4.6 - Esercizi su probabilità e frequenza relativa

1) Se si lancia un pezzo di legno intagliato a forma di tronco di cono, quanti sono i casi possibili quando il tronco cade a terra e si ferma? Come si potrebbe valutare la probabilità di ciascun esito?

2) Lanciando 1000 volte una moneta truccata, il rapporto teste/croci è risultato uguale a 0,7762 circa.
Quante "teste" e quante "croci" sono uscite?
Che probabilità c'è di ottenere, con un ulteriore lancio, "testa"?

3) I "Giochi di Archimede" sono competizioni matematiche nelle quali lo studente è chiamato a rispondere a un set di 20 quesiti (pensando alla gara *junior*, quella per i più giovani).
Per ciascun quesito sono elencate 5 possibili risposte A, B, C, D, E delle quali una e una sola è corretta.
E' previsto di assegnare 5 punti a ogni risposta giusta, 0 a ogni risposta sbagliata, e 1 a ogni risposta non data.
Un pelandrone che non si degnasse neppure di leggere il testo delle domande, tenderebbe a fare più punti non rispondendo mai oppure crociando a casaccio una risposta per ogni domanda?

4) Un tale mi propone il seguente gioco: "Lanciamo un dado, per un numero di volte che deciderò io.
Se uscirà 1 o 2 più volte di quante volte sarà uscito 3, 4, 5 o 6, ti darò 100 euro, altrimenti mi darai tu 5 euro".
Mi conviene accettare?

5) Si sa che un sacco contiene 120 palline, in parte azzurre, in parte gialle, in parte rosa;
si estraggono una dopo l'altra, con reimbussolamento, 3 palline, e risultano tutte e 3 di colori diversi.
   a) Cosa si può ipotizzare sul numero totale di palline dei tre colori?
   b) E se si facessero 400 estrazioni ottenendo 90 azzurre, 196 gialle, e 114 rosa?

6) Se si lancia 1000 volte una coppia di monete, quante volte ci si aspetta pressappoco che mostrino 2 "Teste"?

7) Utilizza il foglio elettronico per simulare 300 lanci di una coppia di dadi.
Per ogni singolo lancio simulato, il foglio elettronico dovrà calcolare la somma dei due punteggi.
E per ogni somma ottenibile (da 2 fino a 12), dovrà determinare la frequenza assoluta e la frequenza relativa.
Tu confronterai infine quest'ultima con la probabilità *a priori*.

Tieni comunque presente che i numeri "casuali" generati dal computer non sono veramente casuali, ma sono piuttosto *pseudo*casuali, ossia hanno l'*apparenza* della casualità.

Per motivi di impaginazione, una scheda sui numeri pseudocasuali nel foglio elettronico è riportata a pag. 24.

8) Si può dare per scontato che sia uguale la probabilità di nascer maschio e di nascer femmina?

9) In Inglese si parla, ad esempio, di "3:5 (three to five) *odds in favor*", in relazione a un evento, per affermare che quell'evento si verifica mediamente 3 volte per ogni 5 volte che non si verifica.
Analogamente, dire che le "*odds against*" per un evento sono 4:1 significa sostenere che in media l'evento NON si presenta 4 volte per ogni volta che si presenta.
Ciò premesso, nel lancio di un dado, quante sono le "*odds in favor*" per l'uscita della faccia 3?
Se un evento è tale che ha $x:y$ "*odds against*", qual è la sua probabilità?

RISPOSTE

1) 3: faccia circolare maggiore in alto, faccia circolare minore in alto, tronco appoggiato sulla superficie laterale.
La probabilità di ciascuno dei tre esiti si può valutare soltanto lanciando il tronco tantissime volte e annotando la frequenza relativa di ognuno dei tre esiti.
2) 437 teste, 563 croci; valutabile in $43{,}7\%$ circa
3) E' indifferente. Rispondendo a caso, la probabilità di azzeccare la risposta giusta a una domanda fissata è 1/5 per cui, sulle 20 domande, possiamo aspettarci intorno a 4 risposte esatte per un totale di circa $4 \cdot 5 = 20$ punti; non rispondendo, si totalizzano $20 \cdot 1 = 20$ punti.
4) No, perché certamente l'avversario deciderà che il dado vada lanciato *tantissime* volte …
e con tantissimi lanci, è praticamente certo che la circostanza a me favorevole non si verificherà.
5) a) Praticamente non si può ipotizzare nulla: 3 estrazioni sono decisamente troppo poche.
Sembrerebbero suggerire un certo "equilibrio" fra il numero delle azzurre, delle gialle e delle rosa, ma fino a un certo punto: davvero, 3 estrazioni sono pochine.
   b) 400 è già un buon numero. Le frequenze relative sono
   $a = 90/400 = 0{,}225; \quad g = 196/400 = 0{,}49; \quad r = 114/400 = 0{,}285$
   e portano a presupporre che il numero complessivo delle azzurre, delle gialle e delle rosa sia in proporzione; quindi la composizione dell'urna potrebbe essere di 27 azzurre, 59 gialle e 34 rosa … o pressappoco.
6) Un numero di volte non molto distante da 250. Infatti la probabilità dell'evento è 1/4.
7) Somme possibili: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12. Probab.: 1/36 2/36 3/36 4/36 5/36 6/36 5/36 4/36 3/36 2/36 1/36
8) No. Non è detto che i due casi siano equipossibili. In effetti, si osserva, in tutte le parti del globo, una leggera prevalenza delle nascite maschili rispetto a quelle femminili.
9) 1:5; $p = y/(x+y)$

4.7 - Speranza matematica

Per il discorso che vogliamo iniziare è essenziale tener presente cosa afferma la "legge empirica del caso":

quando si ripete per "molte" volte una prova *aleatoria* (= legata al caso),
la **frequenza relativa** di un esito, cioè il rapporto

$$f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}},$$

si avvicina "molto" alla **probabilità a priori** di quell'esito, calcolata tramite il rapporto

$$p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

Insomma, è $\boxed{f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}} \approx p}$

da cui $\boxed{\textbf{numero di prove che hanno avuto quell'esito} \approx \boldsymbol{p} \cdot \textbf{numero totale di prove}}$

Supponiamo ad esempio di estrarre una carta da un mazzo da scopa.

