10 - ESERCIZI SVOLTI

Esercizio 1
La probabilità che un tiratore A colpisca il bersaglio è 1/2, la probabilità che lo colpisca B è 1/5.
Se A e B sparano contemporaneamente contro il bersaglio, che probabilità c'è che questo venga colpito?

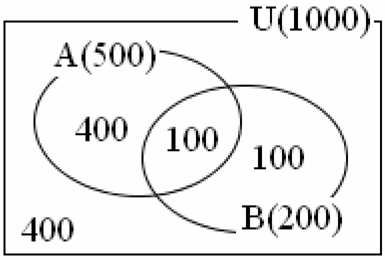
Risoluzione

$$p = p(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \underset{\mathrm{NOTA}}{=}$$

$$= p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

NOTA
A, B sono indipendenti
e quindi
$p(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = p(\mathrm{B})$

Per inquadrare il problema in modo da sentirci effettivamente autorizzati ad applicare i Teoremi studiati, possiamo osservare che mediamente ogni 1000 prove (dove per "prova" si deve intendere "doppio tiro"), 500 volte colpisce il bersaglio A, 200 volte B.
Supponiamo che qualcuno registri gli esiti di una sequenza di 1000 "doppi tiri" e scriva ogni singolo esito (che potrà essere: "nessuno"; "solo A"; "solo B"; "sia A che B") su di un bigliettino: si avranno quindi 1000 bigliettini.
Pescando un bigliettino a caso, ci chiediamo che probabilità c'è di trovarvi scritto almeno uno dei due nomi A o B.
Tracciamo un diagramma di Venn che rappresenti questo insieme di 1000 bigliettini con i suoi sottoinsiemi: comprenderemo in modo realmente efficace la situazione probabilistica considerata. Dunque:



E' evidente che abbiamo posto circa 500 bigliettini nell'insieme A, per il fatto che il tiratore A fa centro con probabilità 1/2, quindi su 1000 tentativi ne azzeccherà pressappoco 500.
Analogamente è immediato comprendere come l'insieme B debba avere (all'incirca) $1/5 \cdot 1000 = 200$ elementi.

Potrai chiederti invece come mai abbiamo collocato proprio 100 bigliettini in $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Se ti rispondessi che questo viene dalla relazione

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$

la quale poi, data l'indipendenza stocastica fra gli eventi A e B (supponiamo che le prestazioni di un tiratore non influenzino quelle dell'altro), diventa

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}),$$

non sarei, immagino, convincente come conto invece di esserlo col ragionamento seguente.

Rifletti su questo fatto:
il tiratore A va a segno mediamente 1 volta su 2, giusto?
Bene! Consideriamo esclusivamente quei circa 200 "doppi tiri" in cui è andato a segno B.
Nell'ambito di questi circa 200 "doppi tiri", i centri di A saranno pressappoco la metà, quindi circa 100.
Perciò A e B fanno centro entrambi simultaneamente per circa 100 volte.
D'altronde, se, simmetricamente, noi confiniamo la nostra attenzione esclusivamente sui (circa) 500 "doppi tiri" in cui ha centrato il bersaglio A, cosa possiamo dire riguardo alla prestazione di B nell'ambito di questo gruppo di prove?
Sappiamo che B, quando tira, ci azzecca in media 1 volta su 5, quindi, fra le 500 prove considerate, avrà fatto centro pressappoco $1/5 \cdot 500 = 100$ volte.

E allora effettivamente sarà

$n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 100$ (più correttamente: *circa* 100)

I rimanenti numeri che figurano nel diagramma di Venn sono stati poi ricavati per differenza:

$$n(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 500 - 100 = 400$$
$$n(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = 200 - 100 = 100$$
$$n(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = 1000 - 400 - 100 - 100 = 400$$

A questo punto, la semplice osservazione del diagramma consente di calcolare, con **visione "frequentista"**, la probabilità richiesta:

$$p(bersaglio\ colpito) = \frac{400 + 100 + 100}{1000} = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$$

Esercizio 2
Supponiamo che da indagini statistiche si tragga
che la probabilità per un gatto di vivere 12 anni è $\frac{1}{4}$, per un cane $\frac{1}{3}$.
Se posseggo un cagnetto e un gattino appena nati, stabilire in tal caso qual è la probabilità che:

a) siano entrambi vivi fra 12 anni;
b) almeno uno sia vivo fra 12 anni;
c) nessuno dei due sia vivo fra 12 anni

Risoluzione

Poniamo
C = "il cane sarà vivo fra 12 anni",
G = "il gatto sarà vivo fra 12 anni".

