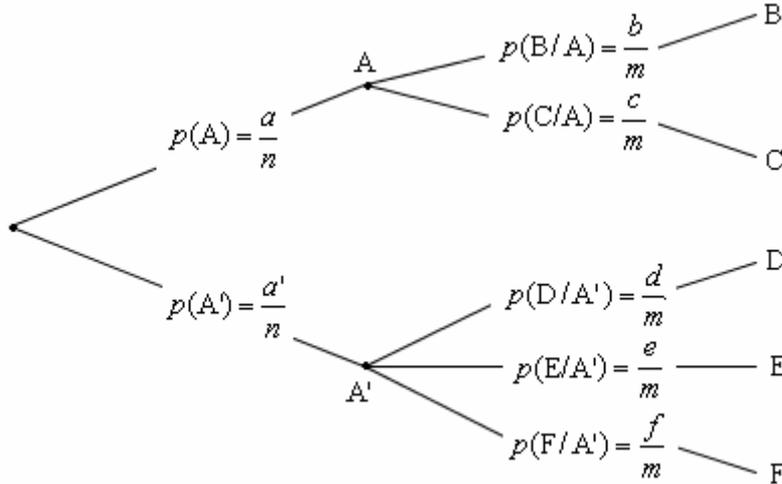


8.2 - Dimostrazione del Teorema sugli "eventi a due fasi"

Il procedimento dimostrativo consiste nella generalizzazione di quanto fatto nell'esempio introduttivo: passaggio ad una prova modificata, probabilisticamente equivalente a quella di partenza, con lo scopo di ricondursi ad un insieme di casi tutti equipossibili.

Il grafo sottostante mostra la struttura di una generica prova aleatoria a due fasi; A, A', B, C, D, E, F rappresentano generici eventi.



Di ciascun evento è specificata la probabilità (eventualmente, "probabilità condizionata"). Per semplicità, ho supposto che si abbiano 2 esiti possibili per la prima fase (o "prima prova parziale") e 2+3 esiti possibili per la seconda fase (= "seconda prova parziale"). E' chiaro però che la dimostrazione sarebbe facilmente generalizzabile a situazioni diverse, comunque complicate.

Il fatto che le probabilità $p(A)$ e $p(A')$ siano espresse da due frazioni con lo stesso denominatore n non è restrittivo, voglio dire: non riflette un caso particolare, perché comunque, se i due denominatori di $p(A)$ e $p(A')$ fossero diversi, io potrei sempre ridurre tali due frazioni al minimo comun denominatore.

Analogo discorso vale per le cinque probabilità $p(B/A)$, $p(C/A)$, $p(D/A')$, $p(E/A')$, $p(F/A')$: le suppongo espresse da cinque frazioni con lo stesso denominatore m

(se così non fosse, potrei sempre ricondirmi a questa situazione portando le cinque frazioni al m.c.d.).

Osserviamo che, per ovvi motivi, i numeri interi a, a', b, c, d, e, f sono tali da realizzare le uguaglianze $a + a' = n$, $b + c = m$, $d + e + f = m$.

Si tratta dunque di dimostrare (TESI) che $p(A \text{ e poi } B) = p(A) \cdot p(B/A)$, tanto per prendere un'uguaglianza qualsiasi fra le 5 dello stesso tipo.