La probabilità che sia di "cuori", calcolata come $p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$, è $p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

Ma allora, se ripetiamo l'estrazione per molte volte, diciamo ad esempio per 2000 volte,
sempre reinserendo la carta estratta nel mazzo e mischiando prima di effettuare un'altra estrazione,
il numero di volte in cui uscirà "cuori" *si aggirerà intorno a*, *non differirà troppo da*

$$p \cdot \text{numero totale di prove} = \frac{1}{4} \cdot 2000 = 500.$$

E andiamo ora a parlare di "*speranza matematica*".

Ci conviene partire immaginando dapprima un gioco che nella realtà è davvero molto raro:
un gioco nel quale si possa soltanto vincere e non si possa mai perdere.

Armandoci di fantasia, supponiamo ad esempio che ci sia una famiglia con 4 figlioli, molto, ma molto povera.
Soldi ce ne sono davvero pochissimi!
Tuttavia, la mamma vuole dare qualche vizietto ai suoi piccoli, e anche scherzare un poco con loro.
Si decide, ogni sera dopo cena, di estrarre una pallina da una scatola contenente 10 palline numerate da 1 a 10.
Se uscirà una delle palline dalla 1 alla 4, il figlio corrispondente (ordinandoli dal più grande al più giovane) vincerà 2 euro, che potrà ad esempio investire in un succulento gelato … altrimenti, nessuno avrà niente.

Cosa ci aspettiamo che accada protraendo il gioco per molto tempo, diciamo per 300 giorni?
Ad ogni estrazione, per ciascun ragazzo, la probabilità di aggiudicarsi i 2 euro sarà di 1/10 (le palline sono 10).
Allora, per quanto ricordato all'inizio riguardo alla legge empirica del caso,

ognuno dei 4 ragazzi vincerà i suoi 2 euro per un numero di volte pressappoco uguale a $\frac{1}{10} \cdot 300 = 30$.

E quindi, in quei 300 giorni, più o meno, ciascuno si aspetta di incassare $\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2 = 60$ euro.
In media, qual è l'aspettativa giornaliera di ognuno dei figli?

L'aspettativa giornaliera è di vincere euro $\frac{\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2}{300} = \frac{1}{10} \cdot 2 = 0,20$

Questo esempio ci fa capire che **se moltiplichiamo la probabilità** (nel nostro caso, 1/10) **di una vittoria in una singola "prova aleatoria" per la cifra** (2 euro, per i nostri ragazzi) **che si spera di vincere nella prova**, **otteniamo quella somma di danaro che in media si vincerebbe ad ogni prova, qualora si facesse un numero molto alto di prove**.

Bene! **Definiamo "speranza matematica" o "valore atteso"**
(in Inglese: mathematical expectation, expected value) di una certa vincita S,
il prodotto della vincita stessa per la probabilità che essa ha di realizzarsi in una singola prova:

$$\boxed{E = \textit{speranza matematica}} = \boxed{pS}$$

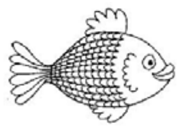
La "speranza matematica" è la vincita che mediamente si avrebbe in una singola prova,
se si effettuasse un numero elevato di prove.

Nella realtà concreta, ben raramente ci viene offerto di poter vincere qualcosa senza la possibilità di perdere.
Le situazioni più frequenti sono quelle in cui si hanno due contendenti … ma aiutiamoci con un altro esempio.

Supponiamo che una *macchinetta mangiasoldi* sia programmata per comportarsi nel modo seguente.
Ad ogni giocata, si può *vincere* (e ciò avviene con probabilità $1/10$: ossia, si vince mediamente una volta ogni 10 giocate; insomma, su di un gran numero di giocate, il numero di vincite non si discosta molto dal numero delle giocate, diviso per 10); oppure si può *perdere*, con probabilità che sarà uguale a $1-1/10=9/10$ (sappiamo che la somma della probabilità di un evento con la probabilità dell'evento contrario è sempre 1).
Ogni giocata costa 1 euro, ossia, quando si perde, si perde la puntata di 1 euro. Quando si vince, il guadagno netto è di 5 euro (il giocatore incassa 6 euro, quindi gli viene restituito l'euro della puntata, più 5 euro di vincita netta).
Domanda: se faccio 1000 giocate, cosa posso aspettarmi all'incirca, da un gioco di questo tipo?
Ragioniamo:

poiché ad ogni giocata la prob. di vincere è 1/10, con le 1000 giocate vincerò pressappoco $\frac{1}{10}\cdot 1000=100$ volte.
E poiché in caso di vincita il guadagno netto è di 5 euro, la vincita sarà in totale, all'incirca, di $100\cdot 5=500$ euro.
Nel frattempo, però, avrò perso per circa $\frac{9}{10}\cdot 1000=900$ volte;
per una perdita complessiva che si aggirerà intorno a $900\cdot 1=900$ euro.
In totale, il mio bilancio finale dovrebbe collocarsi intorno ai $\underbrace{500}_{\frac{1}{10}\cdot 1000\cdot 5}\ \underbrace{-900}_{\frac{9}{10}\cdot 1000\cdot(-1)}=-400$ euro.

E ciò significa che in media, ogni giocata mi avrà portato euro $\frac{-400}{1000}=-0,40$:
ossia mi avrà generato una perdita di 40 centesimi (bel pesciolino che sono!).



Proviamo a generalizzare.

Se in una singola prova si può verificare uno e uno solo fra più eventi incompatibili $E_1, E_2, \ldots, E_k$ di rispettive probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_k$, e tali eventi mi apportano rispettivamente una somma di denaro, positiva o negativa, $S_1, S_2, \ldots, S_k$, allora, in n prove, se n è grande, E_1 si verificherà all'incirca $n\cdot p_1$ volte, E_2 circa $n\cdot p_2$ volte, ecc., per cui la somma di denaro che me ne verrà si aggirerà intorno a

$$n\cdot p_1\cdot S_1+n\cdot p_2\cdot S_2+\ldots+n\cdot p_k\cdot S_k=n\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\ldots+p_k\cdot S_k).$$

In media, in ogni singola prova avrò vinto o perso la somma

$$\frac{\cancel{n}\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\ldots+p_k\cdot S_k)}{\cancel{n}}=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\ldots+p_k\cdot S_k.$$

**Bene: la quantità $\boxed{E=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\ldots+p_k\cdot S_k}$ viene detta
la mia SPERANZA MATEMATICA (mathematical expectation) in quel gioco,
ed esprime, dunque, quello che posso aspettarmi mediamente ad ogni prova,
se ripeto per molte volte una prova di questo tipo.**

