tutte senza etichetta, tenta prima con una, poi con un'altra …
Si desidera stabilire quanti tentativi dovrebbe effettuare affinché la probabilità di azzeccare la chiave giusta vada a superare ½, nell'ipotesi
a) che l'ubriaco metta da parte la chiave usata dopo ogni tentativo, quindi non riprovi più con quella le volte successive
b) che il suo stato sia così disastroso da far sì che dopo ogni tentativo tutte e 5 le chiavi caschino a terra mescolandosi, e costringendolo, ahimè, a … ricominciare daccapo.

38) (*Serviti di un foglio elettronico per i calcoli*!)
a) Supponiamo di prendere un mazzo da scopa (40 carte), e di pescare una carta dopo l'altra, senza reinserimenti nel mazzo.
Ci domandiamo:
quante pescate occorre fare affinché la probabilità di pescare una Donna superi ½?
b) Prendi un mazzo da scopa (40 carte), e metti da parte le sole 10 carte di cuori.
Ora mischia queste ultime e pesca una carta dopo l'altra, senza rimetterla nel mazzetto dopo l'estrazione.
   1) Quanti tentativi sono necessari affinché la probabilità di pescare la Donna di Cuori superi ½?
   2) E se invece si rimettesse la carta nel mazzetto da dieci dopo ogni estrazione, quale sarebbe la risposta?

39) Qual è la probabilità, lanciando una coppia di dadi, che esca almeno un 6 o almeno un 1?

40) Qual è la probabilità, lanciando tre dadi, che esca almeno un 6 o almeno un 1?

41) Qual è la probabilità, lanciando tre dadi, che esca almeno un 6 e almeno un 1?

42) Se si lancia un tappino di plastica, la probabilità che cada fermandosi con la parte cava verso l'alto è diversa dalla probabilità che la parte cava risulti invece rivolta verso il basso
(tali probabilità possono essere valutate annotando le frequenze relative su un numero elevato di lanci).
Ma dette a e b queste due probabilità, qualunque esse siano, si può dimostrare che, lanciando per due volte di seguito il tappo, è più facile che escano due risultati fra loro uguali piuttosto che due risultati differenti.
Non è banale, questa dimostrazione! Ci riusciresti?

43) Che probabilità c'è che, fra le 5 carte che il mazziere serve a un giocatore di poker, ci sia almeno una coppia?
("Almeno" vuol dire che ci potrà essere una singola coppia o anche un gioco superiore, che contenga una coppia, ossia una doppia coppia, un tris, un full o un poker. Tuttavia, si può rispondere anche *senza* sommare le probabilità della coppia, della doppia coppia, del tris, del full e del poker …)

44) Una ditta possiede 3 macchine per la produzione delle sue penne biro.
La macchina M1 è più veloce, ma anche meno precisa;
infatti mediamente 1 penna su 200 che esce da questa è difettosa.
Da M2 esce all'incirca 1 penna difettosa su 250, e da M3 una difettosa su 300.
Le penne vengono distribuite ai negozianti in scatole da 50 pezzi (fabbricati da una medesima macchina).
Dicevamo che M1 era la più veloce: in effetti, su 4 scatole prodotte dalla fabbrica, 2 contengono penne prodotte da M1, 1 da M2, 1 da M3.
Ciò premesso, valutare la probabilità
a) che una penna estratta da una scatola appena arrivata dalla fabbrica al negozio (non si sa se proveniente da M1, o da M2, o da M3), sia priva di difetti
b) che nella scatola da 50 ci sia almeno una penna difettosa (*serviti di un foglio elettronico per i calcoli*)

45) Se lancio 10 monete finché vengano almeno 8 "teste" (cioè: annullo il lancio e lo ripeto se non sono uscite almeno 8 "teste"), che probabilità ho di ottenere "testa" su tutte e 10 le monete?

46) Si estraggono 4 carte, simultaneamente, da un mazzo;
la probabilità che siano tutti "ori" (= quadri) sarà maggiore se il mazzo è di 40 carte, o se è di 52 carte?
Cerca di arrivarci col ragionamento, poi calcola effettivamente le due probabilità.

47) Stesso quesito di prima, supponendo di reinserire ogni carta nel mazzo e mischiare prima di estrarne un'altra.

48) Si estraggono 4 carte, simultaneamente, da un mazzo; la probabilità che siano di semi tutti diversi sarà maggiore se il mazzo è di 40 carte, o se è di 52 carte?
Cerca di arrivarci col ragionamento, poi calcola effettivamente le due probabilità.

49) Stesso quesito precedente supponendo di reinserire ogni carta nel mazzo e mischiare, prima di estrarne un'altra.

50) Lanciando 3 dadi, che probabilità c'è che la somma dei punteggi dia a) 18? b) 9?

51) Ci sono 2 urne, U1 con 1 R e 4 N e U2 con 3 R e 1 N. Se si sceglie un'urna a caso, si pescano da essa 3 palline e le si mette nell'altra urna, poi da questa si estrae una pallina, stabilisci qual è la probabilità che quest'ultima sia Rossa.

52) Conoscendo $p(\mathrm{A}/\mathrm{B})=0,4$; $p(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{B}})=0,3$; $p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=0,5$, determinare $p(\mathrm{A})$ e $p(\mathrm{B})$
(indicazione: porre $p(\mathrm{A})=x$, $p(\mathrm{B})=y$ e considerare che deve essere

$$p(\mathrm{A})=p(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B})+p(\mathrm{A}\wedge\overline{\mathrm{B}})=\ldots \qquad p(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B})=\left\langle\begin{array}{l} p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \\ p(\mathrm{B})\cdot p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \end{array}\right.$$

53) In una certa stazione salgono 3 persone sul treno. Questo treno effettuerà altre 5 fermate in totale.
Calcolare la probabilità che le 3 persone, che non si conoscono, scendano tutte alla stessa fermata.

Per gentile concessione dei proff. Aristide San Martini e Marco Perone Pacifico dell'Università di Roma:

54) a) Supponiamo che ogni confezione di detersivo "LAVO" contenga un tagliando su cui è stampata una delle quattro lettere che compongono il suo nome.
Se si raccolgono 4 tagliandi con tutte le lettere del nome si riceve una confezione gratis.
Se tutte le lettere hanno la stessa probabilità di essere contenute in una confezione, qual è la probabilità che comprando quattro confezioni del detersivo si riesca ad avere una confezione gratis?

b) In realtà, l'aver aperto una confezione con una certa lettera *influisce* sulla probabilità che la confezione acquistata successivamente contenga una lettera diversa da quella.
L'aumento di probabilità è in relazione col numero totale delle confezioni:
se queste sono tantissime, l'incremento di probabilità è impercettibile, del tutto trascurabile, mentre se le confezioni fossero poche, tale incremento "si sentirebbe".
Supponi ad esempio che le confezioni di detersivo siano in totale 20 solamente, di cui 5 recanti la lettera L, 5 la A, 5 la V, 5 la O.
Vai ora a ricalcolare la probabilità richiesta e vedrai che giungerai ad un valore ben diverso.
E se le confezioni fossero solo 8 in totale?

55) Una persona scrive 3 lettere, prende 3 buste fra loro identiche, inserisce ogni lettera in una busta,
… e distrattamente chiude le buste con la colla prima di scrivere gli indirizzi.
Se ora questi 3 indirizzi li scrivesse a caso, che probabilità ci sarebbe che almeno una delle 3 lettere giunga correttamente a destinazione?

56) Un'urna contiene 3 palline Rosse e 7 Nere.
Si gioca in questo modo:
due giocatori, X e Y, estraggono una pallina a turno
(prima X, poi Y, poi di nuovo X, ecc.).
La pallina NON viene reinserita nell'urna dopo l'estrazione.
Vince chi estrae per primo una pallina Rossa.
Calcolare la probabilità che X (il primo a pescare) vinca il gioco.

