

11 - IL “PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE”

 E' richiesto di conoscere il CALCOLO COMBINATORIO!



- a) Lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c'è che esca PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia “1”?
- b) Generalizzazione: il “PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE”.

CONSIDERIAMO UN EVENTO ELEMENTARE
(nell'esempio: l'uscita della faccia “1” dal lancio di un dado)
CHE ABBAIA UNA DATA PROBABILITÀ p DI VERIFICARSI IN UNA SINGOLA PROVA
(nel nostro caso, è $p = 1/6$).

Ci chiediamo:
SE SI EFFETTUANO n PROVE, CHE PROBABILITÀ C'È CHE QUELL'EVENTO
SI VERIFICHINO PER ESATTAMENTE k VOLTE
($0 \leq k \leq n$) ?

RISOLUZIONE di a)

L'evento

“lanciando 5 volte un dado, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1”

può verificarsi in parecchie modalità diverse:

- ad esempio, si verifica qualora “1” esca ai primi 3 lanci, e poi non esca più ai successivi 2 lanci;
- oppure, si verifica qualora “1” esca esclusivamente agli ultimi 3 lanci (ma non esca ai primi 2);
- oppure ancora, si verifica qualora “1” esca al secondo, al terzo e al quinto lancio, ma non agli altri lanci;
- ecc. ecc.

Fissiamo la nostra attenzione su UNA di queste modalità.

Ad esempio, cominciamo col chiederci:

- lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c'è che la faccia “1” esca ai primi 3 lanci, e poi non esca più?

Facile rispondere: pensando all' “evento a più fasi” e tenendo conto del fatto che l'esito di un lancio non è condizionato in alcun modo dall'esito del lancio precedente, abbiamo:

$$\begin{aligned} p(1 \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ \bar{1}) &= \\ &= p(1 \text{ al } 1^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 2^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 3^\circ \text{ lancio}) \cdot p(\text{NON } 1 \text{ al } 4^\circ \text{ lancio}) \cdot p(\text{NON } 1 \text{ al } 5^\circ \text{ lancio}) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left[\left(\frac{1}{6} \right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Consideriamo ora UN'ALTRA fra le possibili modalità.

Ad esempio,

- lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c'è che la faccia “1” esca esclusivamente agli ultimi 3 lanci (ma non esca ai primi 2)?

Avremo

$$\begin{aligned} p(\bar{1} \ \bar{1} \ 1 \ 1 \ 1) &= \\ &= p(\text{NON } 1 \text{ al } 1^\circ \text{ lancio}) \cdot p(\text{NON } 1 \text{ al } 2^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 3^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 4^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 5^\circ \text{ lancio}) = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left[\left(\frac{1}{6} \right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

E pensiamo ancora ad UN'ALTRA modalità.

- Lanciando un dado 5 volte di seguito, che probabilità c'è che “1” esca al secondo, al terzo e al quinto lancio, ma non agli altri lanci?

$$\begin{aligned} p(\bar{1} \ 1 \ 1 \ \bar{1} \ 1) &= \\ &= p(\text{NON } 1 \text{ al } 1^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 2^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 3^\circ \text{ lancio}) \cdot p(\text{NON } 1 \text{ al } 4^\circ \text{ lancio}) \cdot p(1 \text{ al } 5^\circ \text{ lancio}) = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left[\left(\frac{1}{6} \right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Abbiamo perfettamente capito, a questo punto, che CIASCUNA delle tante modalità con cui l'evento "su 5 lanci, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1" si può verificare, ha probabilità data dal prodotto

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Ora, in virtù del teorema sulle probabilità totali per eventi incompatibili, abbiamo:

$$\begin{aligned} & p(\text{su 5 lanci, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1}) = \\ & = p(\text{"1" esce le prime 3 volte}) \vee (\text{"1" esce le ultime 3 volte}) \vee (\text{"1" esce la seconda, la terza e la quinta volta}) \vee \dots = \\ & = p(\text{"1" esce le prime 3 volte}) + p(\text{"1" esce le ultime 3 volte}) + p(\text{"1" esce la seconda, la terza e la quinta volta}) + \dots = \\ & = \left[\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2\right] + \dots \end{aligned}$$

Per calcolare la probabilità cercata, dobbiamo dunque sommare tanti addendi, ciascuno uguale a $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

La questione è: QUANTI SONO questi addendi?

Beh ... sono TANTI QUANTE LE MODALITÀ CON CUI L'EVENTO "esce per esattamente 3 volte la faccia 1" SI PUÒ PRESENTARE.

E l'evento "esce per esattamente 3 volte la faccia 1" si può presentare in tante modalità, quanti sono i modi in cui, sui 5 lanci, possiamo fissare quei 3 nei quali immaginiamo esca "1".

Ora, è ben noto che fra 5 oggetti (nel nostro caso: i 5 lanci) noi ne possiamo selezionare 3 (nel nostro caso: quei 3 lanci nei quali immaginiamo esca "1") in $\binom{5}{3}$ modi.

