

**13 - ESERCIZI VARI** **Può essere utile, o necessario, il CALCOLO COMBINATORIO!**

- 1) Lanciando un dado e simultaneamente una moneta, che probabilità c'è di ottenere 1 col dado e Testa con la moneta?
- 2) Se si lanciano 3 dadi, qual è la probabilità che non compaia mai la faccia "6"?
- 3) Se si lanciano  $n$  dadi, qual è la probabilità che compaia almeno una volta un multiplo di 3?
- 4) Si lanciano simultaneamente 2 monete e 2 dadi. Determinare la probabilità che gli esiti siano tutti differenti.
- 5) Se un medico specialista riceve dal Lunedì al Venerdì, su prenotazione, 8 pazienti al giorno, prendendo nella lista dei 40 pazienti di questa settimana i primi 3 in ordine alfabetico, che probabilità c'è che gli appuntamenti per queste persone siano tutti in giorni diversi?
- 6) Un insegnante anticonformista sistema la classe in circolo intorno alla cattedra, sorteggiando i posti a sedere. Se il timido Alessandro spera nel suo intimo di avere in sorte un posto a fianco di Martina, e la classe è di 20 alunni, che probabilità c'è che realizzi il suo sogno?
- 7) 5 compagni di scuola si divertono a ricostruire il giorno della settimana in cui sono nati.
  - a) Che probabilità c'è che siano nati tutti nel fine settimana (ossia, di Sabato o di Domenica)?
  - b) Che probabilità c'è che siano nati in 5 giorni della settimana tutti diversi fra loro?
  - c) Che probabilità c'è che esattamente 2 di loro siano nati di Domenica?
  - d) Che probabilità c'è che almeno 2 di loro siano nati di Domenica?
  - e) Che probabilità c'è che almeno 2 di loro siano nati nello stesso giorno della settimana?
  - f) Che probabilità c'è che 3 siano nati di Martedì e 2 di Venerdì?
- 8) Un banco di beneficenza ha ancora 10 biglietti invenduti, di cui 3 sono vincenti. Determina la probabilità che, comprando 3 biglietti, almeno uno di questi sia vincente.
- 9) Da rilevazioni statistiche, si trae che in una determinata nazione la probabilità che una famiglia posseda un computer "da tavolo" è del 50%, la probabilità che posseda un portatile è del 20%, mentre è del 10% la probabilità che disponga di entrambi. Determinare la probabilità, per una famiglia, in quella nazione, di
  - a) possedere un computer di almeno un tipo
  - b) non possedere alcun computer.
 c) I due eventi "possedere un computer fisso" e "possedere un portatile" sono stocasticamente indipendenti?
- 10) Una piccola lotteria di paese ha emesso 100 biglietti, di cui 5 vincenti. Stabilisci che probabilità ha una persona di possedere almeno un biglietto vincente, se ne ha acquistati
  - a) 1   b) 2   c) 5   d) 10   e) 20   f) 95   g) 96
- 11) Calcolare la probabilità che, lanciando una coppia di dadi (per meglio fissare le idee, potresti pensarli di colori diversi: ad esempio, uno rosso e uno blu), si ottenga:
  - a) 3 su entrambi
  - b) 3 sul dado blu e non su quello rosso
  - c) 3 sul dado blu
  - d) uno e un solo "3"
  - e) nessun "3"
  - f) almeno un "3"
- 12) In una partita di 50 ventilatori, 4 sono difettosi. Se una persona ne acquista 2, determina la probabilità che siano entrambi ben funzionanti.
- 13) Se fra i 20 soldati della compagnia in cui militano Aldo e Bruno ne vengono estratti 5 per il turno di guardia, che probabilità c'è che
  - a) Aldo e Bruno vengano estratti entrambi?
  - b) non venga estratto né Aldo né Bruno?
  - c) venga estratto uno e uno solo dei due?
  - d) venga estratto almeno uno dei due?
- 14) Se per una verifica orale vengono estratti 4 nomi in una classe con 10 maschi e 10 femmine, determina la probabilità che siano
  - a) tanti maschi quante femmine   b) più maschi che femmine   c) più femmine che maschi
- 15) Lanciando 2 dadi, a quanto ammonta la probabilità di ottenere due numeri uno divisibile per l'altro?