57)
Paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone.
Supponendo, per semplicità, che nessuna di esse sia nata il 29 febbraio, determinare la probabilità che almeno 2 festeggino il compleanno nello stesso giorno, e successivamente servirsi del foglio elettronico per stabilire qual è il minimo valore di n per cui tale probabilità supera ½.

Il cortese professor Lucio Torelli, dell'Università degli Studi di Trieste,
ci autorizza a utilizzare i suoi problemi seguenti:

58) Un neon su due, in media, si brucia entro un periodo di sei mesi se lasciato acceso ininterrottamente.
Viene montato un neon su ciascuno degli otto pianerottoli di un palazzo.
Qual è la probabilità che nessun neon si sia bruciato dopo sei mesi?
Qual è la probabilità che si siano bruciati tutti e otto i neon dopo sei mesi?
In media quanti neon mi aspetto che si bruceranno in tale periodo?

59) Supponi che il 30% di pazienti punti con un ago infetto dal virus dell'epatite B sviluppi realmente la malattia.
Supponi ora di selezionare in maniera arbitraria 5 individui dalla popolazione di tali pazienti.
Qual è la probabilità che nessuno di questi 5 sviluppi la malattia?
Qual è la probabilità che la malattia si sviluppi nella maggioranza dei casi?
Su 50 di tali pazienti, in quanti casi - pressappoco - mi aspetto che si sviluppi la malattia?

60) La tavola di contingenza considera la presenza (M+) o l'assenza (M –) di una certa malattia in maschi (M) e femmine (F). Gli eventi "femmina" (F) e "presenza di malattia" (M+) sono indipendenti?

	M+	M–	
M	56	123	179
F	114	87	201
	170	210	380

61) Sia data la seguente tavola di contingenza, relativa a un certo test diagnostico:

	T–	T+	
M–	66,9%	21,1%	88,0%
M+	1,5%	10,5%	12,0%
	68,4%	31,6%	100,0%

Su una popolazione di 1328 persone, quanti veri positivi mi aspetto?
Quanto vale il valore predittivo negativo (V.P.N.) del test?

62) Di un test diagnostico è nota la specificità = 90% e si sa che la prevalenza della malattia è del 5%.
Quanti falsi positivi, in percentuale, mi aspetto, se sottopongo al test un gruppo di persone prese a caso nella popolazione?

Col consenso dell'Autore Dario Palladino (Università di Genova),
riporto due bellissimi esercizi tratti dal testo
"pigreco", di Palladino - Scotto - Frixione, edizioni Principato:

63) Una principessa deve scegliere lo sposo fra tre pretendenti che non conosce
e che le vengono presentati uno alla volta. Se ne rifiuta uno, non può più sceglierlo.
Adotta la seguente strategia:
rifiuta comunque il primo; sceglie il secondo solo se è più bello del primo; altrimenti sceglie il terzo.
Verificare che la sua probabilità di scegliere il più bello è 1/2, contro 1/3 che otterrebbe scegliendo a caso.

64) a) Un quiz è formato da 72 domande alle quali bisogna rispondere sì o no e si decide di assegnare la sufficienza a chi, presumibilmente, sa rispondere alla metà di esse.
Tenuto conto che gli esaminati, per le domande su cui non sono preparati, tirano a indovinare, quante risposte esatte devono dare per meritare la sufficienza?

b) Un quiz è formato da 72 domande alle quali bisogna rispondere sì o no.
Un esaminando dà 43 risposte esatte. A quante domande si può presumere che sapesse rispondere?

Indicazione: *detto x il numero delle domande a cui sa rispondere*, *si ottiene l'equazione*: $x+\frac{1}{2}\cdot(...)=43$

Da "Fifty challenging problems in probability with solutions"
di Frederick Mosteller, Courier Dover Publications:

65) A drawer contains red socks and black socks.
When two socks are drawn at random, the probability that both are red is 1/2.
How small can the number of socks in the drawer be?

GRAZIE a Stefano Barbero e Nadir Murru (Università di Torino), per questi loro garbati problemi:

66) A Paperopoli le bevande che vanno per la maggiore sono la Papercola, la Rockepsi e la Duckanta e si sa che l'85% della popolazione consuma abitualmente tali bevande.
Dai sondaggi di Paperone e di Rockerduck possessori rispettivamente della Papercola e della Rockepsi, risultano le seguenti percentuali per il consumo di bevande tra i paperopolesi:
60% consumatori di Papercola di cui il 50 % consuma anche Rockepsi;
50% consumatori di Rockepsi di cui il 40% consuma anche Duckanta;
40% consumatori di Duckanta di cui il 50% consuma anche Papercola.
Qual è la probabilità che un paperopolese scelto a caso sia un consumatore di tutte e tre le bevande?

67) Le industrie Dormiben sottopongono a un test di qualità le produzioni di materassi dei loro stabilimenti di Ocopoli e Paperopoli.
E' noto che il 5% dei materassi prodotti a Ocopoli e il 10% di quelli prodotti a Paperopoli risultano scomodi e che il 40% dei materassi da testare proviene da Ocopoli.
Il pigro Ciccio Papero viene scelto come collaudatore.
a) Qual è la probabilità che si trovi scomodo su un materasso scelto a caso?
b) Qual è la probabilità che tale materasso scomodo provenga da Paperopoli?
c) Qual è il numero minimo di materassi da sottoporre al test affinché la probabilità che Ciccio ne trovi scomodo almeno uno superi il 50%?

68) Uno stagno è pieno di rospi di sottospecie diverse. Tutti si nutrono di insetti (mosche o zanzare), e una ricerca per una tesi di laurea ha stabilito che il 60% mangia mosche e il 50% zanzare.
Catturando un rospo a caso, qual è la probabilità che questo si nutra sia di mosche che di zanzare?

69) Pierino è molto goloso di caramelle al limone e all'arancia; detesta invece quelle alla menta.
In un sacchetto ci sono 12 caramelle alla menta, 5 al limone e 4 all'arancia.
Se pesca senza guardare 2 caramelle, qual è la probabilità che ce ne sia almeno una che gli piaccia?
E che gli piacciano tutte e due?

70) In un'aiuola con 8 rose, 4 di queste son bianche e 4 rosse;
se 4 api si posano senza preferenze su questi fiori, qual è la probabilità che si tratti di 2 bianchi e 2 rossi?
E qual è la probabilità che i fiori siano invece i 4 rossi?

PROBLEMI ASSEGNATI ALL'ESAME DI STATO DEL LICEO SCIENTIFICO:

71) Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative.
Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
(2011, P.N.I.)

72) Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze.
Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi? (2001, PNI)

73) Tre scatole A, B e C contengono lampadine prodotte da una certa fabbrica, di cui alcune difettose.
A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada.
Qual è la probabilità che essa sia difettosa? (2003, PNI)

74) Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi?
Se la prova viene ripetuta, qual è la probabilità di avere due 10 in sei "doppi lanci"?
E qual è la probabilità di avere almeno due 10 in sei "doppi lanci"? (2005, PNI)

75) Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro.
Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta? (2006, PNI)

76) In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti.
Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse? (2008, PNI)

Ti appassionano, questi esercizi?
Ne vorresti altri?
Su Internet c'è solo l'imbarazzo della scelta!