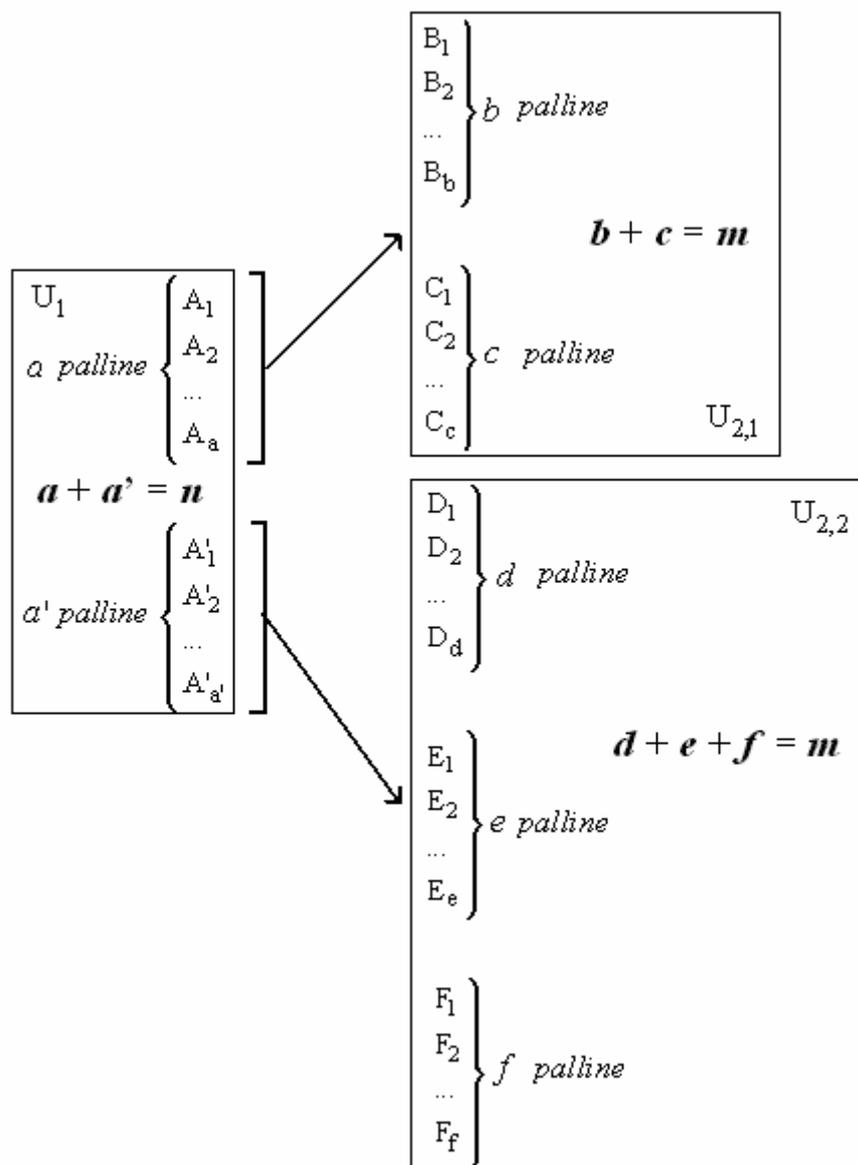
Poiché gli esiti possibili della prima fase sono:

A con probabilità a/n e A' con probabilità a'/n , possiamo concepire la prima fase come estrazione di una pallina da un'urna contenente n palline, su a delle quali ci sia la scritta "A" e sulle rimanenti a' la scritta "A'".

E analogamente per la seconda fase.

Quindi la nostra "prova a due fasi" potrà, in definitiva, essere considerata equivalente, dal punto di vista delle valutazioni di probabilità, alla prova descritta come segue:

- si estrae una pallina da un'urna contenente $n = a + a'$ palline, su a delle quali compare la scritta "A" mentre sulle rimanenti a' palline compare la scritta "A'".
- se l'esito di questa estrazione è "A", allora si pesca da un'urna con la seguente composizione:
 - m palline in totale;
 - b palline con la scritta "B",
 - c palline con la scritta "C"
- se invece l'esito della prima estrazione è "A'", allora si va a pescare da un'urna diversa, contenente:
 - m palline in totale;
 - d palline con la scritta "D",
 - e palline con la scritta "E",
 - f palline con la scritta "F".



(Sei convinto del fatto che la prova originaria e la "prova modificata", quella con le urne e le palline, sono probabilisticamente equivalenti?)

Solo se la tua risposta è affermativa puoi accettare il presente procedimento dimostrativo ...)

Dunque:

i casi possibili sono

$$a \cdot (b + c) + a' \cdot (d + e + f) = a \cdot m + a' \cdot m = (a + a') \cdot m = n \cdot m$$

Essi appaiono tutti equipossibili (ne sei convinto?)

I casi favorevoli al verificarsi dell'evento "A e poi B" sono $a \cdot b$.

La probabilità dell'evento "A e poi B" è data dal rapporto

$$\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$$

quindi

$$p(\text{A e poi B}) = \frac{a \cdot b}{n \cdot m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} = p(\text{A}) \cdot p(\text{B/A})$$

come volevasi dimostrare.