Avremo:

a) $p(\mathrm{C} \wedge \mathrm{G}) = p(\mathrm{C}) \cdot p(\mathrm{G}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
(probabilità composte per eventi indipendenti)

b) $p(\mathrm{C} \vee \mathrm{G}) = p(\mathrm{C}) + p(\mathrm{G}) - p(\mathrm{C} \wedge \mathrm{G}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$
(probabilità totali per eventi compatibili; probabilità composte per eventi indipendenti)

c) $p(\overline{\mathrm{C}} \wedge \overline{\mathrm{G}}) = p(\overline{\mathrm{C} \vee \mathrm{G}}) = 1 - p(\mathrm{C} \vee \mathrm{G}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
dove abbiamo sfruttato le importantissime FORMULE DI DE MORGAN,
le quali, come dovrebbe essere noto,
hanno una versione "insiemistica" e una versione "logica"
e che qui di seguito andiamo a ripassare:

FORMULE DI DE MORGAN

$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$ *in Insiemistica*, $\overline{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}}$ *in Logica*

$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$ *in Insiemistica*, $\overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \vee \overline{\mathrm{B}}$ *in Logica*

dove **la soprallineatura**
significa "complementazione", ossia "passaggio all'insieme complementare", in Insiemistica
e significa "negazione" in Logica.
Osserviamo che nelle versioni "logiche" delle formule il simbolo " = " va letto "logicamente equivalente".

Risoluzione alternativa dello stesso problema del Cane e del Gatto, parte c):

$$p(\overline{\mathrm{C}} \wedge \overline{\mathrm{G}}) = p(\overline{\mathrm{C}}) \cdot p(\overline{\mathrm{G}}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo tenuto conto che

$$p(\overline{\mathrm{C}}) = 1 - p(\mathrm{C}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

e

$$p(\overline{\mathrm{G}}) = 1 - p(\mathrm{G}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e abbiamo potuto scrivere semplicemente $p(\overline{\mathrm{G}})$ anziché $p(\overline{\mathrm{G}} / \overline{\mathrm{C}})$
perché abbiamo ipotizzato l'indipendenza stocastica degli eventi
(sebbene a rigore ciò non sia necessariamente vero perché comunque gli animali sono molto sensibili).

Esercizio 3
Se si sa che

$$p(\mathrm{A})=\frac{1}{2},\quad p(\mathrm{B})=\frac{1}{3}\quad \text{e}\quad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}\qquad (\mathrm{A}\subseteq\mathrm{U},\ \ \mathrm{B}\subseteq\mathrm{U}),$$

calcolare:

1) $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ **2)** $p(\mathrm{A}/\mathrm{B})$ **3)** $p(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ **4)** $p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$ **5)** $p(\overline{\mathrm{A}}/\mathrm{B})$ **6)** $p(\overline{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{B}})$

Risoluzione

1) $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

2) $p(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$

3) $p(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\dfrac{p(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

4) $p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{B}-\mathrm{A})=p(\mathrm{B}-(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}))=p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

dove abbiamo utilizzato l’ovvia catena $\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}=\mathrm{B}-\mathrm{A}=\mathrm{B}-(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$
(verificala con un diagramma di Venn!)
e abbiamo poi effettuato una sottrazione di due probabilità perché, evidentemente,

$$p(\mathrm{B}-(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}))=\frac{n(\mathrm{B}-(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}))}{n(\mathrm{U})}=\frac{n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{U})}=\frac{n(\mathrm{B})}{n(\mathrm{U})}-\frac{n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{n(\mathrm{U})}=p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

D’altronde, parlando, a pagina 50, di “evento contrario”,
avevamo messo in rilievo che, in generale,
ogniqualvolta è $\mathbf{X}\subseteq\mathbf{Y}$ (e, appunto, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{B}$)**,**
si ha sempre $p(\mathbf{Y}-\mathbf{X})=p(\mathbf{Y})-p(\mathbf{X})$**.**

Attenzione: se ci fossimo limitati a scrivere

$$p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{B}-\mathrm{A}),$$

saremmo rimasti bloccati in un VICOLO CIECO,
in quanto NON avremmo poi potuto continuare scrivendo $p(\mathrm{B}-\mathrm{A})=p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A})$
perché, non essendo A sottoinsieme di B, NON vale la relazione $n(\mathrm{B}-\mathrm{A})=n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A})$.

5) $p(\overline{\mathrm{A}}/\mathrm{B})=\dfrac{p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}$

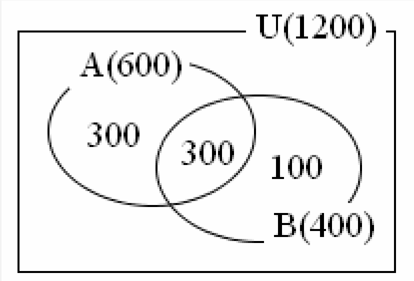
6) $p(\overline{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{B}})=\dfrac{p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})}{p(\overline{\mathrm{B}})}=\dfrac{p(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}})}{p(\overline{\mathrm{B}})}=\dfrac{1-p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})}{1-p(\mathrm{B})}=\dfrac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{8}$

Per capire bene questo Esercizio 3),
o eventualmente per svolgerlo con un procedimento alternativo,
è efficacissima una VISIONE FREQUENTISTA.