Ad esempio, clicca QUI ⇨ o QUI ⇨ (Università di Genova)
o in alternativa cerca liberamente con un motore di ricerca,
anche con parole chiave inglesi (probability exercises, probability problems …)

RISPOSTE

1) $\frac{13}{15}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{10}{12}>52\%$ [*evento a più fasi*] *oppure* $\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}>52\%$ [*quaterne ordinate*] *oppure* $\frac{\binom{13}{4}}{\binom{15}{4}}>52\%$ [*quaterne non ordinate*]

2) $\frac{4}{52}\cdot\frac{16}{51}+\frac{16}{52}\cdot\frac{4}{51}\approx 4{,}8\%$ [*evento a due fasi*] *oppure* $\frac{4\cdot 16+16\cdot 4}{52\cdot 51}\approx 4{,}8\%$ [*coppie ordinate*] *oppure* $\frac{4\cdot 16}{\binom{52}{2}}\approx 4{,}8\%$ [*coppie non ordinate*]

3) a) $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{1}{22}$ *oppure* $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$ *oppure* … b) $1-\frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{37}{44}$ *oppure* $1-\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}$ *oppure* …

4) $p=1-\frac{2}{1024}=\frac{511}{512}$ (anche: $p=1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]=\frac{511}{512}$)

5) a) $\frac{30}{50}\cdot\frac{29}{49}=\frac{87}{245}$ b) $\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}=\frac{38}{245}$ c) $\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}+\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}=\frac{24}{49}$ *oppure* $1-\left(\frac{87}{245}+\frac{38}{245}\right)=\frac{24}{49}$

6) a) $\frac{30}{50}\cdot\frac{30}{50}=\frac{9}{25}$ b) $\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}=\frac{4}{25}$ c) $\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{50}+\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{50}=\frac{12}{25}$ *oppure* $1-\left(\frac{9}{25}+\frac{4}{25}\right)=\frac{12}{25}$

7) a) $\frac{264}{1000}=26{,}4\%$ b) $\frac{41}{1000}=4{,}1\%$ c) $\frac{41}{1000}=4{,}1\%$

8) Si risponde tracciando un diagramma di Venn, oppure scrivendo:

$$n(\mathrm{C}\cup\mathrm{I})=n(\mathrm{C})+n(\mathrm{I})-n(\mathrm{C}\cap\mathrm{I})=24+18-\frac{2}{3}\cdot 18=30;$$

$$p(\mathrm{C}\cup\mathrm{I})=\frac{30}{104};\quad p(\overline{\mathrm{C}}\cap\overline{\mathrm{I}})=p(\overline{\mathrm{C}\cup\mathrm{I}})=1-p(\mathrm{C}\cup\mathrm{I})=1-\frac{30}{104}=\frac{74}{104}\approx 71\%$$

9) $p=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}}=\frac{3}{4}$ (che i casi equipossibili siano 4 e quelli favorevoli 3 lo si capisce, comunque, anche senza scomodare il Calcolo Combinatorio) *oppure* $p=1-\frac{\overbrace{1}^{\text{NOTA}}}{\binom{4}{3}}=\frac{3}{4}$

NOTA: probabilità di avere l'unico tris d'assi senza l'asso di cuori

10) $p(astemio/maschio)=1-p(bevitore/maschio)=1-0{,}30=0{,}70=70\%$

$$p(maschio/astemio)=\frac{p(m)\cdot p(a/m)}{p(m)\cdot p(a/m)+p(f)\cdot p(a/f)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{70}{100}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{70}{100}+\frac{2}{5}\cdot\frac{90}{100}}=\frac{21}{39}\approx 54\%$$

oppure con un semplice diagramma di Venn...

11) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$ *oppure* $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$

12)

a) $\frac{\binom{997}{2}}{\binom{1000}{5}}=\frac{\frac{997\cdot 996}{2\cdot 1}}{\frac{1000\cdot 999\cdot 998\cdot 997\cdot 996}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0{,}00000006$ [*le cinquine, contenenti i* 3 *biglietti di Gastone, sono tante quante le coppie costruibili prendendo, per completare la cinquina,* 2 *fra i* 997 *biglietti rimanenti*]

opp., pensando che i 5 *numeri vincenti fossero già stati estratti (e tenuti segreti) prima della messa in vendita dei* 1000:

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{1000}{3}}=\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{1000\cdot 999\cdot 998}{3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0{,}00000006 \;\; o \;\; \frac{5}{1000}\cdot\frac{4}{999}\cdot\frac{3}{998}\approx 0{,}00000006$$

b) $\dfrac{\binom{990}{5}}{\binom{1000}{5}} \approx 0{,}95 = 95\%$ *oppure* $\dfrac{990}{1000}\cdot\dfrac{989}{999}\cdot\dfrac{988}{998}\cdot\dfrac{987}{997}\cdot\dfrac{986}{996} \approx 0{,}95$

oppure (*dal punto di vista dei* 10 *acquisti di Paperino,*
pensando che i 5 *numeri vincenti fossero già stati estratti – e tenuti segreti – prima della messa in vendita dei* 1000):

$\dfrac{\binom{995}{10}}{\binom{1000}{10}} \approx 0{,}95$ *o anche* $\dfrac{995}{1000}\cdot\dfrac{994}{999}\cdot\dfrac{993}{998}\cdot\dfrac{992}{997}\cdot\dfrac{991}{996}\cdot\dfrac{990}{995}\cdot\dfrac{989}{994}\cdot\dfrac{988}{993}\cdot\dfrac{987}{992}\cdot\dfrac{986}{991} \approx 0{,}95$

Beh, Paperino non è stato, questa volta, *particolarmente* sfortunato …

c) $1-\dfrac{987}{997}\cdot\dfrac{986}{996} \approx 0{,}02 = 2\%$ *oppure* $1-\dfrac{\binom{987}{2}}{\binom{997}{2}} = 1-\dfrac{\frac{987\cdot 986}{2\cdot 1}}{\frac{997\cdot 996}{2\cdot 1}} \approx 0{,}02$ *oppure* ...

13) a) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{19}{40}=0{,}475$ b) $\dfrac{4}{9}=0{,}444...$

14) a) $p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{S}\wedge\mathrm{R}) + p(\mathrm{S}\wedge\overline{\mathrm{R}}) = p(\mathrm{R})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{R}) + p(\overline{\mathrm{R}})\cdot p(\mathrm{S}/\overline{\mathrm{R}}) = 0{,}10\cdot 0{,}2 + 0{,}90\cdot 0{,}01 = 0{,}029 = 2{,}9\%$

b) $p(\mathrm{R}/\mathrm{S}) = \dfrac{p(\mathrm{R})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{R})}{p(\mathrm{R})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{R}) + p(\overline{\mathrm{R}})\cdot p(\mathrm{S}/\overline{\mathrm{R}})} = \dfrac{0{,}10\cdot 0{,}2}{0{,}10\cdot 0{,}2 + 0{,}90\cdot 0{,}01} \approx 69\%$

15) Arrotondando, 44%.
E’ vero che le condizioni generali della medicina, dell’alimentazione, della esposizione a patologie, ecc. cambiano, sia pure leggermente, nel tempo, quindi questa valutazione di probabilità, che presuppone uno “sguardo in avanti” di 5 anni nel futuro, non può per sua natura essere pienamente adeguata.
Comunque vadano le cose, è però vicinissima alla realtà: 5 anni sono davvero pochi.
L’informazione va tuttavia correttamente interpretata. Essa significa che, preso un gran numero di persone di quella nazione che hanno appena compiuto gli 85 anni, all’incirca il 44% festeggerà il 90° compleanno.
Se invece il nonno di Pierino compie oggi 85 anni, la probabilità che lui, proprio lui, sopravviva fino a 90 anni, va più correttamente valutata tenendo conto delle condizioni di salute note di quella determinata persona!

