6.4 - Eventi stocasticamente indipendenti

- **Esempio 6**
  Da un mazzo di carte da scopa si estrae una carta.
  La probabilità che sia di "cuori" è 10/40 = 1/4.
  Se so che la carta estratta è una figura, la probabilità che si tratti di una carta di cuori rimane 1/4.

C = "esce una carta di cuori"; F = "esce una figura";
***p*(C) = 1/4; ma anche *p*(C/F) = 1/4**.
Quindi, in questo caso, $p(C/F) = p(C)$: il verificarsi di F non modifica la probabilità del verificarsi di C.

Quando, dati due eventi,
il verificarsi di uno di essi non modifica la probabilità del verificarsi dell'altro,
si dice che i due eventi sono "stocasticamente indipendenti":

A, B stocasticamente indipendenti
SE E SOLO SE
1) $p(A/B) = p(A)$
2) $p(B/A) = p(B)$

Si può dimostrare che ogniqualvolta $p(A/B) = p(A)$ è anche $p(B/A) = p(B)$ e viceversa;
insomma, delle due condizioni che definiscono l'indipendenza stocastica,
una (qualsiasi) è conseguenza dell'altra.

6.5 - Esercizi (probabilità condizionata)

Qualche bell'esercizio sul concetto di "probabilità condizionata" e di "eventi stocasticamente indipendenti".
Trovi le risposte commentate di seguito alla rassegna.

1) Da un mazzo di carte da scopa (40 carte), si estrae una carta.
   a) Che probabilità c'è che sia un "re"?
   b) Se vengo a sapere che la carta estratta è una figura,
      che valutazione darò della probabilità che si tratti di un "re"?

2) Si estraggono, successivamente, e senza reimbussolamento, 2 palline da un'urna
   che contiene 3 Nere e 2 Rosse.
   a) Se la prima estratta è R, che probabilità sussiste che la seconda sia pure R?
   b) Prima di estrarre la prima pallina, come avremmo valutato la probabilità che,
      alla fine della prova, la seconda estratta risultasse una Rossa?

3) Si lancia un dado due volte.
   a) Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10,
      ammesso che uno di questi punti sia 6?
   b) Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10,
      ammesso che il punto ottenuto col primo lancio sia 6?
   c) Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10,
      ammesso che il punto ottenuto col secondo lancio sia 6?

4) In una certa gara le probabilità di vincere dei quattro concorrenti A, B, C, D
   sono state valutate rispettivamente in: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4
   (qui sconfiniamo piuttosto in una concezione "soggettivistica" della probabilità:
   è ovvio che non si sono considerati "casi favorevoli" e "casi possibili",
   ma si è cercato di quantificare, con ragionamenti e confronti,
   le possibilità di ciascun concorrente di vincere quella gara.
   Insomma, si è concluso che le capacità e le condizioni fisiche e psicologiche dei concorrenti
   sembrano tali da equiparare la gara all'estrazione di una pallina da un'urna contenente 10 palline,
   di cui 1 reca il simbolo "A", 2 recano il simbolo "B", 3 il simbolo "C" e 4 il simbolo "D").
   Ora, se il concorrente D si ritira, come verranno ricalcolate le probabilità di A, B, C?

5) Immagina di lanciare tre volte una moneta e considera gli eventi:
   A = "si presenta la stessa faccia in tutti e tre i lanci"
   B = "si presenta Testa in almeno due lanci"
   Dimostra che A, B sono due eventi stocasticamente indipendenti.

6) I due eventi "lanciando una coppia di dadi, esce una somma dispari" e
   "lanciando una coppia di dadi, si presenta almeno una volta la faccia '1' "
   sono stocasticamente indipendenti?

RISPOSTE:

1a) $p(\text{K = King = re}) = 4/40 = 1/10$ 1b) $p(\text{K/F}) = 4/12 = 1/3$
Quindi i due eventi “K, esce un re” e “F, esce una figura” NON sono stocasticamente indipendenti.

2a) $p(2^{a}\ \text{Rossa}/1^{a}\ \text{Rossa}) = 1/4$

2b) $p(2^{a}\ \text{Rossa}) = 2/5$
A questa risposta 2b), oltre che contando
il numero dei casi equipossibili (coppie ordinate di palline distinte: $5 \cdot 4 = 20$)
e quello dei casi favorevoli (che sono $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$: … non sei convinto? Fai un diagramma ad albero!),
si potrebbe pervenire con estrema semplicità nel modo seguente.

Possiamo pensare di chiudere gli occhi e pescare, anziché 2 soltanto,
TUTTE E 5 le palline, una dopo l’altra, disponendole in fila.
Evidentemente, la probabilità richiesta dal quesito 2b coincide con la probabilità
che la seconda pallina della fila sia una Rossa.
Ma non c’è motivo per cui tale probabilità differisca dalla probabilità
di trovare una Rossa in un posto prefissato qualsiasi, ad esempio il 1° posto.
E tale probabilità è, evidentemente, 2/5.

3a) 3/11 3b) 1/3 3c) 1/3

4) Probabilisticamente, è esattamente come avere 10 palline,
1 delle quali reca il simbolo “A”, 2 delle quali “B”, 3 delle quali “C”,
mentre le rimanenti 4 palline portano il simbolo “D”.
Ora, se le 4 palline recanti “D” vengono eliminate restano le rimanenti 6 palline …
Le probabilità richieste sono:
probabilità 1/6 per la vittoria di A, 2/6 per la vittoria di B e 3/6 per la vittoria di C.
Possiamo anche scrivere così:

$$p(\text{A}/\overline{\text{D}}) = \frac{1}{6}, \quad p(\text{B}/\overline{\text{D}}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p(\text{C}/\overline{\text{D}}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo usato disinvoltamente il simbolo $\overline{\text{D}}$
per schematizzare “non D” nel senso di “D ritirato”

5) La nostra tesi è: $p(\text{A/B}) = p(\text{A})$ o, indifferentemente, $p(\text{B/A}) = p(\text{B})$.

- $p(\text{A/B}) = p$("stessa faccia in tutti e 3"/"Testa in almeno 2").
Ora, l’ipotesi che esca Testa in almeno 2 lanci ci porta all’insieme universo “ristretto”
{TTT, TTC, TCT, CTT}
nell’ambito del quale l’evento “stessa faccia in tutti e 3” si verifica nel solo caso TTT. Perciò
$p(\text{A/B}) = 1/4$.

- Calcoliamo ora $p(\text{A})$.
n° casi possibili = $2^3 = 8$; n° casi favorevoli = 2
quindi
$p(\text{A}) = 2/8 = 1/4$.

Ma allora
$p(\text{A/B}) = p(\text{A}) = 1/4$
e la tesi è dimostrata.

6) Fra i 36 casi possibili nel lancio di due dadi,
quelli nei quali la somma degli esiti è dispari sono 18, per cui
$p(\textit{somma dispari}) = 18/36 = 1/2$

mentre quelli in cui compare almeno una volta la faccia “1” sono i seguenti:
(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1)
ossia sono 11, in 6 dei quali la somma è dispari.
Perciò
$p(\textit{somma dispari}/\textit{almeno un}\ 1) = 6/11$.

Essendo
$p(\textit{somma dispari}/\textit{almeno un}\ 1) \neq p(\textit{somma dispari})$,
i due eventi NON sono statisticamente indipendenti.