Ricordiamo infatti che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$

è quel numero che risponde alla domanda: "dati n oggetti, in quanti modi se ne possono scegliere k ?"

Dunque avremo:

$$\begin{aligned} & p(\text{su 5 lanci, esce PER ESATTAMENTE 3 VOLTE la faccia 1}) = \\ & = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots}_{\binom{5}{3} \text{ addendi}} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

GENERALIZZAZIONE

Generalizzando, possiamo enunciare e risolvere, in astratto, il

"PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE"

Consideriamo un evento elementare
(nell'esempio precedente: l'uscita della faccia "1" dal lancio di un dado)
che abbia una data probabilità p di verificarsi IN UNA SINGOLA PROVA
(nel nostro esempio del dado, sarebbe $p = 1/6$).

Ci chiediamo:

SE SI EFFETTUANO n PROVE, CHE PROBABILITÀ C'È
CHE QUELL'EVENTO SI VERIFICHÌ PER ESATTAMENTE k VOLTE ($0 \leq k \leq n$) ?

RISPOSTA:

la probabilità cercata è data da

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avendo posto, per comodità,

$$q = 1 - p.$$



Se andiamo adesso a rivisitare l'esercizio 14) di pagina 67, scopriremo che può anche essere risolto, volendo, con l'appena stabilita "formula delle prove ripetute" ...

In una famiglia con quattro figli, che probabilità sussiste che i maschi siano esattamente due?

In una singola "prova", abbiamo: $p(\text{maschio}) = \frac{1}{2}$

per cui, effettuando 4 "prove", sarà: $p(\text{esattamente 2 maschi}) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

SCHEDA RIASSUNTIVA sul "PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE"

Supponiamo di effettuare n prove,

in ciascuna delle quali potrà presentarsi oppure non presentarsi un dato evento E.

Indichiamo con p la probabilità che E si presenti in una singola prova; porremo poi

$$q = 1 - p,$$

e di conseguenza q indicherà la probabilità dell'evento contrario \bar{E} in una singola prova.

Bene! Dato ora un intero k , con $0 \leq k \leq n$, vogliamo determinare la probabilità p_k che l'evento E si verifichi esattamente k volte nel corso nelle n prove.

Risoluzione

L'evento E si presenta esattamente k volte nel corso delle n prove

se e solo se, in quelle n prove, E si presenta k volte e il suo evento contrario \bar{E} si presenta $n-k$ volte.

Il "presentarsi dell'evento E esattamente k volte nelle n prove" può avvenire secondo parecchie modalità.

Ad esempio, l'evento:

"lanciando 5 volte una moneta, esce Testa esattamente 3 volte"

si può presentare secondo le modalità:

TTTCC TTCCT TCCTT CCTTT CTCTT TCTCT TTCTC CTCTT TCTTC CTTTC.

Consideriamo **una sola** di queste modalità: per fissare le idee, potremmo pensare alla modalità "E si presenta le prime k volte, \bar{E} le ultime $n-k$ volte".

La probabilità di questa modalità fissata è evidentemente $p^k q^{n-k}$ (teorema delle probabilità composte per eventi indipendenti).

Ma noi non dobbiamo considerare una sola, bensì *tutte* le modalità con le quali E si può presentare per esattamente k volte sulle n prove; e tali modalità sono tante quante le possibilità di scegliere, dall'insieme delle n prove, quelle k nelle quali supponiamo che si verifichi E.

Tali modalità sono in numero di $\binom{n}{k}$ e di conseguenza avremo

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

□ Es. 1: lanciando un dado per 10 volte, che probabilità c'è che esca il "6" esattamente per 3 volte?

$$\text{Risposta: } p_3 = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

□ Es. 2: lanciando una moneta per 10 volte, che probabilità c'è che esca "Testa" esattamente per 5 volte?

$$\text{Risposta: } p_5 = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

ESERCIZI

- 1) C'è un'urna con 5 palline, 2 rosse e 3 nere. Si estrae una pallina, se ne guarda il colore, la si reimbuola. Si fa questo per 5 volte. Che probabilità c'è che, così facendo, si peschi 2 volte una rossa e 3 volte una nera?
- 2) Se si prende 1 persona a caso, la probabilità che sia nata il giorno di domenica è $1/7$. Se invece si prendono 3 persone a caso, la probabilità che 1 e 1 sola di esse sia nata di domenica qual è?
- 3) Lanciando un dado per 6 volte, con che probabilità uscirà per esattamente 3 volte un multiplo di 3?

RISPOSTE

$$1) \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 34,56\% \quad 2) \binom{3}{1} \left(\frac{1}{7}\right)^1 \left(\frac{6}{7}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{36}{49} = \frac{108}{343} \approx 31,5\% \quad 3) \binom{6}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 22\%$$