16) a) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

b) $\underbrace{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}_{\substack{\text{Testa}\\ \text{le prime}\\ \text{3 volte}}}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}_{\substack{\text{Croce}\\ \text{le altre}\\ \text{volte}}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{1}{256}$

c) $\binom{8}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{7}{32}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{37}{256}$

e) $1-\dfrac{37}{256}=\dfrac{219}{256}$

17) a) $\underset{\mathrm{M}}{\dfrac{1}{2}}\cdot\underset{\mathrm{F}}{\dfrac{1}{2}}+\underset{\mathrm{F}}{\dfrac{1}{2}}\cdot\underset{\mathrm{M}}{\dfrac{1}{2}}$ *oppure* $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$ MM **MF** • **FM** • FF

b) $\binom{4}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}=0{,}375$ c) $\binom{6}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}=0{,}3125$ d) $\binom{8}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{70}{256}=\dfrac{35}{128}=0{,}2734375$

18) $p(\mathrm{U1}/\mathrm{R}) = \dfrac{p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1})}{p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1}) + p(\mathrm{U2})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U2})} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{19}$

19) $\le 3{,}125\%$

20) $\dfrac{\binom{23}{2}}{\binom{24}{3}}=\dfrac{1}{8}=12{,}5\%$ (Le terne non ordinate di esercizi, contenenti l’esercizio che lo studente ha già svolto, sono tante quante le coppie non ordinate costruibili utilizzando 2 dei 23 esercizi rimanenti)

21) $\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{6\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{1}{8}+\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{7\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{2}{8}+\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{8\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{2}{8}+\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{9\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{9}$ (anche, ovviamente, con la conta dei casi possibili e dei favorevoli)

22) a) $\dfrac{3\cdot\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}}=\dfrac{3\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{3n(3n-1)}{2}}=\dfrac{n-1}{3n-1}$

Si può anche pensare di estrarle una dopo l'altra anziché simultaneamente (la probabilità richiesta, infatti, non cambierebbe!).
Si estrae una pallina; qualunque sia l'esito, restano $n-1$ palline dello stesso colore della prima estratta, e $3n-1$ palline in totale.
Dunque la probabilità, all'estrazione successiva, di pescare una pallina dello stesso colore di quella estratta per prima, è $\dfrac{n-1}{3n-1}$

b) $\dfrac{1}{3}$

23) a) Il numero dei casi possibili è $\binom{9}{5}$.

Fra i numeri interi da 1 a 9 ce ne sono 5 Dispari (1, 3, 5, 7, 9) e 4 Pari (2, 4, 6, 8).
L'evento "somma pari" si verifica quando, delle 5 palline estratte, portano un numero dispari 2 palline, oppure 4 palline.

Allora il numero dei casi favorevoli è $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}+\binom{5}{4}\cdot\binom{4}{1}=40+20=60$

perché le cinquine di palline con 2 dispari si ottengono abbinando a 2 palline scelte fra le 5 dispari, 3 palline scelte fra le 4 pari, mentre le cinquine di palline con 4 dispari si ottengono abbinando a 4 palline scelte fra le 5 dispari, 1 pallina scelta fra le 4 pari.

La probabilità richiesta è dunque $p(somma\ \ pari)=\dfrac{60}{\binom{9}{5}}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$

b) $p(somma\ \ dispari)=1-\dfrac{10}{21}=\dfrac{11}{21}$

24) a) $1\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{4}$ *oppure* $\dfrac{4!}{4^4}$ b) $1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}$ *oppure* $\dfrac{4}{4^4}$

c) $\binom{4}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}-2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{21}{64}$ *oppure* $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\left(2^4-2\right)}{4^4}$ NOTA: i termini preceduti dal segno "$-$" servono per escludere i casi di esiti tutti uguali

25) a) $1-1\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{6}{8}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{2}{6}$ *opp.* $1-\dfrac{2^5}{\binom{10}{5}}$ b) $1-1\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{6}{8}\cdot\dfrac{4}{7}$ *opp.* $1-\dfrac{\binom{5}{4}\cdot 2^4}{\binom{10}{4}}$ c) $1-1\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{6}{8}$ *opp.* $1-\dfrac{\binom{5}{3}\cdot 2^3}{\binom{10}{3}}$ d) 1

26) a) Numero casi possibili $=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$. Numero casi favorevoli $=1$. $p=1/5040$

Oppure: $p=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{7}$ (sceglie uno dei quattro, poi un altro, ecc.)

b) Quaterne non ordinate: numero casi possibili = $\binom{10}{4}$; numero casi favorevoli $=1$. $p=\dfrac{1}{210}$

27) $p(\mathrm{T}>\mathrm{C})=\binom{10}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+\binom{10}{7}\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\binom{10}{8}\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\binom{10}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\cdot\dfrac{1}{2}+\binom{10}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=$

$$=\left[\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=(210+120+45+10+1)\cdot\frac{1}{1024}=\frac{193}{512}$$

oppure (*molto meglio*!): $p(\mathrm{T}>\mathrm{C})=\dfrac{1-p(\mathrm{T}=\mathrm{C})}{2}=\dfrac{1-\binom{10}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5}{2}=\dfrac{1-252\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{2}=\dfrac{1-\dfrac{252}{1024}}{2}=\dfrac{\dfrac{772}{1024}}{2}=\dfrac{193}{512}$

Con 9 monete: la risposta si coglie IMMEDIATAMENTE, per simmetria, ed è ovviamente ½.

D'altronde:
$$p(\mathrm{T}>\mathrm{C})=\binom{9}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4+\binom{9}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\frac{1}{2}+\binom{9}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9=$$
$$=\left[\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=(126+84+36+9+1)\cdot\frac{1}{512}=\frac{256}{512}=\frac{1}{2}$$

28) a) $\frac{19}{32}$ b) $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ 29) $1-1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}$ *oppure* $1-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^5}$

30) $\frac{6\cdot\binom{5}{3}\cdot5^2+6\cdot\binom{5}{4}\cdot5+6}{6^5}$ *oppure* $6\cdot\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+6\cdot\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\frac{5}{6}+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5$

31) $p(5)=p(tutte\ \mathrm{T})=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ $\quad p(6)=p(4\mathrm{T},1\mathrm{C})=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$

$p(7)=p(3\mathrm{T},2\mathrm{C})=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}$ $\quad p(8)=p(2\mathrm{T},3\mathrm{C})=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}$

$p(9)=p(1\mathrm{T},4\mathrm{C})=\binom{5}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$ $\quad p(10)=p(tutte\ \mathrm{C})=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

32) $1-\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+10\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9+\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8\right]\approx0,4744$

33) $p(truccata/3\ teste)=\frac{p(truccata)\cdot p(3\ teste/truccata)}{p(truccata)\cdot p(3\ teste/truccata)+p(non\ truccata)\cdot p(3\ teste/non\ truccata)}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot(0,6)^3}{\frac{1}{2}\cdot(0,6)^3+\frac{1}{2}\cdot(0,5)^3}=\frac{(0,6)^3}{(0,6)^3+(0,5)^3}=\frac{0,216}{0,216+0,125}=\frac{0,216}{0,341}\approx0,633=63,3\%$$

34)

a) Per un "evento unione" le probabilità si sommano solo quando gli eventi-base sono *incompatibili*, altrimenti la formula è più complicata.
Ora, se pensiamo ad esempio al quadruplo lancio del singolo dado,
l'evento "esce 6 al 1° lancio, e un risultato qualsiasi agli altri lanci" (evento che ha probabilità 1/6)
NON è incompatibile con l'evento "esce 6 al 2° lancio, e un risultato qualsiasi agli altri lanci" … ecc. …
D'altronde, se il ragionamento del Cavaliere fosse corretto, ne deriverebbe come conseguenza
che lanciando per 6 volte un dado, la probabilità di uscita di un 6 si porti a valere 1
e quindi che lanciando per 6 volte un dado, si abbia la certezza assoluta dell'uscita di un 6 …
… addirittura: con 7 lanci, la probabilità diventerebbe 7/6, il che non ha senso alcuno
essendo una probabilità comunque sempre compresa fra 0 e 1.

b) $p(almeno\ un\ 6\ con\ 4\ lanci\ di\ un\ dado)=1-p(nessun\ 6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0,5177...$

$p(almeno\ un\ \text{"}doppio\ 6\text{"}\ con\ 24\ lanci\ di\ una\ coppia\ di\ dadi)=1-p(nessun\ \text{"}doppio\ 6\text{"})=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0,4914...$

c) Casi possibili per le partite successive, dopo che la situazione è di 2 partite vinte da A contro 1 vinta da B:
A (e A vince, perché arriva a 3)
BA (vince A)
BB (vince B)
Sennonché, questi 3 casi … non sono equipossibili!
Per avere un set di casi equipossibili dobbiamo pensare alla situazione "fittizia" seguente
("fittizia" perché, se A è già a 3 punti, non ha molto senso effettuare una quarta partita):
AA (vince A)
AB (vince A)
BA (vince A)
BB (vince B)
Pertanto A ha probabilità ¾ di vincere, e se si vuole ripartire equamente la posta
in seguito all'interruzione del gioco, bisognerà dare i ¾ delle 64 monete ad A.
Ad A spetteranno perciò 48 monete, e 16 a B.

