

6 - PROBABILITA' CONDIZIONATA

6.1 - Cosa significa "probabilità condizionata" (o "subordinata")

□ Esempio 1

Prima di lanciare un dado,

io so che la probabilità di ottenere un determinato esito, ad esempio "5", è $1/6$.

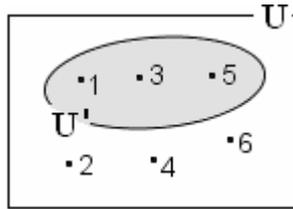
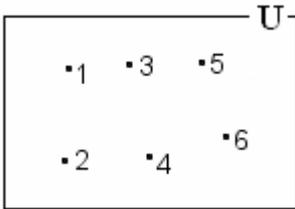
Ma se io lancio il dado, non guardo che numero esce,

e una persona che ha visto mi riferisce che è uscito un numero dispari,

a questo punto come valuterò la probabilità che l'esito del lancio sia stato il numero "5"?

Evidentemente la probabilità, per effetto del "surplus di informazione", salirà a $1/3$!

Ciò è dovuto al fatto che l'informazione acquisita mi porta a "rinnovare" l'insieme universo: dall'iniziale $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ esso diventa $U' = \{1, 3, 5\}$.



In generale:

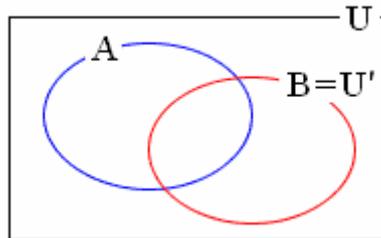
se U è lo spazio degli eventi, e A, B sono due suoi sottoinsiemi, cioè due eventi (vedi figura sottostante),
 si dice "probabilità dell'evento A , CONDIZIONATA al verificarsi dell'evento B "
 la probabilità di A valutata nell'insieme universo B .
 Tale probabilità si indica con $p(A/B)$ (leggi: probabilità di "A condizionato a B").



Se indichiamo col simbolo $n(X)$ il numero degli elementi di un insieme X , sarà quindi:

$$p(A/B) = n(A \cap B) / n(B)$$

e, nel caso particolare che A sia sottoinsieme di B ,
 $p(A/B) = n(A) / n(B)$



Nel caso dell'esempio inizialmente proposto, potremo scrivere:

$p("5"/\text{dispari}) = 1/3$ (leggi: la probabilità che l'esito sia 5, condizionata al fatto che l'esito sia dispari, è $1/3$).

Il concetto è molto rilevante, e può presentarsi sotto diversi aspetti. Facciamo altri esempi.

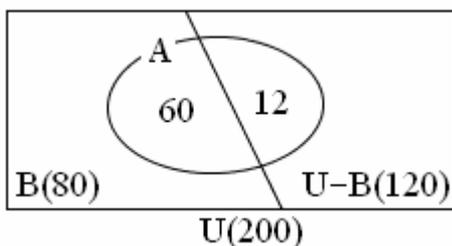
□ Esempio 2

Nel mio Liceo ci sono 200 ragazze, 80 delle quali sono bionde; so anche che ha gli occhi azzurri il 75% delle bionde (= 60 ragazze), e il 10% delle non-bionde (= 12 ragazze).

Io, in confidenza, adoro le bionde, specialmente quando hanno pure gli occhi azzurri.

Se come premio per una gara ho vinto un bacio da parte di una ragazza estratta a sorte fra le studentesse del Liceo,

1. che probabilità c'è che la ragazza sorteggiata sia Bionda?
2. che probabilità c'è che abbia gli occhi Azzurri?
3. che probabilità c'è che sia una Bionda con gli occhi Azzurri?
4. se qualcuno mi confida che la ragazza sorteggiata è Bionda, che probabilità c'è che abbia gli occhi Azzurri?
5. se, invece, vengo a sapere che la ragazza sorteggiata ha gli occhi Azzurri, qual è la probabilità che sia Bionda?



NOTA

Sappiamo che $U - B$

si può anche indicare con \bar{B}

(= "il complementare di B")

Risoluzione

Posto

A = "la ragazza estratta ha gli occhi azzurri",

B = "la ragazza estratta è bionda",

avremo

 $A \cap B =$ "la ragazza estratta è bionda e ha gli occhi azzurri"

e potremo scrivere:

1. $p(B) = 80/200$
2. $p(A) = 72/200$
3. $p(A \cap B) = 60/200$

Fin qui si trattava di calcolare probabilità "normali".

I punti successivi, invece, si riferiscono a probabilità "condizionate":

4. $p(A/B) = 60/80$
5. $p(B/A) = 60/72$

Si potrebbe dire che
"la probabilità $p(A/B)$ dell'evento A, condizionata al verificarsi di B"
 è
"la probabilità che si sia verificato o si verifichi l'evento A,
valutata sapendo o supponendo che si verifichi o si sia verificato B".

Notare che **non necessariamente l'evento A dev'essere successivo, in senso temporale, all'evento B.**

Per illustrare quest'ultima puntualizzazione relativa all'ordine temporale, mi sembra significativo il seguente ulteriore esempio.

□ Esempio 3

Gli almanacchi del calcio contengono i dati relativi a tutte le partite di tutti i campionati nazionali italiani di serie A fin qui disputati. Che probabilità sussiste, per una squadra che ha vinto una partita, di aver vinto anche il primo tempo?

Per spiegarmi meglio, poniamo che mi sia stata proposta la seguente scommessa:

prendiamo una partita a caso di un campionato a caso (estriamo a sorte sia il campionato che la partita, insomma).

Se la partita estratta è terminata in pareggio, non la consideriamo neppure e ne estraiamo un'altra.

Se invece la partita è terminata con la vittoria di una delle due squadre, mi viene proposto di puntare 100 euro per riceverne 150 se la squadra che ha vinto aveva terminato in vantaggio il primo tempo.

Mi conviene accettare una simile scommessa?

Evidentemente, per saperlo dovrei conoscere la probabilità $p(P/F)$, cioè la probabilità che una squadra abbia vinto il Primo tempo (P), se ha poi vinto alla Fine della partita (F).E valuterò tale probabilità andando a contare il numero n di partite che sono terminate con la vittoria di una delle due squadre,il numero k di volte in cui la squadra vincitrice della partita considerata aveva vinto anche il relativo 1° tempo, per porre infine, in una visione "frequentista", $p(P/F) = k/n$.

Ancora:

□ Esempio 4**Butto un dado FINCHE' non esce un numero superiore a 3.****(Vale a dire: se esce 1, 2 o 3, la prova non mi interessa, faccio come se non fosse stata effettuata e quindi la ripeto.****Se esce 4, o 5, o 6, la prova è "valida").****Con queste modalità, che probabilità c'è di ottenere un numero pari?**

Evidentemente, la risposta è: 2/3.

E' stata valutata la

"probabilità che dal lancio di un dado esca un numero pari, condizionata all'uscita di un numero superiore a 3".