Ad esempio, un diagramma di Venn compatibile coi dati

$$p(\mathrm{A})=\frac{1}{2},\quad p(\mathrm{B})=\frac{1}{3}\quad \text{e}\quad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}$$

è quello riportato qui a fianco,
dal quale è immediato trarre le risposte
ai precedenti quesiti 1) … 6).



Esercizio 4
Da un'urna contenente 7 palline numerate
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
si estraggono, UNA DOPO L'ALTRA E SENZA REIMBUSSOLAMENTO, due palline.
Calcola la probabilità che portino entrambe un numero pari,

a) interpretando la "prova" come un "evento a due fasi" ed applicando il teorema relativo
b) mediante (se conosci il Calcolo Combinatorio) il rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili

Risoluzione

a) Interpretando la prova come un evento a due fasi, avremo:

$$p(\text{"entrambe pari"}) = p(\text{"1}^{\text{a}}\text{ estratta pari" E POI "2}^{\text{a}}\text{ estratta pari"}) =$$
$$= p(\text{"1}^{\text{a}}\text{ estratta pari"}) \cdot p(\text{"2}^{\text{a}}\text{ estratta pari" / "1}^{\text{a}}\text{ estratta pari"}) =$$
$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

b) I casi possibili sono
$7 \cdot 6 = 42$
(osserviamo che quelle parole "una dopo l'altra"
ci invitano senz'altro a pensare a coppie ORDINATE di palline: PRIMA estratta, SECONDA estratta).
I casi favorevoli all'uscita di una coppia di numeri pari sono $3 \cdot 2 = 6$.
La probabilità cercata è perciò
$$\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

… Quale dei due metodi preferisci?

Esercizio 5
Da un'urna contenente 7 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
si estraggono, CONTEMPORANEAMENTE, due palline.
Calcolare la probabilità che portino entrambe un numero pari.

Risoluzione

a) E' vero che il quesito dice che le due palline vengono estratte "contemporaneamente",
ma la probabilità richiesta (che siano cioè entrambe pari) evidentemente non varia
se pensiamo di estrarre prima una pallina e poi un'altra
(in modo da poter parlare di "prima estratta" e di "seconda estratta").
Se preferisci, potremmo pensare di
estrarle contemporaneamente, ma di guardare prima una pallina, poi l'altra.

In questo modo, avendo noi riconosciuto che le situazioni dei due problemi 4) e 5)
sono probabilisticamente del tutto equivalenti,
è lecito risolvere esattamente come si è fatto per il problema 4).

Quindi si ha subito $p = \frac{1}{7}$.

b) CC (puoi applicare questo secondo metodo se conosci il Calcolo Combinatorio)

Oppure, volendo, si potrebbe pensare alle coppie NON ORDINATE di palline.

Si individua così un insieme universo di $\binom{7}{2} = 21$ casi EQUIpossibili.

E poiché i casi favorevoli sono $\binom{3}{2} = 3$, se ne trae subito $p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

Esercizio 6

Da un'urna contenente 7 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 si estraggono, UNA DOPO L'ALTRA E CON REIMBUSSOLAMENTO, due palline.

Calcolare la probabilità che portino entrambe un numero pari,

a) mediante il rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili

b) interpretando la "prova" come un "evento a due fasi" ed applicando il teorema relativo.

… Sarebbe possibile, in questo caso, ragionare in termini di coppie non ordinate?

Risoluzione

a) Questa volta, per via del reimbussolamento, i casi possibili sono

$$7 \cdot 7 = 49 .$$

E i casi favorevoli all'uscita di una coppia di numeri pari sono

$$3 \cdot 3 = 9 .$$

La probabilità cercata è perciò

$$9/49.$$

b) Interpretando la prova come un evento a due fasi, avremo:

$$p(entrambe\ pari) = p(1^a\ pari\ E\ POI\ 2^a\ pari) = p(1^a\ pari) \cdot p(2^a\ pari/1^a\ pari) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$

Osserviamo che in questo caso

$$p(2^a\ pari/1^a\ pari) = p(2^a\ pari) = p(1^a\ pari)$$

perché i due eventi sono indipendenti.

c) Assolutamente no.
A parte il fatto che comunque l'enunciato del problema invita a pensare ad una successione temporale, ragionare in termini di coppie non ordinate porterebbe qui ad un universo di casi NON EQUIPOSSIBILI!!!

Infatti, ad esempio, i due casi

$$\{1, 1\}$$

e

$\{1, 2\}$ (l'uso delle graffe indica coppie non ordinate)

NON sono affatto equipossibili in quanto il primo si può verificare solo se la prima pallina estratta porta il numero 1 e la seconda pallina estratta pure (una sola modalità), mentre il secondo si verifica "con più facilità", in quanto si può verificare tanto se la prima pallina porta "1" e la seconda "2", quanto se la prima pallina porta "2" e la seconda "1" (due modalità).

Non sei convinto di questo discorso?
Prova ad esempio a pensare di lanciare due volte di seguito una moneta.

