❑ **Esempio 1**

Da un'urna con 5 palline Rosse e 10 Nere si estraggono, una dopo l'altra e senza reimbussolamento, due palline; determinare la probabilità che siano entrambe Rosse.

Si tratta di un **EVENTO "A DUE FASI"**, per cui $p(\text{A } e \text{ } poi \text{ B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B/A}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$

E' $p(\text{B/A}) = \frac{4}{14}$ perché, se dall'urna è stata estratta una pallina Rossa, rimangono 14 palline, di cui 4 Rosse.

Si poteva procedere anche **contando i casi possibili**: $15 \cdot 14$ **e i favorevoli**: $5 \cdot 4$, da cui $p = \frac{5 \cdot 4}{15 \cdot 14} = \frac{2}{21}$

Conoscendo, poi, il Calcolo Combinatorio, si sarebbe potuto ragionare pensando a coppie non ordinate di palline, perché, evidentemente, la probabilità di pescare 2 Rosse non cambia se, anziché pescare una pallina dopo l'altra senza reimbussolare, si pescano in un colpo solo, simultaneamente, 2 palline!

$$p = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}}{\frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1}} = \frac{2}{21}$$

❑ **Esempio 2**

Se sia la professoressa di Latino che quella di Matematica pescheranno quest'oggi coi bigliettini per determinare il primo studente da interrogare in una classe di 20, che probabilità c'è per la timida Marinella di essere lei la vittima in entrambi i casi?

Pensandolo come un **EVENTO "A DUE FASI"**, con la fase A e la fase B *indipendenti* fra loro, si avrà

$$p(\text{A } e \text{ } poi \text{ B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$$

Si può anche rispondere **pensando direttamente al rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili**:

$p = \frac{1}{20 \cdot 20} = \frac{1}{400}$ dove $20 \cdot 20$ è il numero delle coppie ordinate che si possono ottenere dall'insieme dei 20 studenti (supponendo che il 2° elemento della coppia possa anche coincidere col 1°)

8.3 - "Regola della somma"; generalizzazione a più di due fasi

REGOLA DELLA SOMMA PER LE PROVE A DUE FASI:
in una "prova a due fasi", la probabilità dell'evento che si verifica se e solo se si verifica l'uno o l'altro di due eventi *INCOMPATIBILI* è la somma delle rispettive probabilità.

Ne omettiamo la dimostrazione (che si effettuerebbe tramite una "prova modificata" tipo quella di pag. 54).

NOTA - Osserviamo che un enunciato analogo a questa "regola della somma" era stato stabilito già in precedenza (teorema sulla probabilità dell'evento unione, o "teorema delle probabilità totali");
tuttavia, in quella circostanza si faceva riferimento ad uno spazio di eventi elementari equipossibili, mentre nelle "prove a due fasi" di cui ci stiamo occupando al presente, non abbiamo più tale condizione, che si recupera soltanto nel momento in cui si sostituisce la "prova originaria" con la "modificata".
Di qui l'esigenza di una dimostrazione autonoma.

❑ **Esempio**

Come es. di applicazione di questa "regola della somma", riferiamoci ancora al dado e all'urna di pag. 52.
Se venisse richiesta la "probabilità di estrarre una pallina Rossa", questa potrebbe essere calcolata come

$$p(\text{"1 } e \text{ } poi \text{ R"}) + p(\text{"non1 } e \text{ } poi \text{ R"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{5}{18} = \frac{31}{90}$$

GENERALIZZAZIONE A PIU' DI DUE FASI
Il teorema sugli eventi a due fasi si può facilmente generalizzare al caso di eventi "a più fasi":

$$p(\text{A1 e poi A2 e poi A3 e poi ...}) = p(\text{A1}) \cdot p(\text{A2/A1}) \cdot p(\text{A3/(A2 e poi A1)}) \cdot \ldots$$

La "regola della somma" continua a valere anche nel caso in cui le fasi siano più di due.

❑ **Esempio**

Probabilità, estraendo 3 palline di seguito da un'urna con 4 Rosse e 4 Nere, che siano tutte e tre Rosse?

Vedendolo come EVENTO "A TRE FASI": $p(\text{R } e \text{ } poi \text{ R } e \text{ } poi \text{ R}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{14}$.