Oppure: $p(vince\ \mathrm{A})=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{A}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{BA}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ con la medesima conclusione.

d) $p(vince\ \mathrm{A})=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{A}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{BA}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{BBA}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ da cui 56 monete ad A e 8 a B.

35) $p(\text{almeno un } 6 \text{ lanciando } 6 \text{ dadi}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,6651$

$$p(\text{almeno due } 6 \text{ lanciando } 12 \text{ dadi}) = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11}\right] \approx 0,6187$$

$$p(\text{almeno tre } 6 \text{ lanciando } 18 \text{ dadi}) = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{18} + 18 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} + \binom{18}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16}\right] \approx 0,5973$$

36) $p(\text{colori diversi}) = \dfrac{b \cdot n}{\binom{b+n}{2}} = \dfrac{bn}{\frac{(b+n)(b+n-1)}{2}} = \dfrac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$

oppure $\dfrac{b}{b+n} \cdot \dfrac{n}{b+n-1} + \dfrac{n}{b+n} \cdot \dfrac{b}{b+n-1} = \ldots$

(*osserviamo che nel primo modo abbiamo pensato a coppie non ordinate, nel secondo abbiamo immaginato di estrarre una pallina poi subito dopo un'altra, introducendo così un ordine comunque irrilevante per la probabilità cercata*)

$p(\text{colori uguali}) = 1 - p(\text{colori diversi}) = 1 - \dfrac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$

oppure pensando a un evento a due fasi;

o anche: $p(\text{colori uguali}) = \dfrac{\binom{b}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{b+n}{2}} = \dfrac{\frac{b(b-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(b+n)(b+n-1)}{2}} = \dfrac{\frac{b^2 - b + n^2 - n}{2}}{\frac{(b+n)(b+n-1)}{2}} = \dfrac{b^2 - b + n^2 - n}{(b+n)(b+n-1)} =$

$$= \frac{(b+n)^2 - 2bn - (b+n)}{(b+n)(b+n-1)} = \frac{(b+n)(b+n-1) - 2bn}{(b+n)(b+n-1)} = \frac{(b+n)(b+n-1)}{(b+n)(b+n-1)} - \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)} = 1 - \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$$

37) a) $p_k =$ probabilità di azzeccare la chiave giusta esattamente al k-esimo tentativo

$p_1 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ $\quad p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ $\quad p_1 + p_2 = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ $\quad p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ $\quad p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$

quindi: dopo 3 tentativi.

Anche, più semplicemente: se fa $n \le 5$ tentativi, l'ubriaco si trova a utilizzare *n* chiavi sulle 5 che ha; è come se ci fosse una lotteria con 5 biglietti, col biglietto vincente già estratto ma non reso pubblico. Comprando *n* biglietti, la probabilità di vincere il premio è *n*/5, perché i casi possibili sono 5 (il premio può essere stato assegnato a uno qualunque dei 5 biglietti), mentre i casi favorevoli sono *n* (vinco il premio se questo risulta essere stato assegnato a uno degli *n* biglietti che ho scelto).
Ora, $n/5 > 1/2$ a partire da $n = 3$.

O ancora: il numero di tentativi cercato coincide col numero dei tentativi per cui la probabilità di non azzeccare mai la chiave giusta scende al di sotto del valore ½.

E si ha $p(\text{primi } 3 \text{ tentativi tutti falliti}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$

b) Indichiamo sempre con p_k la probabilità di azzeccare la chiave giusta esattamente al *k*-esimo tentativo.

$p_1 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$

$p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ $\quad p_1 + p_2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25} < \frac{1}{2}$

$p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$ $\quad p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125} = \frac{61}{125} < \frac{1}{2}$

$p_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{64}{625}$ $\quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125} + \frac{64}{625} = \frac{369}{625} > \frac{1}{2}$

quindi la risposta è: dopo 4 tentativi.

Oppure: il numero di tentativi cercato coincide col numero dei tentativi per cui la probabilità di non azzeccare mai la chiave giusta scende al di sotto del valore ½.

E si ha $p(\text{primi } 4 \text{ tentativi tutti falliti}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{256}{625} < \frac{1}{2}$

38) a) almeno 7 pescate (il prodotto $\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}\cdot\ldots$ relativo alla probabilità dell'evento contrario comincia a essere <½ a partire da 7 fattori)

b1) almeno 6 tentativi b2) almeno 7 tentativi: $1-(9/10)\wedge n > 1/2$ per $n \geq 7$

39) La parola-chiave "almeno" quasi sempre fa sì che sia conveniente pensare all'evento contrario.
Ma qual è l'evento contrario di "esce almeno un 6 o almeno un 1"?
Ricordiamo le leggi di De Morgan $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}, \quad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$!

$$\overline{almeno\ un\ 6 \vee almeno\ un\ 1} = \overline{almeno\ un\ 6} \wedge \overline{almeno\ un\ 1} = nessun\ 6 \wedge nessun\ 1$$

$$p(almeno\ un\ 6 \vee almeno\ un\ 1) = 1 - p(\overline{almeno\ un\ 6 \vee almeno\ un\ 1}) =$$
$$= 1 - p(nessun\ 6 \wedge nessun\ 1) = 1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{5}{9} \quad \text{oppure} \quad 1 - \frac{4\cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$$

40) $p(almeno\ un\ 6 \vee almeno\ un\ 1) = 1 - p(nessun\ 6 \wedge nessun\ 1) = 1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{19}{27}$

41) $p(almeno\ un\ 6 \wedge almeno\ un\ 1) = 1 - p(nessun\ 6 \vee nessun\ 1) =$
$$= 1 - \left[p(nessun\ 6) + p(nessun\ 1) - p(nessun\ 6 \wedge nessun\ 1)\right] = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3\right] = 1 - \frac{186}{216} = \frac{30}{216} = \frac{5}{36}$$

42) $p(2\ risultati\ uguali) = a\cdot a + b\cdot b = a^2 + b^2;\qquad p(2\ risultati\ diversi) = a\cdot b + b\cdot a = 2ab$
Ora, si ha sicuramente $a^2 + b^2 > 2ab$
perché $a^2 + b^2 - 2ab > 0$ *equivale ad* $(a-b)^2 > 0$, *che è sempre verificata quando* $a \neq b$

43) $1 - 1\cdot\frac{28}{31}\cdot\frac{24}{30}\cdot\frac{20}{29}\cdot\frac{16}{28}$ *oppure* (NOTA) $1 - \frac{\binom{8}{5}\cdot 4^5}{\binom{32}{5}}$

NOTA - L'evento contrario è "nessuna coppia";
e per esso, i casi favorevoli si possono contare
supponendo di scegliere 5 fra gli 8 valori A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7
e, per ciascun valore, una delle 4 carte di quel valore.