I casi

{T, T} (due teste)
{C, C} (due croci)
{T, C} (una testa e una croce)

NON sono equipossibili!

Per persuaderti di questo, mettiti con pazienza a fare una sequenza di 400 doppi lanci (eventualmente, chiedi la collaborazione di qualche amico/a!): vedrai che il numero di volte in cui esce "doppia testa" si aggirerà intorno alle 100, "doppia croce" pure intorno alle 100, "una testa e una croce" intorno alle 200 volte.

Sono invece equipossibili i casi (coppie ordinate):

(T, T) (testa al primo lancio, testa al secondo)
(T, C) (testa al primo lancio, croce al secondo)
(C, T) (croce al primo lancio, testa al secondo)
(C, C) (croce al primo lancio, croce al secondo)

Esercizio 7

Da un'urna contenente 19 palline numerate 1, 2, 3, … , 19 si estraggono, UNA DOPO L'ALTRA E SENZA REIMBUSSOLAMENTO, 4 palline. Calcolare la probabilità che portino tutte un numero pari.

Risoluzione

a) Interpretando la prova come un evento a più fasi, avremo:

$$p(\textit{tutte e } 4 \textit{ pari}) =$$
$$= p(1^a \textit{ pari E POI } 2^a \textit{ pari E POI } 3^a \textit{ pari E POI } 4^a \textit{ pari}) =$$
$$= p(1^a \textit{ pari}) \cdot p(2^a \textit{ pari}/1^a \textit{ pari}) \cdot p(3^a \textit{ pari}/"1^a \textit{ pari} \wedge 2^a \textit{ pari}") \cdot p(4^a \textit{ pari}/"1^a \textit{ pari} \wedge 2^a \textit{ pari} \wedge 3^a \textit{ pari}") =$$
$$= \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} = \frac{21}{646}$$

b) CC (questo secondo metodo richiede semplicissimi elementi di Calcolo Combinatorio)

Per il conteggio del numero di casi favorevoli ed equipossibili, avremo che:

- i casi possibili sono $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$;
- i casi favorevoli all'uscita di una quaterna ordinata di numeri pari sono $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

La probabilità cercata è perciò

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{21}{646}$$

c) CC (puoi applicare questo terzo metodo se conosci il Calcolo Combinatorio)

C'è anche l'alternativa di ragionare in termini di quaterne non ordinate, pensando di estrarre le quattro palline contemporaneamente.
In effetti il problema, riformulato in questo modo, è probabilisticamente equivalente a quello in cui si pensa ad estrazioni successive.
Che io estragga 4 palline una dopo l'altra (senza reimbussolamento), oppure che io prenda "una manciata di 4 palline", la "facilità" (o piuttosto, diremmo, la difficoltà!) di trovarmi fra le mani 4 palline tutte pari è sempre la stessa.

I casi possibili, se pensiamo alle quaterne non ordinate, sono $\binom{19}{4}$.

I casi favorevoli all'uscita di una quaterna non ordinata di numeri pari sono $\binom{9}{4}$.

La probabilità cercata è perciò $\dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{19}{4}} = \dfrac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}}{\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4!}} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = \dfrac{21}{646}$.

Esercizio 8

Lanciando 6 dadi, qual è la probabilità di ottenere su tutti un multiplo di 3?

Risoluzione

Fra i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 ci sono 2 multipli di 3: il 3 e il 6.

Quindi, in un singolo lancio, la probabilità di uscita di un multiplo di 3 è $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Allora avremo:

$$p(\textit{tutti multipli di } 3) = p(\textit{multiplo di } 3 \textit{ al } 1° \textit{ lancio}) \cdot p(\textit{multiplo di } 3 \textit{ al } 2° \textit{ lancio}) \cdot \ldots =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^6} \approx 0,00137$$

Ovviamente qui ciascun evento è indipendente dai rimanenti.

Anche a questo quesito si sarebbe potuto rispondere senza pensare all' "evento a più fasi", ma applicando invece direttamente la definizione $p = $ n° casi favorevoli / n° casi possibili:
n° casi favorevoli $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$, n° casi possibili $= 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6$

Esercizio 9

Due urne contengono:

- **U1, 3 palline Bianche (B) e 2 Nere (N);**
- **U2, 3 palline Bianche e 1 Nera.**

Si estrae una pallina da U1, e le rimanenti palline di U1 vengono versate in U2, da cui si estrae poi una seconda pallina.
Che probabilità c'è di ottenere 2 palline di diverso colore?

Risoluzione

Psst … in confidenza … vuoi un consiglio da amico?
SCHEMATIZZA SEMPRE un problema prima di risolverlo!