ESEMPIO
Mi viene proposto il gioco seguente: si prende un mazzo di carte da <u>scopa</u>, e se ne estrae una a caso.
Se è una figura vinco 70 centesimi, se non è una figura ma è una carta di fiori o di picche ne vinco 50, soltanto se è il "settebello" (7 di quadri) perdo 16 euro. Qual è la speranza matematica del gioco?
Giocando molte volte, a lungo andare finirei per vincere o per rimetterci?

$$p(\textit{figura})=\frac{12}{40}=\frac{3}{10};\quad p(\textit{non figura, di fiori o picche})=\frac{14}{40}=\frac{7}{20};\quad p(\textit{settebello})=\frac{1}{40}$$

$$p(\textit{una delle altre carte})=1-\frac{3}{10}-\frac{7}{20}-\frac{1}{40}=\frac{13}{40}\quad (\textit{comunque è inutile calcolarla, perché tanto poi verrà moltiplicata per } 0)$$

$$\textit{speranza matematica}=\frac{3}{10}\cdot 0,70+\frac{7}{20}\cdot 0,50+\frac{1}{40}\cdot(-16)+\frac{13}{40}\cdot 0=0,21+0,175-0,4+0=-0,015$$

La speranza matematica, che mi dice quanto devo mediamente aspettarmi, pressappoco, da una singola prova, se effettuo un numero elevato di prove, è negativa, seppure di poco.
Devo attendermi, se mi ostino a giocare moltissime partite, di finire in perdita. Ad esempio, in 10000 partite, dovrei ritrovarmi pressappoco a quota $-0,015\cdot 10000=-150$ *euro*. …Pressappoco, s'intende!

Un GIOCO si dice "EQUO" se la speranza matematica di ogni giocatore è 0.
Ad esempio, se A e B prendono un mazzo di carte da scopa ed estraggono una carta, con l'accordo che A:
vince 6 euro se esce "cuori", vince 3 euro se esce "quadri", ne perde 5 se esce "fiori" e ne perde 4 con "picche",
la speranza matematica di A sarà

$$\textit{speranza matematica del giocatore } A = \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot(-4) = 0$$

mentre ovviamente quella di B avrà il valore opposto e quindi sarà anch'essa nulla. Questo gioco è *equo*:
A e B, se effettuassero un numero molto elevato di partite, non si ritroverebbero molto lontani dalla parità.

Nei "**giochi organizzati**" (**Lotto, Casinò, lotterie** …) chi vuole concorrere paga una somma iniziale S_0
(la puntata al Lotto o al Casinò, il costo del biglietto della lotteria …) sperando in una vincita S,
che sarà allora una vincita "lorda", in quanto il "netto" si otterrà sottraendole la somma S_0 inizialmente investita.

Vediamo come si può riscrivere la formula per la speranza matematica in questa situazione "classica".
Sia p la probabilità di vittoria. La probabilità di perdere varrà allora (evento contrario) $1-p$. E avremo:

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = p\cdot(S-S_0)+(1-p)\cdot(-S_0) = pS \cancel{-pS_0} - S_0 \cancel{+pS_0} =$$
$$= \boxed{pS - S_0} \quad S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

ATTENZIONE! In questa formula specifica per i giochi organizzati compare la vincita LORDA,
mentre nella formula generale $\boxed{p_1\cdot S_1 + p_2\cdot S_2 + ... + p_k\cdot S_k}$
le somme indicate vanno intese come vincite, o perdite, NETTE.

ESEMPIO
Alla roulette, ci sono 37 numeri su cui puntare (da 0 a 36).
Se si punta su di un numero singolo, in caso di vincita viene consegnato al giocatore un premio
uguale alla somma giocata, moltiplicata per 36 (quindi, la vincita netta è uguale a 35 volte la posta giocata).
Quanto vale la speranza matematica (supponendo di puntare 1 euro)?

$$\textit{speranza matematica} = pS - S_0 = \frac{1}{37}\cdot 36 - 1 = \frac{36}{37} - 1 = -\frac{1}{37} \approx -0{,}027$$

La speranza matematica è quindi negativa. Il gioco NON è equo. Sarebbe equo se in caso di vincita
venisse consegnato al giocatore un premio lordo uguale a 37 volte la puntata, anziché solo 36.

Però il gioco non è nemmeno troppo "disonesto": se la speranza matematica, per la puntata di 1 euro, è uguale
a circa $-0{,}027$, vuol dire che di quell'euro mediamente a ogni puntata è come se il giocatore ne recuperasse
$1-0{,}027 = 0{,}973$ quindi il $97{,}3\%$; il guadagno del "banco" si limita mediamente al $2{,}7\%$ di ogni puntata.

Il Lotto, ad esempio, è molto più rapace nei confronti del giocatore.
Supponiamo si punti sul "numero secco" o "ambata".
La probabilità di vincere è $p = 1/18$; in caso di vincita, lo Stato paga però soltanto 11,232 volte la puntata
(e da questa vincita "lorda" occorre poi sottrarre la puntata stessa per ottenere la vincita netta).

Allora la speranza matematica è $pS - S_0 = \frac{1}{18}\cdot 11{,}232\,S_0 - S_0 = -0{,}376\,S_0$.

Per le altre combinazioni del Lotto il discorso cambia poco (nel caso dell'ambo) o peggiora di molto (terno, ecc.).

Il Casinò comunque è più pericoloso, perché il poter effettuare immediatamente nuove puntate, circondati da
altri giocatori assatanati, in un ambiente dal fascino perverso, e il ricevere immediatamente l'eventuale premio,
tutto ciò fa sì che il giocatore si senta spinto a continuare a rischiare, anche in caso di vincita,
fino a quando, per gli alti e bassi della sorte, si ritrova a perdere tutto quello che ha in tasca.

La *persona intelligente* si tiene BEN LONTANA dal
gioco d'azzardo! ☹

Ancora qualche osservazione sui "giochi organizzati", quelli nei quali è

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = \boxed{pS - S_0}, \quad \textit{con } S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

In questi casi, il gioco è equo se è $pS - S_0 = 0$, ossia se
la posta S_0 da pagare per partecipare è uguale alla speranza matematica pS della vincita lorda: $S_0 = pS$.