- 16) Un cretino ha iniettato del purgante in 2 fra le 7 confezioni di latte, che il negoziante ha poi disposto sullo scaffale per la vendita.  
Se una signora ne acquista 3 confezioni, determinare la probabilità di portar via
- almeno una confezione alterata
  - entrambe le confezioni alterate
- 17) Un paese di pianura non ha, in novembre, un clima particolarmente fortunato. Una statistica effettuata dagli abitanti mostra che ogni giorno
- piove, in ore serali, con probabilità del 50%
  - e c'è nebbia al mattino con probabilità del 40%
- Inoltre si è visto che mediamente, 3 giorni su 10 si ha tanto la nebbia mattutina quanto la pioggia serale.
- Supposto che ci sia nebbia al mattino, che probabilità c'è che poi piova alla sera?  
(indicazione: applica la formula  $p(A/B) = \frac{p(A \wedge B)}{p(B)}$  per la quale ti invito a rileggere l'osservazione nel 1° riquadro a pag. 58)
  - Se piove alla sera, che probabilità c'è che ci sia stata nebbia al mattino?  
Qual è la probabilità che in un dato giorno almeno uno dei due fenomeni sia  
c) presente? d) assente?
  - I due eventi "pioggia di sera", "nebbia al mattino" sono stocasticamente indipendenti?
- 18) Supponiamo di giocare al Totocalcio nella versione "classica" a 13 partite. Supponiamo anche di decidere "a caso" che pronostico assegnare a ogni singola partita, senza valutare quindi la "forza" delle squadre in campo. Giocando una singola colonna, determina quale sarà la probabilità di realizzare
- 13
  - 0
  - 12
  - 10
  - esattamente  $k$  punti su 13 ( $0 \leq k \leq 13$ ).
- 19) Supponiamo di aver giocato al Totocalcio (quello "classico", con 13 partite). Se veniamo a sapere che la colonna vincente ha 4 "1", 4 "2" e 5 "X", e ci ricordiamo di aver giocato una colonna compilata a caso, ma nella quale avevamo messo proprio 4 "1", 4 "2" e 5 "X", che probabilità abbiamo di aver fatto "13" con quella giocata?
- 20) Un'urna A contiene 6 palline Rosse e 3 palline Nere, un'altra urna B ne contiene 3 Rosse e 6 Nere. Si estrae una pallina da A e la si mette in B; a questo punto si estrae una pallina anche da B. Determinare la probabilità che le due palline siano:
- entrambe Rosse
  - entrambe Nere
  - di colore diverso
  - almeno una Rossa
- 21) Un'urna A contiene 6 palline Rosse e 3 palline Nere, un'altra urna B ne contiene 3 Rosse e 6 Nere. Si estrae una pallina da A e la si mette in B; a questo punto si estrae una pallina anche da B e la si rimette in A. Infine, si estrae una pallina da A. Determinare la probabilità che questa sia
- Rossa
  - Nera
- 22) Si può comunicare con un certo ente pubblico per mezzo di 3 linee telefoniche a scelta. Tuttavia, le statistiche dicono che per il primo tentativo di telefonata il 1° numero viene scelto dal 50% degli utenti, il secondo dal 30% e il terzo dal 20% soltanto. Prese 3 persone a caso fra quelle che hanno tentato di mettersi in contatto questa mattina con l'ente pubblico, che probabilità c'è che abbiano scelto, per il primo tentativo,
- tutte lo stesso numero?
  - numeri tutti diversi?
  - numeri non tutti uguali?
- 23) Un tale gioca sempre lo stesso numero al lotto, per 10 estrazioni consecutive (sappiamo che la probabilità di azzeccare il numero singolo in una estrazione fissata, è uguale a  $1/18$ ). Che probabilità ha qual tale di
- non vincere mai?
  - vincere almeno una volta?
  - vincere una e una sola volta?
  - vincere esattamente 2 volte?

**RISPOSTE**

$$1) \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}; \text{ anche, } \frac{cf}{cp} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 2} \quad 2) \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 58\%; \text{ anche, } \frac{cf}{cp} = \frac{5^3}{6^3}$$

$$3) 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad 4) 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \quad 5) 1 \cdot \frac{32}{39} \cdot \frac{24}{38} \approx 52\%$$

6) 2/19.