Dunque:

$$\mathrm{U1}:\ 5\ (3\mathrm{B},\ 2\mathrm{N}) \qquad \mathrm{U2}:\ 4\,(3\mathrm{B},\ 1\mathrm{N})$$

Ora possiamo cominciare.

$$p(diverso\ colore) \overset{\mathrm{NOTA}}{=}$$
$$= p(\mathrm{B}\ e\ poi\ \mathrm{N}) + p(\mathrm{N}\ e\ poi\ \mathrm{B}) =$$
$$= p(\mathrm{B}) \cdot p(\mathrm{N/B}) + p(\mathrm{N}) \cdot p(\mathrm{B/N}) = \ldots$$

NOTA
Applicando la Regola della somma

… prima di proseguire, osserviamo che ad esempio,
il simbolo p(N/B) *ha il significato di*
"probabilità che esca N alla seconda estrazione, supposto che sia uscita B alla prima estrazione":
ma se è uscita Bianca alla prima estrazione,
si va a pescare in un'urna che contiene tutte le palline della U2 *iniziale,*
più tutte le palline della U1 *iniziale tranne quella Bianca che è stata estratta,*
quindi 8 palline, di cui 3+2=5 Bianche e 1+2 = 3 Nere,
per cui la probabilità di estrarre una Nera risulta uguale a 3/8 …
… e con considerazioni analoghe si calcolerà p(B/N) *…*

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8} = \frac{21}{40}$$

Esercizio 10

Un'urna contiene 2 R e 10 N. In un'altra urna ci sono 3 R e 2 N. Si estrae una pallina da ciascuna urna.
Qual è la probabilità che le due palline estratte siano entrambe R ?

Risoluzione

$$p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U1}\text{"} \wedge \text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"}) = p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U1}\text{"}) \cdot p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

Osserviamo che gli eventi sono indipendenti quindi anziché $p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"}/\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U1}\text{"})$ abbiamo potuto scrivere semplicemente $p(\text{"}Rossa\ da\ \mathrm{U2}\text{"})$.

Esercizio 11

Un'urna U1 contiene 2 R e 1 N, in una seconda urna U2 ci sono 1 R e 4 N.
Si sceglie un'urna a occhi bendati, e da quest'urna si estrae una pallina.
Determinare la probabilità di ottenere, in questo modo, una R.

Risoluzione

$$p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{U1}\ \underbrace{e\ poi}_{\substack{\text{possiamo}\\ \text{usare anche}\\ \text{un "}\wedge\text{" con questo}\\ \text{significato}\\ \text{"esteso"}\\ \text{di "e poi":}\\ p(\mathrm{U1}\wedge\mathrm{R})}}\ \mathrm{R}) + p(\mathrm{U2}\ \underbrace{e\ poi}_{\substack{\text{possiamo}\\ \text{usare anche}\\ \text{un "}\wedge\text{" con questo}\\ \text{significato}\\ \text{"esteso"}\\ \text{di "e poi":}\\ p(\mathrm{U2}\wedge\mathrm{R})}}\ \mathrm{R}) =$$

$$= p(\mathrm{U1}) \cdot p(\mathrm{R/U1}) + p(\mathrm{U2}) \cdot p(\mathrm{R/U2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$$

Esercizio 12
Ci sono 20 biglietti in una minuscola lotteria che una compagnia di bambini ha organizzato per gioco, e a 7 di essi sono abbinati altrettanti piccoli premi. Pierino compra 4 biglietti. Che probabilità c'è che siano tutti vincenti?

Risoluzione

$$p(tutti\ e\ 4\ vincenti) = p(1°vincente)\cdot p(2°vincente/1°vincente)\cdot ... = \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17} = \frac{7}{969}$$

CC (Prosegui la lettura se hai studiato il Calcolo Combinatorio)

Si potrebbe anche ragionare tramite il rapporto n° casi favorevoli/n° casi possibili, e addirittura in DUE MODI.

♪ Dal punto di vista dell'estrazione dei 7 biglietti vincenti (supponendo che questa abbia luogo successivamente all'acquisto dei biglietti), i casi possibili sono $\binom{20}{7}$

e i casi favorevoli sono tanti quanti i gruppi di 7 biglietti ottenibili prendendo i 4 biglietti che Pierino possiede, e accostando loro 3 qualsiasi fra i 16 biglietti rimanenti: ora, tali gruppi sono in numero di $\binom{16}{3}$, da cui

$$p = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{7}} = \frac{\frac{\cancel{16\cdot15\cdot14}}{3!}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot\cancel{16\cdot15\cdot14}}{7!}} = \frac{\frac{7!}{3!}}{20\cdot19\cdot18\cdot17} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{20}\cdot19\cdot\cancel{18}_3\cdot17} = \frac{7}{969}$$

♫ Dal punto di vista di Pierino che acquista i biglietti (supponiamo che i vincenti siano già stati estratti, e l'esito dell'estrazione tenuto segreto: nulla cambia, per quanto riguarda le probabilità di vincere!) i casi equipossibili sono tanti, quante le possibilità, fra i 20 biglietti esistenti, di sceglierne 4, quindi $\binom{20}{4}$

mentre i casi favorevoli saranno le quaterne di biglietti costruibili utilizzando i soli 7 biglietti vincenti, ossia $\binom{7}{4}$.