L'uguaglianza precedente si potrebbe pure riscrivere come $S = \frac{S_0}{p}$: questo rapporto $\frac{S_0}{p} = S_0 \cdot \frac{1}{p}$
è dunque il valore che dovrebbe avere la vincita lorda in un gioco equo nel quale la probabilità di vincere sia p.
Ad esempio, se, come nella puntata sul "numero secco" al Casinò, si avesse una probabilità di 1/37 di vincere,
affinché il gioco sia equo la vincita lorda dovrebbe essere 37 volte la posta.

Nella stragrande maggioranza dei casi è invece $pS - S_0 < 0$, ossia $S_0 > pS$,

e per valutare quanto il gioco sia sfavorevole al concorrente potremo calcolare il rapporto $\frac{pS}{S_0} < 1$

fra speranza matematica della vincita lorda e posta in gioco:
quanto più tale rapporto è *basso*, tanto più il gioco sarà *disonesto nei riguardi del concorrente*;
quanto più tale rapporto sarà invece alto, ossia vicino (per difetto) a 1, tanto più il gioco sarà clemente.

Avevamo osservato che la puntata sul numero singolo al Casinò non è, in sé, troppo rovinosa per il giocatore;

e in effetti, se andiamo a calcolare $\frac{pS}{S_0}$, troviamo qui $\frac{\frac{1}{37} \cdot 36 S_0}{S_0} = \frac{36}{37} \approx 0{,}973$ che è un valore assai prossimo a 1.

Tale valore ci dice "quale parte della sua puntata recupera, mediamente, il giocatore, a ogni giocata".
Tradotta il percentuale, è più espressiva: $0{,}973 = 97{,}3\%$ per cui il giocatore di Casinò, quando punta sul numero singolo, mediamente a ogni puntata riesce a trattenere per sé il $97{,}3\%$ della somma investita.
Il rimanente $2{,}7\%$ lo incamera senza pietà il Casinò. Il quale, tramite questa e le altre tipologie di puntata alla roulette, e tramite gli altri svariati suoi giochi, alle spese dei merli fa sontuosi guadagni.

Il rapporto $\frac{pS}{S_0} = \frac{\textit{speranza matematica della vincita lorda}}{\textit{somma puntata}}$ è chiamato da alcuni "**indice di equità**".

A seconda che sia <1, =1, o >1 il gioco è da ritenersi svantaggioso, equo oppure vantaggioso.

Evidentemente, l'ultimo caso nei "giochi organizzati" non si verifica mai, o meglio: si verifica solo se ci mettiamo *dal punto di vista dello Stato* nel Lotto e similari, *o del Casinò* nella roulette e similari: insomma, se il giocatore al quale pensiamo è l'organizzatore del gioco: lui sì, che ne trae un lauto vantaggio!

I NUMERI CASUALI (O MEGLIO: PSEUDOCASUALI) E IL FOGLIO ELETTRONICO

E' possibile ordinare a un foglio elettronico di generare numeri *casuali*, o meglio "PSEUDOcasuali": essi infatti hanno l'*apparenza* della casualità, ma in realtà non sono realmente casuali in quanto sono costruiti tramite un algoritmo a partire da un valore iniziale, detto "seme", quello *sì* - ma *solo quello* - da ritenersi casuale (si tratta, di norma, del numero di secondi trascorsi da una certa data del passato).

Digitando in una cella
= CASUALE() [notare la coppia di parentesi senza niente all'interno!]
si genera, in quella cella, un numero casuale con la virgola x che può andare da 0 (incluso) a 1 (escluso):
$0 \le x < 1$

Questo numero cambierà ogniqualvolta nel foglio elettronico un dato verrà inserito, o cancellato
(o anche semplicemente se si preme, posizionati in una cella vuota, il tasto CANC;
oppure ancora, premendo il tasto-funzione F9 in alto sulla tastiera);
come pure, ad ogni riapertura del file.

E volendo un numero casuale fra 0 (compreso) e 6 (escluso)?
Beh, basterebbe scrivere
= CASUALE() * 6

E fra 1 (compreso) e 15 (escluso)?
= CASUALE() * 14 + 1

E se volessimo simulare il lancio di un dado, quindi ci servisse un numero INTERO casuale fra 1 e 6?
In questo caso potremmo ricorrere a una combinazione fra la funzione CASUALE e la funzione INT.
INT tronca un numero all'intero più vicino per difetto, quindi, ad esempio, INT(3,8) = 3
Allora la formula
= INT(CASUALE() * 6 + 1)
ci fornirà per l'appunto un intero che potrà valere, con ugual probabilità, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Infatti, = CASUALE() * 6 genera un numero con la virgola che può andare da 0 (compreso) a 6 (escluso);
aggiungendo 1 si ottiene un numero con la virgola che può andare da 1 (compreso) a 7 (escluso);
dopodiché la funzione INT, troncando il numero ottenuto, lo fa diventare un intero compreso fra 1 e 6.

Analogamente, il lancio di una moneta potrà essere simulato da
= INT(CASUALE() * 2)
Il risultato dell'applicazione della formula potrà essere il numero 0, oppure il numero 1:
bene, "0" potrà essere interpretato come "Testa" e "1" come "Croce", o viceversa.

Anche i vari linguaggi di programmazione permettono di generare numeri pseudocasuali:
per il linguaggio PASCAL, puoi consultare a questo proposito l'apposito manualetto.

ESERCIZI sulla speranza matematica

1) Alla "roulette francese" ci sono 37 numeri (0, 1, 2, … , 36). Quelli da 1 a 36 sono colorati metà in rosso, metà in nero. Lo 0, invece, non è considerato né "rosso" né "nero". Se si punta sul rosso, o sul nero, insomma sul "colore", e si indovina, si viene compensati con una vincita netta uguale alla somma puntata; se, avendo giocato il "colore", esce "zero", la regola è piuttosto complicata e può variare da Casinò a Casinò. Certe case da gioco consentono in questo caso al giocatore di riavere indietro metà della somma puntata. Calcolare, se così stanno le cose, la speranza matematica di una giocata di 1 euro sul "rosso" o sul "nero".

2) Per ringraziarmi dell'aiuto prestato nei compiti di matematica, i compagni di classe mi offrono un premio in euro uguale al quadrato del numero che otterrò dal lancio di un dado.
Se preferissi commutare questa offerta in una cifra certa, quanti euro potrei domandare loro?