In alternativa, se si conosce il **Calcolo Combinatorio**, dato che la probabilità resterebbe uguale se pensassimo di estrarre le 3 palline non una dopo l'altra, ma simultaneamente: $p = \binom{4}{3} \Big/ \binom{8}{3} = \ldots = \frac{1}{14}$

ESERCIZI

1a) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae a sorte l'urna da scegliere, e da questa si estrae una pallina.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, a) una Rossa b) una Verde

1b) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae una pallina da U1, e la si butta in U2; si estrae poi una pallina da U2.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, alla fine: a) una Rossa b) una Verde

1c) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae una pallina da U2, e la si butta in U1; si estrae poi una pallina da U1.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, alla fine: a) una Rossa b) una Verde

1d) Ci sono due urne, la prima (U1) contenente 3 palline Rosse e 2 Verdi, la seconda (U2) 1 Rossa e 6 Verdi. Si estrae una pallina da U1, la si mette da parte, e si versano le palline restanti nell'altra urna, da cui si estrae una pallina. Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, alla fine: a) una Rossa b) una Verde

2) Se da un'urna contenente 1 pallina Rossa e 6 palline Verdi si estraggono 4 palline una dopo l'altra, determinare la probabilità che siano tutte Verdi.

3) Si estraggono tre carte da un mazzo da scopa. Determinare la probabilità che siano tre "ori" (=denari, quadri)

4) In una classe con 8 ragazzi e 12 ragazze, la professoressa di Latino estrarrà a sorte, uno dopo l'altro, 3 "volontari" per le interrogazioni. Calcolare la probabilità che il primo sia un maschio seguito da 2 femmine.

5) Si lancia un dado per quattro volte di seguito e si domanda la probabilità che esca "4" almeno una volta.

6) Si lancia un dado per quattro volte di seguito e si domanda la probabilità che esca "4" una e una sola volta.

RISPOSTE

1a) $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{U1}\ e\ poi\ \mathrm{R})+p(\mathrm{U2}\ e\ poi\ \mathrm{R})=p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1})+p(\mathrm{U2})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U2})=$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{13}{35};\quad p(\mathrm{V})=1-p(\mathrm{R})=\frac{22}{35}$

1b) $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{R}\ e\ poi\ \mathrm{R})+p(\mathrm{V}\ e\ poi\ \mathrm{R})=p(\mathrm{R\ da\ U1})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U2/R\ da\ U1})+p(\mathrm{V\ da\ U1})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U2/V\ da\ U1})=$
$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{20}+\frac{1}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5};\quad p(\mathrm{V})=1-p(\mathrm{R})=\frac{4}{5}$

1c) $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{R}\ e\ poi\ \mathrm{R})+p(\mathrm{V}\ e\ poi\ \mathrm{R})=p(\mathrm{R\ da\ U2})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U1/R\ da\ U2})+p(\mathrm{V\ da\ U2})\cdot p(\mathrm{R\ da\ U1/V\ da\ U2})=$
$=\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{21}+\frac{3}{7}=\frac{11}{21};\quad p(\mathrm{V})=1-p(\mathrm{R})=\frac{10}{21}$

1d) $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{R}\ e\ poi\ \mathrm{R})+p(\mathrm{V}\ e\ poi\ \mathrm{R})=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{11}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{11}=\frac{17}{55};\quad p(\mathrm{V})=1-p(\mathrm{R})=\frac{38}{55}$

2) $p=\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{7}$ oppure, col Calcolo Combinatorio, pensando alle quaterne ordinate, $p=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{7\cdot6\cdot5\cdot4}=\frac{3}{7}$

Si può anche immaginare di estrarre le palline tutte assieme anziché in successione; la probabilità che risultino tutte Verdi non cambierebbe; in questo caso, le quaterne verrebbero pensate NON ordinate $\rightarrow$ $p=\frac{\binom{6}{4}}{\binom{7}{4}}=\frac{\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{3}{7}$

3) Pensare di estrarle simultaneamente o una dopo l'altra è indifferente dal punto di vista della probabilità. Se pensiamo a tre estrazioni successive potremo applicare il teorema dell'evento a più fasi e avremo: $\rightarrow$ $p=\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\approx 0{,}012$

Pensando invece all'estrazione di 3 carte simultaneamente, col Calcolo Combinatorio otterremo: $\rightarrow$ $p=\frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}}=\frac{\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2\cdot1}}\approx 0{,}012$

4) Come evento a tre fasi: $p(\mathrm{MFF})=\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{11}{18}=\frac{44}{285}\approx 0{,}15$. Col Calcolo Combinatorio: $p=\frac{8\cdot12\cdot11}{20\cdot19\cdot18}$

5) $p(\text{"4"}\ \textit{almeno una volta})=1-p(\textit{mai}\ \text{"4"})=1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=1-\frac{625}{1296}\approx 0{,}52$

6) $p=p(4\overline{444})+p(\overline{4}4\overline{44})+p(\overline{44}4\overline{4})+p(\overline{444}4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{324}$