Ragionando in questo modo, si ha $p = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{\cancel{4!}}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{\cancel{4!}}} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{20}\cdot19\cdot\cancel{18}_3\cdot17} = \frac{7}{969}$

Possiamo anche domandarci se sia possibile, volendo, utilizzare la probabilità dell' "evento a più fasi" ma da una prospettiva diversa, ossia: "Pierino ha già comprato i suoi 4 biglietti, ora vengono estratti i 7 biglietti vincenti, valutiamo la probabilità che tutti e 4 i biglietti in possesso di Pierino compaiano fra i 7 estratti".
La risposta è affermativa, ma c'è una complicazione per quanto riguarda il conteggio dei casi favorevoli: quando vengono estratti i 7 biglietti, fra i quali supponiamo ci siano tutti e 4 quelli in mano a Pierino, ci sono parecchie possibilità affinché la circostanza fortunata si verifichi, in quanto i biglietti di Pierino potrebbero essere estratti alle posizioni numero 1, 2, 3 e 4 ma anche alle posizioni 2, 4, 5 e 7, oppure 1, 3, 4 e 6, ecc. ecc.
Incominciamo con l'osservare che, come è evidente, la probabilità che i 4 biglietti di Pierino escano *tutti*, quando vengono estratti i 7, sarà uguale alla probabilità che questi 4 biglietti escano alle prime 4 estrazioni, moltiplicata per il numero dei modi in cui è possibile, in una sequenza di 7 estrazioni, sceglierne 4. Riflettiamo: non c'è ragione alcuna affinché la probabilità che, ad esempio, nelle 7 estrazioni, i biglietti di Pierino escano alle posizioni 1, 2, 3 e 4 sia diversa dalla probabilità che escano in altre 4 posizioni fissate, che so, la 2, da 3, la 5 e la 7 …
Ma in quanti modi, su 7 posizioni di estrazione, ne possiamo sceglierne 3? In $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3!} = 35$ modi. Allora avremo

$$p = \binom{7}{3}\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot\frac{1}{17} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3!}\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot\frac{1}{17} = \frac{7}{969}$$

Esercizio 13
Al banco di beneficenza restano ancora invenduti 10 biglietti, di cui so che 4 sono vincenti (sono rimasti infatti 4 premi: un quaderno, uno strofinaccio, un Mon Cheri e un kit per bolle di sapone).
Se acquisto proprio 4 biglietti, che probabilità c'è che siano vincenti:
a) tutti e 4; b) esattamente 3; c) esattamente 2; d) esattamente 1; e) nessuno

Risoluzione

a) $p(tutti\ e\ 4\ vincenti) = p(1°vincente) \cdot p(2°vincente / 1°vincente) \cdot ... = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}$

b) $p(3\ vincenti) =$

$= p(1°vincente \wedge 2°vincente \wedge 3°vincente \wedge 4°\ perdente) +$
$+ p(1°vincente \wedge 2°vincente \wedge 3°\ perdente \wedge 4°vincente) +$
$+ p(1°vincente \wedge 2°\ perdente \wedge 3°vincente \wedge 4°vincente) +$
$+ p(1°\ perdente \wedge 2°vincente \wedge 3°vincente \wedge 4°vincente) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{4}{35}$$

Si sarebbe comunque dovuto intuire che le quattro probabilità sommate DOVEVANO essere uguali.
Io acquisto 4 biglietti, e la probabilità che ce ne sia uno e uno solo perdente non dipende, evidentemente, dall'ordine in cui io li ricevo materialmente, o li apro. Quindi, ad esempio, la probabilità che sia perdente solo il primo biglietto aperto (e tutti gli altri vincenti) DEVE coincidere con la probabilità che sia perdente solo il secondo biglietto aperto, ecc. ecc.

CC (Prosegui la lettura se hai studiato il Calcolo Combinatorio)

… Ma … un attimo … ! Non era meglio ragionare in termini di casi equipossibili e casi favorevoli? Se si conosce il Calcolo Combinatorio, la risposta è senz'altro affermativa!!!

Dunque: i casi possibili sono tante quante le quaterne non ordinate di biglietti che posso comprare, ossia $\binom{10}{4}$.

E i casi favorevoli ad avere 3 biglietti vincenti sono tanti quante sono le possibilità di scegliere 3 biglietti tra i 4 vincenti: $\binom{4}{3} = 4$ possibilità

per poi abbinarli con 1 fra i biglietti perdenti (6 possibilità). Abbiamo perciò $4 \cdot 6 = 24$ casi favorevoli.

Calcola ora il rapporto $\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$ e verifica che coincide con il valore $\frac{4}{35}$ trovato per altra via.