3) Se si gioca un "terno" al Lotto, in caso di vincita lo Stato versa al giocatore la somma giocata, moltiplicata per 4500. D'altra parte, si può dimostrare che la probabilità di indovinare, se si gioca un terno, è 1/11748. Calcolare la speranza matematica del gioco, se si puntano 10 euro.

4) Mi viene proposto il seguente gioco: si lanciano due monete, e se esce: Testa su entrambe, vinco 20 euro; Croce su entrambe, vinco 10 euro; esiti differenti, perdo 15 euro. Mi conviene accettare?

5) Completa la tabella seguente:

Giocata	Vincita lorda (coefficiente)	Probabilità p	Sper. mat. (%)	Indice di eq. (%)
Estratto semplice	11,232	1/18		
Ambo	250	1/400,5		
Terno	4500	1/11748		
Quaterna	120000	1/511038		
Cinquina	6000000	1/43949268		

6) I) Calcola la speranza matematica:
   a) dell'esito del lancio di un dado
   b) del punteggio ottenuto lanciando 2 dadi e sommando
   c) del punteggio ottenuto lanciando due dadi e moltiplicando

   II) Se lancio una coppia di dadi per 1000 volte, e ogni volta annoto il prodotto dei due numeri ottenuti, quanto varrà all'incirca la somma di questi prodotti?

7) Un amico mi sfida al gioco seguente:
   si estrae una carta da un mazzo da scopa, e se è 1 asso gli do io 10 euro, altrimenti mi dà 1 euro lui.
   Calcolare la mia speranza matematica in questo gioco.
   Se accettassi ed effettuassi 1000 partite, quanto mi aspetto di guadagnare o perdere?

8) Se un benefattore mi offre in regalo 30 euro certi, o, in alternativa, 180 euro ma solo se lanciando un dado uscirà "6", verifica che in entrambi i casi la mia speranza matematica sarebbe la medesima.

RISPOSTE

1) $1\cdot\frac{18}{37}+(-1)\cdot\frac{18}{37}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{37}=-\frac{1}{74}\approx-0,0135$ 2) $\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot9+\frac{1}{6}\cdot16+\frac{1}{6}\cdot25+\frac{1}{6}\cdot36=\frac{1}{6}\cdot91\approx15\ euro$

3) Con la formula semplificata: $sper.mat.=\frac{1}{11748}\cdot45000-10=-6,16956...$

4) $p(\mathrm{TT})=\frac{1}{4};\quad p(\mathrm{CC})=\frac{1}{4};\quad p(\mathrm{TC}\vee\mathrm{CT})=\frac{1}{2}\qquad sper.mat.=\frac{1}{4}\cdot20+\frac{1}{4}\cdot10+\frac{1}{2}\cdot(-15)=0$
   Il gioco è equo: alla lunga, si può perdere o si può vincere,
   ma comunque con sbalzi limitati rispetto alla situazione finanziaria iniziale.

5) Speranze matematiche (arrotondate ai centesimi): $-37,60\%$ $-37,58\%$ $-61,70\%$ $-76,52\%$ $-86,35\%$
   Indici di equità: 62,40% 62,42% 38,30% 23,48% 13,65%

6) I) a) 3,5 b) 7 c) 12,25 II) Non dovrebbe discostarsi molto da $12,25\cdot1000=12250$

7) $p(asso)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10};\quad p(non\ asso)=\frac{9}{10}$. La mia speranza matematica nel gioco è $\frac{1}{10}\cdot(-10)+\frac{9}{10}\cdot1=-\frac{1}{10}$
   e, se giocassi 1000 partite, mi aspetto di perdere una cifra intorno ai 100 euro.

8) $$\overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{30}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta a)}}=\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{180}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta b)}}$$

4.8 - Probabilità soggettiva

Nella vita di tutti i giorni chiunque, più o meno consapevolmente, effettua valutazioni di probabilità *senza* ricorrere NÉ al calcolo del rapporto *n° casi favorevoli/n° casi possibili*, NÉ all'osservazione di una *frequenza*.

Pensiamo ad esempio a una partita di calcio fra due squadre improvvisate all'oratorio:
non ha alcun senso pensare ad un insieme di casi equipossibili, ma non ha neppure senso una visione statistica, visto che quelle due particolari squadrette non si sono mai incontrate in precedenza!
Però bene o male conosciamo l'abilità dei singoli giocatori, per cui *un'idea* della probabilità *ce la potremo fare*.
Che probabilità c'è che le azioni di una data ditta non diminuiscano di valore nei prossimi 6 mesi?
Quanto è probabile che la cuginetta Anna si separi dal fidanzato entro la fine di quest'anno?

Nel passare in rassegna, al paragrafo 3, i vari tipi di "probabilità",
avevamo presentato brevemente la probabilità "soggettiva" nel modo che riportiamo qui di seguito.

INTERPRETAZIONE 1)
La probabilità "soggettiva" di un evento è a/b se un soggetto "coerente" G è disposto a pagare subito la somma a per ricevere in futuro la somma b (con un guadagno netto, quindi, uguale a $b-a$) nel caso che l'evento si verifichi.
"Coerente" significa che lo stesso soggetto G deve essere disposto in qualsiasi momento a scambiarsi di ruolo con l'altro giocatore G' … Ma cosa fa l'altro giocatore? Riceve tanto per cominciare la somma a, ed è disposto a pagare b se l'evento si verifica: quindi anche G, per essere coerente, deve essere disposto a incassare subito la somma a per pagare in un futuro la somma b (con una perdita uguale in valore assoluto a $b-a$) se l'evento si verifica.

INTERPRETAZIONE 2)
Anche, in modo del tutto equivalente:
la probabilità di un evento E è uguale a s/S se per me è del tutto indifferente l'offerta, da parte di un benefattore,

- ♪ di una somma s certa, che mi viene pagata in ogni caso
- ♫ oppure in alternativa di una somma S, che però mi verrà data solo se l'evento E si verificherà.

