9 - OSSERVAZIONI UNIFICANTI

Il Teorema sugli Eventi a Due Fasi porta a una formula, $p(\text{A e poi B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A})$, che richiama quella relativa al Teorema delle Probabilità Composte: $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A})$.

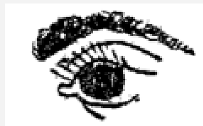
Se consideriamo il fatto che "$\cap$" viene spesso letto "ET" ($\wedge$), per il fatto che l'intersezione insiemistica ($\cap$) è strettissimamente legata alla congiunzione logica ($\wedge$), possiamo in definitiva scrivere la TERNA DI FORMULE

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & p(\text{A e poi B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A}) \\ \text{II)} & p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A}) \\ \text{III)} & p(\text{A} \wedge \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B}/\text{A}) \end{array}$$

dove L'ULTIMA CONDENSA LE PRIME DUE, nel senso che quell' "$\wedge$" potrà essere interpretato, a seconda dei casi, come "$\cap$" oppure come "e poi".

- **Anche la relazione $p(\text{A/B}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{B})}$ (pag. 49) si può riscrivere con il simbolo $\wedge$:**

  così facendo, essa diventa $\boxed{p(\text{A/B}) = \dfrac{p(\text{A} \wedge \text{B})}{p(\text{B})}}$

  e in essa "$\wedge$" potrà essere interpretato come indicante intersezione ("$\cap$") oppure successione temporale ("A e poi B" o "B e poi A" a seconda dei casi).

Per l'occasione, tengo a segnalare che parecchi libri di testo, occupandosi di calcolo delle probabilità, tendono a IDENTIFICARE i due teoremi

I. $p(\text{A e poi B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B/A})$ II. $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \cdot p(\text{B/A})$

mentre in realtà si tratta di teoremi BEN DISTINTI !

E sovente viene dimostrato II), mentre I) non viene nemmeno citato, perché confuso con l'altro!!!
E' infatti facile leggere un "e poi" semplicemente come "e", quindi interpretare (erroneamente!) quella congiunzione "e" come indicante "intersezione" e non "abbinamento".
Purtroppo quasi tutti i testi mostrano una certa superficialità a questo proposito.
Ma nel caso "A e poi B", come si fa a parlare di "intersezione" quando A, B NON sono sottoinsiemi di uno stesso insieme universo?!?!
E' vero che la confusione concettuale in cui rimane appiattita la maggior parte dei testi non ha poi conseguenze pratiche, in quanto il risultato finale è poi fortuitamente esatto in virtù dell'analogia fra I), II) e III); ma l'impostazione è comunque sbagliata!

Va detto che **a volte la situazione "A e poi B" può essere ricondotta ad "$\text{A} \cap \text{B}$".**
Ad esempio, consideriamo il problema: *si estraggono due palline (senza reimbussolamento) da un'urna contenente 4 Bianche e 3 Nere; che probabilità c'è che siano entrambe Nere*?

Qui potremo, indifferentemente, pensare

- *all'**evento a due fasi** "A e poi B"* avendo noi posto
  A = "Siamo alla 1^{a} estrazione; esce una Nera"
  B = "Siamo alla 2^{a} estrazione, nell'urna non c'è più la pallina estratta precedentemente; esce una Nera"
- *o all'**intersezione** fra i due eventi*:
  E1 = "esce una pallina Nera alla prima estrazione e una pallina di colore qualsiasi alla seconda"
  E2 = "esce una pallina di colore qualsiasi alla prima estrazione e una pallina Nera alla seconda"
  (osserviamo che E1, E2 sono due insiemi di coppie ordinate!)

Ma non sempre ciò è realizzabile …
… Ad esempio, prendendo il problema del dado e delle urne di pagina 52, con riferimento, per fissare le idee, all'uscita di una Nera, se tentassimo di interpretarlo in un'ottica di intersezione non ci riusciremmo, perché senza il ricorso alla "prova modificata" non si ha un insieme universo in cui i casi siano fra loro equipossibili.

Analogamente a quanto osservato riguardo al connettivo "et", possiamo ancora rilevare che il legame fra l'operazione insiemistica di unione ($\cup$) e il connettivo logico di disgiunzione (VEL, $\vee$) consente di dare al Teorema delle Probabilità Totali una qualsiasi delle due formulazioni alternative:

$\boxed{p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B})}$

e in particolare, se A e B sono incompatibili, $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$

$\boxed{p(\text{A} \vee \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \wedge \text{B})}$

e in particolare, se A e B sono incompatibili, $p(\text{A} \vee \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$

Nella successiva rassegna di esercizi svolti 1 … 18, emergono ripetutamente le tematiche di questo paragrafo.