44) a) $p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{D}\wedge\mathrm{M1}) + p(\mathrm{D}\wedge\mathrm{M2}) + p(\mathrm{D}\wedge\mathrm{M3}) = p(\mathrm{M1})\cdot p(\mathrm{D}/\mathrm{M1}) + p(\mathrm{M2})\cdot p(\mathrm{D}/\mathrm{M2}) + p(\mathrm{M3})\cdot p(\mathrm{D}/\mathrm{M3}) =$
$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{200} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{250} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{300} = \frac{1}{400} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1200} = \frac{15+6+5}{6000} = \frac{26}{6000} = \frac{13}{3000}$$
$$p(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - p(\mathrm{D}) = 1 - \frac{13}{3000} = \frac{2987}{3000} \approx 0{,}9957$$

b) $p(tutte\ buone) = p(tutte\ buone \wedge \mathrm{M1}) + p(tutte\ buone \wedge \mathrm{M2}) + p(tutte\ buone \wedge \mathrm{M3}) =$
$$= p(\mathrm{M1})\cdot p(tutte\ buone/\mathrm{M1}) + p(\mathrm{M2})\cdot p(tutte\ buone/\mathrm{M2}) + p(\mathrm{M3})\cdot p(tutte\ buone/\mathrm{M3}) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{200}\right)^{50} + \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{250}\right)^{50} + \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{300}\right)^{50} = poco\ più\ dell'80\%$$
$$p(almeno\ una\ difettosa) = 1 - p(tutte\ buone) = poco\ meno\ del\ 20\%$$

45) I casi possibili sono tanti quante le sequenze di 10 lanci, 8 almeno dei quali siano "Teste".
Possiamo effettuare una partizione dell'insieme dei casi possibili, distinguendo fra

esattamente 8 teste:	esattamente 9 teste:	esattamente 10 teste:
$\binom{10}{8} = 45$ casi	$\binom{10}{9} = 10$ casi	1 caso solo.

Perciò i casi possibili sono in totale $45+10+1 = 56$.
E si ha 1 solo caso favorevole.
La probabilità richiesta è 1/56.

46) $p(4\ "ori"\ da\ un\ mazzo\ di\ 40) = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{7}{37} \approx 0{,}0023 \quad p(4\ "ori"\ da\ un\ mazzo\ di\ 52) = \frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49} = 0{,}0026\ldots$

E' lecito pensare, come abbiamo scelto di fare noi, ad un "evento a 4 fasi",
perché è vero che le carte vanno estratte "simultaneamente",
ma la probabilità richiesta non muta se immaginiamo di estrarle invece una dopo l'altra;
o magari, di estrarle contemporaneamente salvo poi guardarle una dopo l'altra.
Se vuoi, per esercizio, puoi rifare il calcolo pensando alle 4 carte estratte tutte assieme.
Si tratterà di contare le quaterne non ordinate … ecc. ecc.

47) $p(4\ \text{"}ori\text{"} - con\ reimbussolamento - estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 40) = \left(\frac{10}{40}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0{,}0039$

$p(4\ \text{"}ori\text{"} - con\ reimbussolamento - estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 52) = \left(\frac{13}{52}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0{,}0039$

48) $p(4\ semi\ diversi\ estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 40) = 1 \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{10}{37} \approx 0{,}109421...$

$p(4\ semi\ diversi\ estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 52) = 1 \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} = 0{,}105498...$

49) $p(4\ semi\ diversi - con\ reimbussolamento - da\ un\ mazzo\ di\ 40) = 1 \cdot \frac{30}{40} \cdot \frac{20}{40} \cdot \frac{10}{40} = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

$p(4\ semi\ diversi - con\ reimbussolamento - da\ un\ mazzo\ di\ 52) = 1 \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{26}{52} \cdot \frac{13}{52} = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

50) a) $p(somma\ 18\ con\ 3\ dadi) = p(tutti\ 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

b) $p(somma\ 9\ con\ 3\ dadi) =$

$= p(un\ 6, un\ 2, un\ 1) + p(un\ 5, due\ 2) + p(un\ 5, un\ 3, un\ 1) + p(due\ 4, un\ 1) + p(un\ 4, un\ 3, un\ 2) + p(tre\ 3) =$

$= 3! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 25 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0{,}11574$

Anche: poiché ciascuno dei 3 dadi porterà al minimo 1 e $1+1+1=3$, si tratta di vedere in quanti modi le rimanenti 6 unità che mancano per fornire una somma uguale a 9 possono “distribuirsi nei 3 dadi”. Ma è noto (vedi paragrafo sulle “combinazioni con ripetizione” nel capitolo sul Calcolo Combinatorio) che 6 oggetti possono distribuirsi in 3 scatole in un numero di modi dato da

$C'_{3,\,6} = \binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$ e da questo numero, 28, occorre togliere 3

perché le 3 ripartizioni (6, 0, 0), (0, 6, 0), e (0, 0, 6) sono da escludere
in quanto corrisponderebbero alle situazioni (1+6, 1+0, 1+0), (1+0, 1+6, 1+0) e (1+0, 1+0, 1+6),
ma un dado non ha la faccia $1+6=7$.

I modi in questione sono dunque $28-3=25$ e la probabilità richiesta è $\frac{25}{6^3}$.

51) $p(\text{R}) = p(\text{U1, poi 1R} + \text{2N da U1, poi R}) +$
$+ p(\text{U1, poi 3N da U1, poi R}) +$
$+ p(\text{U2, poi 3R da U2, poi R}) +$
$+ p(\text{U2, poi 2R} + \text{1N da U2, poi R}) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\binom{4}{3}} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} \cdot \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{35} + \frac{3}{35} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} \approx 46\%$$

52) $x = p(\text{A}) = p(\text{A} \wedge \text{B}) + p(\text{A} \wedge \overline{\text{B}}) = p(\text{B}) \cdot p(\text{A}/\text{B}) + p(\overline{\text{B}}) \cdot p(\text{A}/\overline{\text{B}}) = y \cdot 0{,}4 + (1-y) \cdot 0{,}3$

$p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A}) = p(\text{B}) \cdot p(\text{A}/\text{B}) \qquad x \cdot 0{,}5 = y \cdot 0{,}4$

$$\begin{cases} x = y \cdot 0{,}4 + (1-y) \cdot 0{,}3 \\ x \cdot 0{,}5 = y \cdot 0{,}4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0{,}4y + 0{,}3 - 0{,}3y \\ 5x = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0{,}1y + 0{,}3 \\ x = \frac{4}{5}y = 0{,}8y \end{cases}$$

$$0{,}8y = 0{,}1y + 0{,}3; \qquad 8y = y + 3; \qquad 7y = 3; \qquad y = 3/7; \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{5}y = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35} \\ y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

53) Problematico. Va considerato il fatto che le stazioni quasi certamente non avranno la stessa “importanza”, e quindi non avranno la stessa frequenza media di viaggiatori che scendono; tale frequenza, poi, potrebbe anche dipendere dall’ora della giornata in cui il treno arriva in stazione, e inoltre la particolare stazione di partenza potrebbe essere tale che statisticamente i passeggeri che salgono in essa siano diretti in prevalenza ad una certa destinazione …

Se hai risposto che la probabilità è $1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$, si tratta di una valutazione piuttosto illusoria, che sarebbe corretta solo se la probabilità di uscita ad ogni stazione fosse identica per tutte e 5 le stazioni.