Cerchiamo di chiarire meglio il discorso facendo degli esempi.
Dunque **io valuto soggettivamente uguale a 1/4 la probabilità di un evento se sono disposto a pagare 1 euro, per incassare 4 euro nel caso l'evento si verifichi (in questo caso mi verrebbe restituito il mio euro, e me ne verrebbero pagati altri 3 di vincita netta); però sarei anche disposto a mutare la mia scommessa nella seguente: incasso 1 euro, ma lo restituirò e in più pagherò 3 euro (in totale: sborserò 4 euro) se l'evento si verificherà.**

Ma allora **valutare soggettivamente in 1/4 la probabilità di un evento vuol dire, in fondo, ritenere che la facilità di verificarsi di quell'evento sia paragonabile alla facilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un'urna contenente 1 Rossa e 3 Nere, per un totale di 4 palline**:
anche di fronte a quest'urna, infatti, sarebbe equo offrirsi di pagare subito la somma di 1 euro nella prospettiva di incassare 4 euro (con un guadagno netto di 3) qualora, estraendo una pallina, esca una Rossa
(infatti, su 1000 estrazioni con reimbussolamento, è previsto di pescare una Rossa all'incirca 250 volte, vincendo dunque 750 euro netti, e una Nera 750 volte circa, perdendo circa 750 euro: si resterà pressappoco alla pari).

Posso anche vederla in questo modo: valutare uguale a 1/4 la probabilità dell'evento significa che se un (improbabile! ☺) benefattore mi offre di regalarmi 4 euro nel caso l'evento si verifichi, io posso dirgli: guarda, pagami 1 euro comunque vadano le cose, e siamo a posto.

Immagina, anche in questa ottica, di effettuare 1000 prove:
vedrai che la tua situazione finanziaria non varierebbe di molto se tu facessi una scelta piuttosto che l'altra.
Su 1000 prove, se fai la scelta a) (il benefattore ti dà 4 euro ogni volta che l'evento si verifica), vincerai pressappoco 250 volte con un guadagno netto di $250\cdot 4=1000$ euro.
E se fai la scelta b) (1 euro per ogni prova, qualunque sia l'esito) il tuo guadagno netto sarà di $1000\cdot 1=1000$ euro.
Nulla cambia.

Osserva anche questo: la scelta a) e la scelta b) hanno la stessa "speranza matematica"! (vedi paragrafo precedente).

Infatti $\overbrace{\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{4}_{\text{vincita netta}}}^{\text{scelta a)}} = \overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{1}_{\text{vincita netta}}}^{\text{scelta b)}}$.

Verifica tu stesso che nell'interpretazione 1), in cui non compare il fantomatico e leggendario benefattore ma ci sono due contendenti, i giocatori G e G', la speranza matematica di ciascun giocatore è 0.

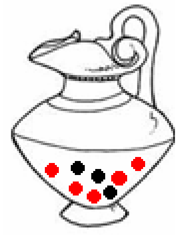
Qualcuno potrebbe obiettare: "Ma che senso ha chiamare in causa la speranza matematica, quando l'evento di cui ci si sta occupando non è un evento ripetibile?"… Giusto; tuttavia, se consideriamo il fatto che assegnare, per esempio, probabilità soggettiva 1/4 ad un evento, significa assegnargli lo stesso grado di "facilità" che avrebbe l'estrazione di una pallina Rossa da un'urna con 1 sola Rossa e 4 palline in totale, ecco che **il concetto di "speranza matematica"** torna ad avere un senso; e in effetti, **può aiutarci a decidere** rapidamente **sull'equivalenza o meno di due situazioni.**

IL MONDO
INFIDO E TRISTE
DELLE SCOMMESSE

… Come sono furbo!
Quest’anno ho perso solo 10000 euro!
Un altro ne avrebbe persi minimo 20000!

Cosa vuol dire, in una scommessa sulle corse di cavalli, che Fulmine è dato 5 contro 3?
Vuol dire che la probabilità di Fulmine vincente è valutata, soggettivamente, uguale alla probabilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un’urna con 5 palline Rosse e 3 Nere, per un totale di 8 palline.
Quindi

parlare di "vittoria di Fulmine data 5 CONTRO 3"
equivale ad attribuire a Fulmine una probabilità di vincere di
$\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}=62,5\%$
come se ci fosse 1 urna con 5 palline Rosse e 3 nere (8 in totale)
e si ritenesse la probabilità di vittoria di Fulmine uguale
alla probabilità di estrarre una pallina Rossa da quest'urna.



In casi come quello dell’es. precedente si suole anche dire che la “quotazione” di Fulmine è 5/3 (5 su 3, 5 contro 3).
Attenzione, però!
“Quotazione” r non vuol dire “probabilità” p: per passare dalla “quotazione” (5/3 nell’esempio dato) alla “probabilità”, si deve applicare la formula $p=r/(r+1)$ (dimostralo!). La “quotazione” è una specie di … “probabilità relativa”.

L’avverbio “contro”, nelle scommesse, è utilizzato anche quando si specifica quanto si incasserebbe, a fronte di una data puntata (solitamente si prende la puntata unitaria: 1 euro), nel caso l’evento pronosticato si verifichi.
Ad esempio, **nei paesi europei ad esclusione della Gran Bretagna, si parla di pagare “4 contro 1” un evento per indicare che “il banco”, ossia l’organizzazione che gestisce le scommesse, se lo scommettitore punta 1 euro su di un evento, promette di pagargli una somma LORDA di 4 euro nel caso l’evento si verifichi** (somma lorda: quindi il giocatore incasserebbe 4 euro ma al netto vincerebbe $4-1=3$ euro).

il "Partito della Pagnotta" vincente alle elezioni
è pagato 200 CONTRO 1 se chi punta 1 sulla vittoria di quel partito
ne incassa 200 (guadagno netto $200-1=199$) se l'evento si realizza

Le QUOTAZIONI ALLE SCOMMESSE (= le quote che vengono pagate dal *banco* per ogni euro pagato dallo *scommettitore*) **sono espresse in modo differente nelle varie zone geografiche.**