Prova ora tu a dare risposta ai quesiti c), d), e): dovrai ottenere c) 3/7 d) 8/21 e) 1/14

Esercizio 14
In una famiglia con quattro figli, che probabilità sussiste che i maschi siano esattamente due? (Supponiamo, per semplicità, che le probabilità di nascere maschio o femmina siano entrambe uguali a 1/2. Nella realtà si ha una leggera prevalenza delle nascite maschili rispetto a quelle femminili)

Risoluzione

$$p = p(\mathrm{MMFF}) + p(\mathrm{MFMF}) + p(\mathrm{MFFM}) + p(\mathrm{FMMF}) + p(\mathrm{FMFM}) + p(\mathrm{FFMM}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

CC (Prosegui la lettura se hai studiato il Calcolo Combinatorio)

Si poteva anche risolvere semplicemente tramite il rapporto casi favorevoli/casi possibili:
i casi equipossibili sono tanti quante le quaterne ordinate costruibili utilizzando i due simboli M, F e quindi sono $2^4 = 16$ (volendo, sono tanti quante le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti, di classe 4).

Osserviamo per inciso che pensare alle quaterne ***ORDINATE*** *è indispensabile:*
se non si tenesse conto dell'ordine, e si scrivesse che i casi possibili sono:
0 maschi; esattamente 1 maschio; esattamente 2 maschi; esattamente 3 maschi; 4 maschi
si perverrebbe ad un insieme di casi ***NON equipossibili*** *!!!*
(confronta con quanto si è detto in fondo a pagina 63 riguardo al doppio lancio di una moneta)

I casi favorevoli sono tanti quante le quaterne ordinate costruibili utilizzando i due simboli M, F col vincolo di utilizzare per esattamente 2 volte il simbolo M.
Per contarli, possiamo pensare di avere a disposizione una sequenza ordinata di 4 caselle,

Prima casella	Seconda casella	Terza casella	Quarta casella

e di dover scegliere quelle due in cui scrivere M (nelle rimanenti scriveremo F).

Ma questa scelta la possiamo effettuare in $\binom{4}{2} = 6$ modi. 6 casi favorevoli, dunque, e in definitiva $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Esercizio 15
Di 6 persone, si sa che sono nate tutte a Giugno.
Che probabilità c'è che almeno due di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Risoluzione
Sarà
$$p(\text{"}almeno\ 2\ sono\ nate\ lo\ stesso\ giorno\text{"}) = 1 - p(\text{"}nessuna\ è\ nata\ lo\ stesso\ giorno\ di\ un'altra\text{"})$$
Indicate con A, B, C, D, E, F le 6 persone, affinché si verifichi l'evento
"nessuna è nata lo stesso giorno di un'altra",
qualunque sia il giorno in cui è nata A,
B *non* dovrà essere nata in quel giorno,
C *non* dovrà essere nata né nello stesso giorno di A, né in quello di B,
ecc.
Insomma:
$$p(\text{"}nessuna\ è\ nata\ lo\ stesso\ giorno\ di\ un'altra\text{"}) = 1 \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{27}{30} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{30}$$
e dunque
$$p(\text{"}almeno\ 2\ sono\ nate\ lo\ stesso\ giorno\text{"}) = 1 - \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{30^5} \approx 0,414$$
La probabilità cercata è già abbastanza vicina a 1/2… dì la verità, te lo aspettavi?

Esercizio 16
Per 3 diversi test di ingresso universitari, le statistiche dicono che le probabilità di promozione sono rispettivamente: 0,4 ; 0,7 ; 0,8.
Se si va a pescare uno studente a caso per ciascuno dei 3 test, valuta qual è:
- **a) la probabilità che tutti e tre abbiano superato la prova;**
- **b) la probabilità che almeno uno l'abbia superata;**
- **c) la probabilità che uno e uno solo l'abbia superata.**

Risoluzione
Simbologia: A = *il primo studente ha passato il test*, ecc.

a) $p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}) \cdot p(\mathrm{C}) = 0,224$ (gli eventi sono indipendenti).

b) $p(\text{"}almeno\ uno\ promosso\text{"}) = 1 - p(\text{"}nessun\ promosso\text{"}) =$
$= 1 - p\left(\overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}} \wedge \overline{\mathrm{C}}\right) = 1 - 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,036 = 0,964$

Simbologia:
$\overline{\mathrm{A}}$ = A *non ha superato il test*, ecc.

c) $p(\text{"}uno\ e\ un\ solo\ promosso\text{"}) = p\left((\mathrm{A} \wedge \overline{\mathrm{B}} \wedge \overline{\mathrm{C}}) \vee (\overline{\mathrm{A}} \wedge \mathrm{B} \wedge \overline{\mathrm{C}}) \vee (\overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}} \wedge \mathrm{C})\right) =$
$= 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,252$