*Dal punto di vista probabilistico, evidentemente nulla cambia se si suppone che Martina e Alessandro siano rispettivamente la prima e la seconda persona a cui viene assegnato, per estrazione, il posto.*

*Ad ogni posto si abbina dunque un numero (da 1 a 20), e si preparano i bigliettini.*

*Si estrae poi un numero, e al posto corrispondente va a sedersi Martina.*

*Fra i 19 bigliettini rimanenti, se ne estrae uno e si manda a sedere Alessandro al posto corrispondente.*

*Ora, l'evento felice per Alessandro ha come casi favorevoli i due bigliettini che indicano i 2 posti a sinistra o a destra di quello dove si è accomodata Martina.*

$$7) \text{ a) } \left(\frac{2}{7}\right)^5 \approx 0,0019 \quad \text{b) } 1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \approx 15\% \quad \text{c) } \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \approx 13\%$$

$$\text{d) } 1 - \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7}\right) \approx 15\% \quad \text{e) } 1 - 1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \approx 85\%$$

$$\text{f) } \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \approx 0,06\%; \text{ infatti } \binom{5}{3} \text{ è il numero dei modi in cui, sulle 5 persone, si possono scegliere quelle 3 che si supporranno nate di Martedì}$$

$$8) 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24} \quad \text{oppure: } 1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

$$9) p(T \vee P) = p(T) + p(P) - p(T \wedge P) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6 = 60\%; \quad p(\text{nessuno}) = 1 - p(T \vee P) = 1 - 0,6 = 0,4 = 40\%$$

(oppure, si poteva rispondere disegnando un diagramma di Venn).

$$p(T) = 0,5; \quad \boxed{p(T/P)} = \frac{p(T \wedge P)}{p(P)} = \frac{0,1}{0,2} = \boxed{0,5 = p(T)} \text{ per cui i due eventi sono stocasticamente indipendenti}$$

10)

$$\text{a) } \frac{5}{100} = 0,05 \quad \text{b) } 1 - \frac{\binom{95}{2}}{\binom{100}{2}} \approx 0,1 \quad \text{oppure (è lo stesso!)} \quad 1 - \frac{\binom{98}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0,1$$

Nel 1° MODO, si pensa ai casi possibili e favorevoli dal punto di vista dei 2 biglietti comprati; nel 2° MODO, dal punto di vista dei 5 biglietti estratti.

$$\text{c) } 1 - \frac{\binom{95}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0,23 \quad \text{d) } 1 - \frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 0,42 \quad \text{oppure (è lo stesso!)} \quad 1 - \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0,42.$$

$$\text{e) } 1 - \frac{\binom{95}{20}}{\binom{100}{20}} \approx 0,68 \quad \text{oppure } 1 - \frac{\binom{80}{5}}{\binom{100}{5}} \quad \text{f) } 1 - \frac{1}{\binom{100}{95}} \approx 0,999999987 \quad \text{oppure } 1 - \frac{1}{\binom{100}{5}} \quad \text{g) } 1$$

$$11) \text{ a) } 1/36 \quad \text{b) } 5/36 \quad \text{c) } 1/6 \quad \text{d) } 5/18 \quad \text{e) } 25/36 \quad \text{f) } 11/36 \quad 12) \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \approx 84,5\%, \text{ oppure: } \frac{\binom{46}{2}}{\binom{50}{2}}$$

$$13) \text{ a) } \frac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{5}} \text{ (le cinquine non ordinate contenenti sia Aldo che Bruno sono tante, quante sono le possibilità di completare la cinquina abbinando ad Aldo+Bruno 3 soldati scelti a piacere fra i 18 rimanenti)} \quad \text{b) } \frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}} \quad \text{c) } \frac{\binom{18}{4} + \binom{18}{4}}{\binom{20}{5}} \quad \text{d) } 1 - \frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}}$$

$$14) p(\text{tanti m. quante f.}) = \frac{\binom{10}{2} \binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 9}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} \approx 0,418; \quad p(m > f) = p(f > m) \approx \frac{1 - 0,418}{2} = 0,291$$

- 15) I casi favorevoli sono: (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 1); (3, 3); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 4); (5, 1); (5, 5); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 6) e la probabilità richiesta è  $22/36 = 11/18$