- Nell’**EUROPA CONTINENTALE**, ad es., **la consuetudine è di indicare la quota sotto forma di numero, intero o decimale, che esprime la vincita LORDA di chi ha puntato 1 sull’evento.**
  Cosicché, se la quota è 1,5 e Tizio ha puntato 1 euro, la somma che il banco verserà a Tizio nel caso indovini è 1,5 e il guadagno netto di Tizio è 0,5.
  Naturalmente, se Tizio avesse puntato 100 euro, ne incasserebbe $1,5\cdot 100=150$ con un guadagno netto di 50, ecc.
- In **GRAN BRETAGNA**, si usa una **frazione che porta a numeratore il guadagno NETTO e a denominatore la puntata,** cosicché, ad esempio, il Partito della Pagnotta dell’esempio precedente verrebbe quotato 199/1, e una quota 1/5 significherebbe che se lo scommettitore punta 5 euro, in caso di vincita guadagnerà 1 euro netto (= gli verranno restituiti i 5 euro sborsati, e in più gli verrà dato 1 euro, per un totale lordo di 6 euro).
- Negli **STATI UNITI** l’abitudine è di utilizzare numeri negativi o positivi:
  un numero negativo indica la puntata necessaria per conseguire un guadagno NETTO di 100,
  un numero positivo indica il guadagno NETTO che corrisponde a una puntata uguale a 100.
- **Naturalmente il “banco”, se ritiene, in base alle sue documentatissime informazioni e sofisticate valutazioni, che un evento abbia, ad esempio, 1 probabilità su 5 di verificarsi, non si dichiarerà mai disponibile a pagare quella che sarebbe la quota “equa”, ossia un premio lordo di 5 quando il giocatore punta 1: prometterà invece di versare un lordo di 4, o di 3,5 ad esempio, in modo che, sul gran numero di scommesse e tenuto conto anche delle puntate sull’evento contrario, gli scommettitori globalmente ci rimettano e il banco stesso invece prosperi, alla faccia dei pesciolini e pescioloni.**
- Il comportamento di una persona intelligente è identico tanto nell’Europa continentale, quanto nel Regno Unito o negli USA o altrove: egli, semplicemente, non scommette nulla: euro 0,00.

Un giocatore perde sempre. Perde denaro, dignità e tempo.
E se vince, tesse intorno a sé una tela di ragno.
Mosè Maimonide, Sha' are ha-Musar

I tratti essenziali di ogni gioco: la simmetria, le leggi arbitrarie, il tedio.
Jorge Luis Borges, Esame dell'opera di Herbert Quain

ESERCIZI sulla probabilità "soggettiva"

1) Una giovane attrice con delle gambe stupende decide di assicurarle, e la compagnia le chiede di pagare un premio di 30000 euro, garantendole un rimborso di 2000000 di euro nel caso le gambe vengano rovinate - entro i prossimi 5 anni - da un incidente o altro (ferimento, malattia …)
Tenendo conto del fatto che la compagnia di assicurazioni vuole anche guadagnarci, se ne può dedurre che ha valutato la probabilità di un danno alle gambe come inferiore a … ???

2) Un amico mi offre di scommettere sulla vittoria di una squadra di calcio locale: se la squadra vincerà, lui mi pagherà 50 euro, mentre richiede che io gli paghi 20 euro in caso di pareggio o sconfitta.
Tenendo conto del fatto che l'amico mi vuole fregare, che valore si deve ritenere che abbia soggettivamente attribuito alla probabilità di vittoria per quella squadra?

3) Un tappo di plastica non è perfettamente simmetrico: può darsi dunque che tenda, se lanciato, a fermarsi più facilmente con la parte cava verso l'alto … o con la parte convessa verso l'alto, chissà!
Come faccio a stabilire qual è l'esito più probabile del lancio del tappo?
Se ritengo equa una scommessa nella quale si tratta di lanciare un tappo e pagare 35 centesimi nel caso il tappo si fermi con la parte cava verso l'alto, per vincerne 65 in caso contrario, che probabilità sto assegnando all'evento "parte cava verso l'alto"?

4) Ho lanciato per 500 volte una puntina da disegno, poi mi sono stufato … ma ho osservato che per 190 volte questa si è fermata con la punta verso l'alto. Ora, dovendo organizzare una scommessa equa sul lancio della puntina da disegno, se chi parteggia per l'esito più probabile vuole vincere 5 euro netti, quanto gli imporrò di pagare qualora si verifichi invece l'esito più difficile?

5) Di fronte ad una competizione fra i tre cavalli Dinamite, Tornado e Orazio, ritengo, soggettivamente, che Dinamite abbia il doppio delle probabilità di vincere rispetto a Tornado, e 2 volte e mezza le probabilità di Orazio.
Sai dirmi, quindi, che probabilità sto assegnando alla vittoria di ciascuno?

6) a) Sono un esperto e smaliziato giocatore di flipper, e quello installato al bar Sport non ha segreti per me.
Ritengo sia equo sfidare gli amici a una scommessa sotto queste condizioni:
se faccio almeno 100000 punti in una partita, vinco 5 euro, altrimenti ne pago 20
(equo nel senso che, ripetendo la sfida molte volte, non mi aspetto né di perdere né di vincere molto).
In questo modo, quale probabilità implicitamente attribuisco al mio fare 100000 punti in una partita?

b) In generale, se ritengo equo, qualora si verifichi un evento E, di vincere una somma x, accettando di perdere una somma y qualora E non si verifichi, qual è la mia valutazione della probabilità dell'evento E?

7) Trasforma l'espressione della quota di una scommessa a seconda delle usanze dei vari paesi:

Italiana	Inglese	Americana
3,5		
	5/8	
		−75 opp. + …

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1		
… contro …	7/3	
… contro …		− … opp. +100

8) Se la quota (italiana) di una scommessa è 1,80 quanto devo puntare per vincere 20 euro netti se mi va bene?
In generale, se la quota (italiana) di una scommessa è q, quale dev'essere la mia puntata x se voglio una vincita netta y in caso di successo? E se punto z, quanto vincerò al netto?

RISPOSTE

1) inferiore a 1,5% 2) <2/7 3) Lanciando tantissime volte e calcolando la freq. rel. di ciascun esito. 0,65 = 65%

4) $190:500=0,38$ per cui posso attribuire all'evento "punta verso l'alto" una probabilità del 38% circa.
Ora, il gioco è equo se questo esito "punta verso l'alto", che è il più difficile, viene pagato 8,16 euro circa.