54) a) $1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}\approx 9,4\%$ oppure $\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4^4}=\frac{3}{32}\approx 9,4\%$

b) Con 20 confezioni: $1\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{5}{17}\approx 12,9\%$. Con 8 confezioni: $1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\approx 22,9\%$

55) $\frac{2}{3}$

56) $p(\text{X})=p(\text{XR})+p(\text{XN-YN-XR})+p(\text{XN-YN-XN-YN-XR})+p(\text{XN-YN-XN-YN-XN-YN-XR})=$
$=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}+\frac{7}{40}+\frac{1}{12}+\frac{1}{40}=\frac{7}{12}$

57) La probabilità che tutte le n persone festeggino il compleanno in giorni diversi è, calcolandola col teorema dell’ “evento a più fasi”,

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-n+1}{365}=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

oppure, indifferentemente, calcolandola col rapporto $\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$,

$$\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

Quindi la probabilità che almeno 2 festeggino il compleanno nello stesso giorno è

$$1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

Si può ora utilizzare il foglio elettronico per verificare che il più piccolo valore di n per il quale questa quantità supera ½ è inaspettatamente basso: $n=23$.

Insomma, prese 23 persone a caso, la probabilità che almeno 2 compiano gli anni nello stesso giorno è già > ½ (e si capisce che andando a “riammettere” il 29 febbraio la differenza di probabilità sarebbe minima). Questo fatto piuttosto sorprendente è noto come il “paradosso dei compleanni”.

58) Circa 0,4%; circa 0,4%; in media 4

59) Circa 16,8%; circa 16,3%; pressappoco 15

60) Sembrano dipendenti …

61) Intorno a 139-140; vicino al 98%

62) Il 9,5%

63) Se il concorrente più bello è A, quello “così-così” è B, mentre il più brutto è C, le sequenze possibili sono
ABC ACB BAC BCA CAB CBA.
Con la sua strategia, la principessa andrebbe a selezionare A in 3 casi su 6 (controlla!) quindi, appunto, con probabilità ½.

64) a) 54 b) 14

65) 4 socks: 1b, 3r

66) $p(\mathrm{P}\cup\mathrm{R}\cup\mathrm{D}) = p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{R}) + p(\mathrm{D}) - p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R}) - p(\mathrm{P}\cap\mathrm{D}) - p(\mathrm{R}\cap\mathrm{D}) + p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R}\cap\mathrm{D})$ da cui

$$p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R}\cap\mathrm{D}) = p(\mathrm{P}\cup\mathrm{R}\cup\mathrm{D}) - p(\mathrm{P}) - p(\mathrm{R}) - p(\mathrm{D}) + p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R}) + p(\mathrm{P}\cap\mathrm{D}) + p(\mathrm{R}\cap\mathrm{D}) =$$
$$= 0,85 - 0,60 - 0,50 - 0,40 + 0,60\cdot 0,50 + 0,40\cdot 0,50 + 0,50\cdot 0,40 =$$
$$= 0,85 - 0,60 - 0,50 - 0,40 + 0,30 + 0,20 + 0,20 = 0,05 = 5\%$$

67) $p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{S}\wedge\mathrm{O}) + p(\mathrm{S}\wedge\mathrm{P}) = p(\mathrm{O})\cdot p(\mathrm{S/O}) + p(\mathrm{P})\cdot p(\mathrm{S/P}) = \frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100} + \frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100} = \frac{800}{10000} = \frac{8}{100} = 8\%$

$$p(\mathrm{P/S}) = \frac{p(\mathrm{P})\cdot p(\mathrm{S/P})}{p(\mathrm{P})\cdot p(\mathrm{S/P}) + p(\mathrm{O})\cdot p(\mathrm{S/O})} = \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}} = \frac{3}{4} = 75\%$$

$$p(\textit{almeno}\ 1\ \textit{scomodo su}\ n) = 1 - p(\textit{nessuno scomodo}) = 1 - \left(\frac{92}{100}\right)^n; \quad 1 - \left(\frac{92}{100}\right)^n > 0,50; \quad \left(\frac{92}{100}\right)^n < \frac{1}{2}; \quad n \ge 9$$

68)

$$p(\mathrm{M}\vee\mathrm{Z}) = p(\mathrm{M}) + p(\mathrm{Z}) - p(\mathrm{M}\wedge\mathrm{Z})$$

da cui

$$p(\mathrm{M}\wedge\mathrm{Z}) = p(\mathrm{M}) + p(\mathrm{Z}) - p(\mathrm{M}\vee\mathrm{Z}) = 60\% + 50\% - 100\% = 10\%$$

69)

$$p(\textit{almeno una}) = 1 - p(\textit{nessuna}) = 1 - \frac{\binom{12}{2}}{\binom{21}{2}} = 1 - \frac{\frac{12\cdot 11}{2!}}{\frac{21\cdot 20}{2!}} = 1 - \frac{11}{35} = \frac{24}{35}$$

$$p(\textit{tutte e}\ 2) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{21}{2}} = \frac{\frac{9\cdot 8}{2!}}{\frac{21\cdot 20}{2!}} = \frac{6}{35}$$

70) $p = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \dfrac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \dfrac{18}{35} \approx 0,51$

$$p = \frac{1}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{70} \approx 0,014$$

71) $p(\textit{almeno 2 corrette}) = 1 - p(\textit{nessuna corretta}) - p(\textit{esattamente}\ 1\ \textit{corretta}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - 10\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 76\%$

72) $\approx 0,3929$

73) $\approx 0,1167$ (osserviamo che la conoscenza del numero di lampadine presenti in ciascuna scatola è superflua)

74) $3/36 = 1/12$; $\approx 0,0735$; $\approx 0,0831$

75) Almeno 13 tiri

76) $\approx 0,2751$

UN’ALTRA TRUFFA LEGALIZZATA: WIN FOR LIFE

“**Win for Life**” è una diavoleria di gioco di Stato, approdato in Italia dagli Stati Uniti nel 2009. Le sue modalità sono state ripetutamente modificate nel tempo; dal febbraio 2012 consta di tre varianti, *Viva l'Italia* (costo della giocata: 1 euro); *Grattacieli* (2 euro) e *Cassaforte* (5 euro). Le estrazioni hanno luogo addirittura ogni 5 minuti, ininterrottamente dalle 7:00 alle 23.55 .

Il giocatore può anche scegliere se preferisce buttar via i suoi soldi con sistemi integrali che equivalgono a più giocate in simultanea, oppure abbonandosi a una serie di estrazioni consecutive. Insomma, lo Stato (un maiuscolo veramente sprecato, direi) ha messo in campo ogni stratagemma per indurre più persone possibile a dilapidare quote sempre maggiori dei propri sudati risparmi. Soprattutto, **il meccanismo del gioco è subdolamente accattivante (per i sempliciotti).**
Vediamo in cosa consiste “Win for life” nella sua versione più “economica”, chiamata “Viva l’Italia” (“*Povera Italia*” sarebbe stato, a parere di chi scrivere, un nome più onesto).

Si acquista una schedina (che, per una singola giocata, come abbiamo già detto, costa 1 euro; diverso è naturalmente il discorso se con una sola schedina si vuol giocare un sistema, quindi si vuole impostare una giocata multipla, oppure si stipula un abbonamento per più estrazioni).

Questa schedina porta l’indicazione di 20 numeri: 1, 2, 3, … 20, dei quali il giocatore ne sceglierà 10. Sulla medesima schedina, nell’apposito riquadro a forma di scudetto, lo stesso giocatore dovrà scegliere un ulteriore numero fra 1 e 20, il cosiddetto “numerone”, il quale può appartenere o non appartenere all’insieme dei 10 numeri precedentemente selezionati. La scelta del “numerone”, a discrezione del giocatore, può anche essere lasciata al sistema automatizzato. Bene! Nell’estrazione per la quale si è giocato, vengono “pescati” dal sistema computerizzato di controllo:

- 10 numeri dall’insieme $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$
- più ancora, dallo stesso insieme, un altro numero, il “numerone”, che viene determinato con un’estrazione a parte, del tutto indipendente rispetto alla precedente, e pertanto può darsi venga a coincidere con uno dei 10 numeri di prima, oppure con nessuno di essi.