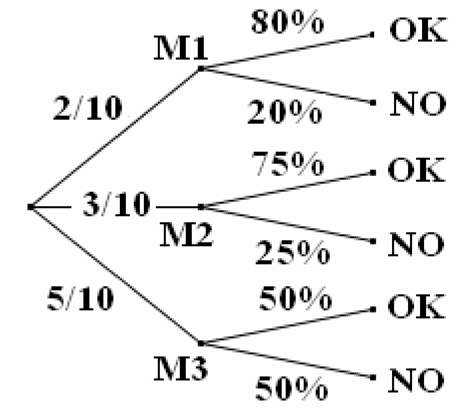
Esercizio 17
In uno scatolone ci sono 10 dispositivi elettronici,
dei quali 2 sono della marca M1, 3 della marca M2 e 5 della marca M3.
Tuttavia non è possibile, per nessun dispositivo, riconoscere di che marca sia.
Statisticamente, i dispositivi M1 sono "buoni" nell' 80% dei casi (quindi con probabilità 0,8), gli M2 nel 75% dei casi e gli M3 nel 50% dei casi.
Mi chiedo qual è la probabilità che, prendendo un dispositivo a caso, esso risulti funzionante.

Risoluzione
Prima schematizzo!!!

M1	M2	M3	
2	3	5	10 *in totale*
80%	75%	50%	*probabilità di funzionamento*

$$p(\mathrm{OK}) = p((\mathrm{M1} \wedge \mathrm{OK}) \vee (\mathrm{M2} \wedge \mathrm{OK}) \vee (\mathrm{M3} \wedge \mathrm{OK})) =$$
$$= p(\mathrm{M1} \wedge \mathrm{OK}) + p(\mathrm{M2} \wedge \mathrm{OK}) + p(\mathrm{M3} \wedge \mathrm{OK}) =$$
$$= p(\mathrm{M1}) \cdot p(\mathrm{OK}/\mathrm{M1}) + p(\mathrm{M2}) \cdot p(\mathrm{OK}/\mathrm{M2}) + p(\mathrm{M3}) \cdot p(\mathrm{OK}/\mathrm{M3}) =$$
$$= \frac{2}{10} \cdot 0,8 + \frac{3}{10} \cdot 0,75 + \frac{5}{10} \cdot 0,5 = 0,635$$

L'ideale, in questo caso, è una rappresentazione "ad albero":



La mia prova aleatoria
(pescaggio di un dispositivo)
non si articola in due fasi dal punto di vista TEMPORALE,
ma dal punto di vista LOGICO, sì
(o, perlomeno, come tale la posso "vedere"):

I. mi chiedo con che probabilità il dispositivo pescato proviene da M1, da M2, da M3;
II. posto che provenga da Mk, mi chiedo con che probabilità sarà buono o difettoso.

Esercizio 18

Paolo prende la sufficienza con probabilità 1/2, Monica con probabilità 1/3.
Se almeno uno ha preso la sufficienza, che probabilità c'è che Paolo l'abbia presa?

a) Risoluzione tramite la formula $\boldsymbol{p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}}$

E' richiesta $p(\mathrm{P}/(\mathrm{P} \vee \mathrm{M}))$.

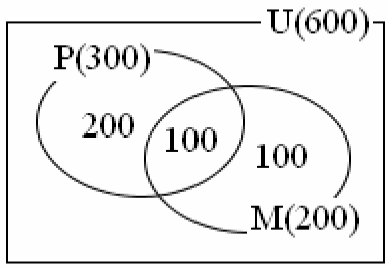
Utilizzando la formula $p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ si ha $p(\mathrm{P}/(\mathrm{P} \vee \mathrm{M})) = \dfrac{p(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{M}))}{p(\mathrm{P} \vee \mathrm{M})}$.

Ma $p(\mathrm{P} \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{M})) = p(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{2}$,

mentre $p(\mathrm{P} \vee \mathrm{M}) = p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{M}) - p(\mathrm{P} \wedge \mathrm{M}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$,

da cui: $p\left(\mathrm{P}/(\mathrm{P} \vee \mathrm{M})\right) = \dfrac{1/2}{2/3} = \dfrac{3}{4}$

b) Risoluzione con visione frequentista
(per schematizzare, niente di meglio di un diagramma di Venn!)



Su 600 verifiche,
Paolo avrà preso la sufficienza circa 300 volte, Monica circa 200 volte;
l'avranno presa entrambi nella stessa verifica circa 100 volte,
perché $p(\mathrm{P} \wedge \mathrm{M}) = p(\mathrm{P}) \cdot p(\mathrm{M}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{1}{6} \cdot 600 = 100$
(d'altronde, poiché Paolo prende la sufficienza
mediamente una volta su 2,
se si vanno a considerare
esclusivamente quelle circa 200 prove nelle quali ha preso la sufficienza Monica,
all'incirca per 100 volte l'avrà presa anche Paolo).

Quindi le volte in cui almeno uno avrà preso la sufficienza saranno circa
300+200 –100 = 400
oppure, indifferentemente,
200+100+100 = 400.

Su queste 400 volte, sono all'incirca 300 le volte in cui Paolo risulta sufficiente.

Di qui la risposta $p = \dfrac{300}{400} = \dfrac{3}{4}$.