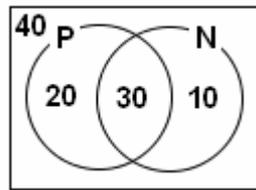
16) a)  $1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = 1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{5}{7}$     b)  $\frac{\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{5}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{7}$

Il numero di terne di confezioni, contenenti entrambe quelle alterate, è uguale a  $\binom{5}{1} = 5$  perché coincide col numero di modi in cui è possibile completare la terna, abbinando alle 2 confezioni alterate una di quelle "sane"

- 17) P = "in un dato giorno c'è pioggia alla sera"; N = "in un dato giorno c'è nebbia al mattino"

a)  $p(P/N) = \frac{p(P \wedge N)}{p(N)} = \frac{0,30}{0,40} = 0,75 = 75\%$     b)  $p(N/P) = \frac{p(N \wedge P)}{p(P)} = \frac{0,30}{0,50} = 0,60 = 60\%$   
 c)  $p(\text{almeno uno presente}) = p(P \vee N) = p(P) + p(N) - p(P \wedge N) = 0,50 + 0,40 - 0,30 = 0,60 = 60\%$   
 d)  $p(\text{almeno uno assente}) = 1 - p(\text{entrambi presenti}) = 1 - 0,30 = 0,70 = 70\%$   
 e)  $p(P) = 50\%$  mentre  $p(P/N) = 75\%$ :  
 non essendo  $p(P) = p(P/N)$ , i due eventi P ed N non sono stocasticamente indipendenti

Un diagramma di Venn può essere utile in questo contesto:



mediamente, su 100 giorni

18) a)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{13}$     b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{13}$     c) Il pronostico sbagliato, può essere uno qualsiasi dei 13...  $13 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$     Oppure  $\left(\frac{n^\circ \text{ casi fav.}}{n^\circ \text{ casi poss.}}\right) \cdot \frac{13 \cdot 2}{3^{13}}$

Volendo, si può pensare al "problema delle prove ripetute"...

d)  $\binom{13}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$     opp.  $\frac{\binom{13}{10} \cdot 2^3}{3^{13}} = \frac{\binom{13}{3} \cdot 2^3}{3^{13}}$     e)  $\binom{13}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13-k}$     opp.  $\frac{\binom{13}{k} \cdot 2^{13-k}}{3^{13}} = \frac{\binom{13}{13-k} \cdot 2^{13-k}}{3^{13}}$

19)  $n^\circ \text{ casi poss.} = n^\circ \text{ colonne con esattamente } 4 "1", 4 "2", 5 "X" = \binom{13}{4} \cdot \binom{9}{4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 90090$

$n^\circ \text{ casi favorevoli} = 1$  da cui  $p = \frac{1}{90090}$

20)  $p(RR) = p(R \text{ da } A) \cdot p(R \text{ da } B/R \text{ da } A) = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{15}$ ;     $p(NN) = p(N \text{ da } A) \cdot p(N \text{ da } B/N \text{ da } A) = \frac{3}{9} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{30}$   
 $p(\text{colori diversi}) = 1 - \left(\frac{4}{15} + \frac{7}{30}\right) = \frac{1}{2}$     oppure  $\frac{6}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ ;     $p(\text{almeno una Rossa}) = 1 - p(NN) = 1 - \frac{7}{30} = \frac{23}{30}$

21)  $p(R) = p(RRR) + p(RNR) + p(NRR) + p(NNR) = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \dots = \frac{19}{30}$   
 $p(N) = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

22) a)  $\frac{50}{100} \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100} = 16\%$

b)  $p(\text{tutti diversi}) = p(ABC) + p(ACB) + p(BAC) + p(BCA) + p(CAB) + p(CBA) =$   
 $= \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{20}{100} + \dots = 6 \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{100} = 18\%$

c)  $p(\text{non tutti uguali}) = 1 - p(\text{tutti uguali}) = 100\% - 16\% = 84\%$

23) a)  $\left(\frac{17}{18}\right)^{10} \approx 0,56$     b)  $1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{10} \approx 1 - 0,56 = 0,44$     c)  $10 \cdot \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^9 \approx 0,33$     d)  $\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^8 \approx 0,088$