A questo punto il giocatore va a vedere innanzitutto quanti fra i 10 numeri da lui scelti coincidono coi 10 estratti, senza per ora considerare minimamente la questione “numerone”.

- Se 7, 5 o 3 fra i numeri scelti dal giocatore fanno parte (non importa l’ordine) dei numeri estratti, ecco che si realizza una “vincita di quarta categoria” che vale 1 euro: il giocatore recupera ciò che ha speso.
- Se 8 oppure 2 fra i numeri scelti dal giocatore fan parte dei numeri estratti, si ha una “vincita di terza categoria” che vale 2 euro: 1 euro netto di guadagno.
- Se 9 oppure 1 fra i numeri scelti dal giocatore fan parte dei numeri estratti, abbiamo una “vincita di seconda categoria” che si ottiene dividendo la quota di montepremi destinata a questo ordine di vincite, per il numero di giocatori che, nella medesima estrazione, hanno realizzato una vincita di quella categoria.
- Se 10 oppure 0 fra i numeri scelti dal giocatore fan parte dei numeri estratti, abbiamo una “vincita di prima categoria” che si ottiene dividendo a quota di montepremi destinata a questo ordine di vincite, per il numero di giocatori che, nella medesima estrazione, hanno realizzato una vincita di quella categoria.
- Soltanto in quest’ultimo caso, cioè se si è realizzata, facendo “10” oppure “0”, una vincita di 1ª categoria, ha senso andare a vedere se si è azzeccato pure il “numerone” (nel caso NON si sia ottenuta una vincita di prima categoria, il “numerone” non ha alcun ruolo); vale a dire, si va a vedere se il “numerone” giocato coincide col “numerone” estratto. In caso affermativo, quindi se si è totalizzato “10 + il numerone” oppure “0 + il numerone”, si realizza la categoria massima di vincita, detta “Win for Life”, e consistente in 1000 euro al mese netti (meno una piccola ritenuta) per i successivi 10 anni (se i vincitori sono n>1, la quota diventa 1000/n).

Esempi.

- Immagina di aver giocato 1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 18, 20 con “numerone” 12 e che l’estrazione abbia dato 2, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 19 con “numerone” 12. Bene, allora avresti fatto “4” (l’aver azzeccato il “numerone” non conterebbe nulla).
- Immagina di aver giocato 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 14, 18 con “numerone” 7 e che l’estrazione abbia dato 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 18 con “numerone” 11. Bene, allora avresti totalizzato “9” (il fatto di non aver azzeccato il “numerone” non conterebbe nulla).
- Immagina di aver giocato 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 con “numerone” 5 e che l’estrazione abbia dato 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 con “numerone” 5. Bene, allora avresti fatto “0 + il numerone” e ti saresti aggiudicato la rendita mensile di 1000 € per 10 anni (se sei l’unico vincitore), oltre alla quota relativa allo “0”; che ti verrebbe anch’essa pagata.

Il regolamento emesso in data 27 gennaio 2012 è assai complicato, comunque:

- di quello che la gente spende per comprare le schedine, il 35% viene immediatamente incamerato per essere spartito dallo Stato (23%), dalla SISAL (8%) e dalle ricevitorie (4%);
- al montepremi è assegnato il 65% della raccolta complessiva di ciascun concorso.

Si potrebbe allora dire: E vabbè! Però quasi i 2/3 di ciò che viene speso è poi restituito agli scommettitori!
Sì, ma il guaio è che questo gioco induce le persone sprovvedute ad acquistare una schedina dopo l'altra, attirate dal fatto che comunque è assai frequente recuperare la giocata (quando si fa una vincita di 4ª categoria), e capita non troppo di rado (1 volta su 46 in media, come vedremo) pure di guadagnarci 1 euro netto (vincita di 2ª categoria); c'è poi un'insidia psicologica che spinge a ostinarsi: i numeri fra i quali scegliere sono solo 20 dunque si ha la sensazione di avere più possibilità di vincere rispetto ad altri giochi, tanto più che in fondo solo il "6" e il "4" ci fanno perdere, mentre il "7", il "5" e il "3" permettono comunque recuperare la giocata …
Illusione ottica. In realtà, si è spinti a impegnare somme anche importanti, ripetendo le giocate in diversi momenti della giornata, e ci si ritrova, statisticamente, ad aver perso dei bei soldi: se il 35% dell'incasso in ogni caso svanisce in favore di Stato, SISAL e ricevitorie, significa che in media ogni giocatore recupera solo il 65% di quanto ha investito; e giocando quindi ad esempio 100 euro, ecco che 35 si sono volatilizzati.
In realtà poi, per il giocatore "normalmente fortunato", quei 35 sono ben di più, in quanto rarissimamente questi realizzerà una vincita superiore alla quarta o terza categoria.

Ma facciamo insieme **QUALCHE VALUTAZIONE PRECISA DI PROBABILITÀ**.

a) Innanzitutto, dimmi: **come mai un giocatore che faccia "10" è trattato alla stessa stregua di chi fa"0"? E il "9" vale esattamente quanto l' "1"? L' "8" quanto il "2"?** ….……………………………………..

b) Valutiamo la **probabilità di fare "10"**. I casi possibili sono tanti quanti i modi, su 20 numeri, di sceglierne 10, quindi sono …….. mentre il caso favorevole è uno solo (che la decina scelta coincida con quella estratta). Perciò, sviluppando il calcolo e semplificando, le probabilità di fare "10" sono 1 su 184756.

c) Valutiamo la **probabilità di fare "3"**. I casi possibili sono tanti quanti i modi, su 20 numeri, di sceglierne 10, quindi sono …….. mentre il casi favorevoli sono tante quante le decine, contenenti esattamente 3 fra i 10 numeri scelti, insieme (per completare la decina) con 7 numeri presi fra i 10 non scelti. E sono quindi ……. Pertanto, sviluppando il calcolo, le probabilità di fare "3" sono circa del 7,8% (0,07794…)

d) Valutiamo la **probabilità di fare "10 + il numerone"**.

$$p(\text{"10 + il numerone"}) = p(\text{"10"})\cdot p(\text{"numerone"/"10"}) = p(\text{"10"})\cdot p(\text{"numerone"}) = \frac{\dots}{\dots}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{3\,695\,120}$$

Perché, nella catena precedente, abbiamo potuto sostenere che $p(\text{"numerone"/"0"}) = p(\text{"numerone"})$? ……..

e) **Calcola ora tu, per esercizio, alcune altre probabilità inerenti al gioco**. Troverai

$$p(\text{"9"}) = p(\text{"1"}) = \frac{1}{1848};\;\; p(\text{"8"}) = p(\text{"2"}) = \frac{1}{92};\;\; p(\text{"3"}) = p(\text{"7"}) \approx 0{,}078;\;\; p(\text{"5"}) \approx 0{,}34;\;\; p(\text{"6"}) = p(\text{"4"}) \approx 0{,}24$$

f) In sostanza, si pareggia (facendo "7", "3" o "5") con probabilità che sfiora il 50% (esattamente 0,499599…) e si perde solo facendo "6" o "4", sennonché tale **probabilità di perdere il proprio euro è prossima a ...**

NOTA - Le guide al gioco tendono a "cumulare" le probabilità uguali, scrivendo, ad esempio, che la probabilità di fare « "9" o "1" » è 1 su 924

g) Per terminare, un po' di calcolo combinatorio. Sulla schedina di "Win For Life" è possibile puntare anche 11 numeri anziché 10: in tal caso, si pagano 11 euro perché è come effettuare 11 giocate da 10 numeri l'una.
Quanto occorre allora pagare selezionando 12 numeri? E 13? E 14? …………………………………….