5) Detta p la probabilità che attribuisco a Dinamite, si avrà

$$p+\frac{p}{2}+\frac{p}{2,5}=1 \text{ da cui } p=\frac{10}{19};\ \text{perciò } p_D=\frac{10}{19},\ p_T=\frac{5}{19},\ p_O=\frac{4}{19}$$

6) a) $\frac{4}{5}=0,8=80\%$ b) $\frac{y}{x+y}$

7)

Italiana	Inglese	Americana
3,5	5/2	−40 oppure +250
1,625	5/8	−160 oppure +62,5
2,333	4/3	−75 opp. +133,333

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1	9/1	−11,111 oppure +900
10 contro 3	7/3	−42,857 oppure +233,333
2 contro 1	1/1	−100 opp. +100

8) per vincere un netto di 20, devo puntare 25; per vincere y netti, punto $x=\frac{y}{q-1}$; se punto z, vinco $z(q-1)$ netti

4.9 - Curiosità: il "paradosso di Simpson"

Vado pazzo per le caramelle al Limone; quelle alla Menta, invece, non so perché, mi danno un po' di nausea.
Ora, in una stanza (S1) ci sono due urne, una Bianca (B1) e una Nera (N1),
tali che la Bianca contiene 1 caramella al Limone e 2 caramelle alla Menta,
mentre la Nera contiene 3 caramelle al Limone e 9 caramelle alla Menta.
In un'altra stanza (S2) vi sono poi altre due urne, una Bianca (B2) e una Nera (N2),
tali che la Bianca contiene 1 caramella al Limone e 10 caramelle alla Menta,
mentre la Nera contiene 1 caramella al Limone e 11 caramelle alla Menta.
Verifica che

♪ in qualunque stanza io entri, con la possibilità di scegliere un'urna e da questa pescare una caramella, per assecondare i miei gusti mi converrebbe sempre optare per l'urna Bianca presente in quella stanza;

♫ mentre, stranamente, se si mettessero insieme i contenuti delle due urne Bianche, creando così una terza urna Bianca B3, e allo stesso modo si facesse con le due Nere generando una nuova urna Nera N3, dovendo scegliere fra B3 ed N3 mi converrebbe questa volta prendere l'urna Nera!

Questo fatto inaspettato che si presenta a volte nelle applicazioni della Statistica, ad esempio in medicina, o nelle scienze sociali, prende il nome di "paradosso di Simpson" (reversal paradox, amalgamation paradox, …) e ad esso si riferisce il riquadro che segue, per il quale ringrazio l'Autore Thomas Michael Müller/Vismara.

PARADOSSI DI STATISTICA: IL PARADOSSO DI SIMPSON

Immaginiamo che la nota rivista italiana Lankelot (letteratura e sogni) si trovi ad affrontare una scabrosa situazione.
Un imprenditore, interessato ad affossare la rivista, pubblica una serie di attacchi contro il direttore, Franchi.
In particolare lo accusa di discriminazione contro le donne. Afferma infatti che nell'ultimo anno la rivista
ha ricevuto 1200 articoli passati al vaglio dei reviewer di Lankelot. 600 sono stati scritti da uomini e 600 da donne.
Tra i 600 sottoposti da uomini, ne sono stati accettati 350, vale a dire il 58,3%;
dei 600 sottoposti da donne, ne sono stati accettati soltanto 250, vale a dire il 41,7%.
L'imprenditore scrive, in un rovente articolo, che si tratta di un chiaro caso di discriminazione.
Franchi, comprensibilmente nervoso, controlla i dati: tutto vero, l'imprenditore non mente.
Allora si rivolge, piuttosto arrabbiato, ai responsabili delle varie sezioni di Lankelot, vale a dire
Arti (cinema e musica), Letteratura e Scienze, per avere una spiegazione, e scovare il responsabile della figuraccia.
Dalla sezione Scienze, Mat risponde che sono stati proposti 400 articoli: 200 scritti da uomini e 200 da donne.
Ne sono stati accettati la metà per gli uomini e la metà per le donne (100 e 100), vale a dire il 50% del totale.
Nessuna discriminazione quindi.
Dalla sezione Arti, Federico risponde che sono stati sottoposti 400 articoli, 300 scritti da uomini, e 100 da donne.
Sono stati accettati 225 articoli di uomini (il 75 %) e 75 articoli scritti da donne (il 75 %).
Anche qui, nessuna discriminazione.
Infine, arrivano i dati di Marina: la sezione Letteratura ha ricevuto 400 articoli, 300 scritti da donne, 100 da uomini.
Sono stati accettati 75 articoli scritti da donne (il 25%) e 25 articoli scritti da uomini (il 25%).
Nemmeno qui si ravvisano irregolarità.
Franchi a questo punto è imbarazzato e conta i dati:

- sono stati proposti in totale 1200 articoli (400 per ogni sezione).
- Sono stati proposti 600 articoli, sia per gli uomini (200+300+100) che per le donne (200+100+300)
- Sono stati accettati 100+225+25 = 350 articoli scritti da uomini. 350 su 600 significa il 58,3%
- Sono stati accettati 100+75+75 = 250 articoli di donne, vale a dire il 41,7%

Quindi l'imprenditore non mente (anzi, è in buona fede), Franchi non ci capisce più niente,
e i responsabili delle sezioni nemmeno. Cosa succede quindi?

Succede che siamo in pieno nel PARADOSSO DI SIMPSON.
Poco conosciuto persino dagli statistici, il paradosso di Simpson permette a certe condizioni
situazioni in cui il comportamento di sottogruppi è diverso dal comportamento complessivo.
Il nostro esempio, per dirne una, inverte una situazione perfettamente paritaria a livello di singole sezioni,
in una situazione globale in cui le donne sono discriminate. Potrebbe anche accadere di peggio: avremmo potuto
avere una situazione in cui gli uomini sono sfavoriti a livello delle singole sezioni, ma le donne sfavorite in totale.
Il nostro caso può essere letto così: benché donne e uomini siano trattati in modo uguale, le donne hanno scelto
in maggioranza la sezione con i criteri di selezione più duri. Ecco quindi l'origine del paradosso.
Francois Bavaud e Patricia Roux, dell'Università di Losanna, nel loro lavoro sul Swiss Journal of Psychology,
"The means inversion paradox: when the whole is inverted relatively to each of its parts",
presentano 5 casi reali di paradosso di inversione. Ad esempio:

- il tasso di ammissione postgraduate all'università della California è più basso per le donne, ma in ogni singola facoltà la situazione è invertita (le donne scelgono facoltà meno permeabili)
- In ogni regione della Francia, il consumo di patate è più alto tra i contadini, che tra i non-contadini, ma la tendenza è invertita nel complesso. Molti contadini vivono in regioni dove si mangiano poche patate.

(…) Il paradosso può avere luogo anche con sotto-sottocategorie rispetto alle sottocategorie, e così di seguito. (…)