14.3 - Ancora sulle “fette di certezza”

Volevo infine ritornare ancora un attimo sull’idea delle “fette di certezza”.
Un giorno sulla mailing list “*matfis*”, frequentata da insegnanti italiani di Matematica e Fisica interessati a scambi di idee e di esperienze didattiche, comparve la seguente e-mail:

**“Non riesco a risolvere questo problema (tratto dal testo *Format SPE* di Maraschini-Palma).
Ringrazio chi vorrà cimentarsi e comunicare la soluzione ottenuta ed il procedimento adottato”.**

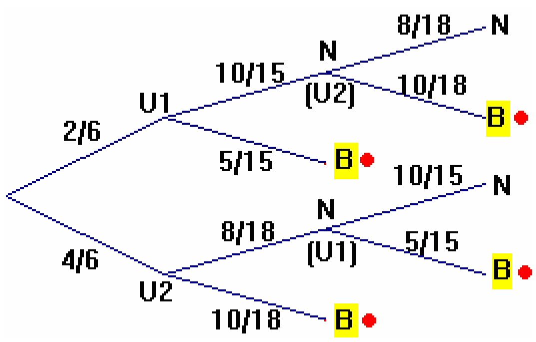
Si hanno due urne così composte:
U1 contiene 10 palline nere e 5 palline bianche,
U2 contiene 8 palline nere e 10 palline bianche.
Si lancia un dado e

- **se escono i numeri 1 o 2 si estrae una pallina dalla 1ª urna,**
- **altrimenti se ne estrae una dalla seconda.**

Se questa prima pallina estratta è nera, la si rimette nell'urna e si estrae un'altra pallina dall'urna che non conteneva la prima.

a) Rappresenta la situazione con un grafo ad albero

b) Nell'ipotesi che l'ultima pallina estratta, cioè la pallina visibile fuori dall'urna, sia bianca, calcola la probabilità che essa provenga dalla prima urna.



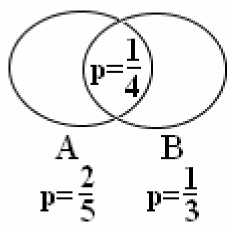
Diversi insegnanti risposero al messaggio proponendo loro risoluzioni del problema;
non fu facilissimo né immediato pervenire ad un accordo sullo svolgimento corretto…
il che indica chiaramente l’obiettiva difficoltà di problematiche di questo tipo.
Noi ora, con il nostro diagramma ad albero e l’idea vincente delle “*fette di certezza*”,
troveremo abbastanza rapidamente il risultato esatto.

Dunque: i cammini che terminano con B sono quattro, e vengono percorsi con probabilità, rispettivamente, uguali a
$2/6 \cdot 10/15 \cdot 10/18; \quad 2/6 \cdot 5/15; \quad 4/6 \cdot 8/18 \cdot 5/15; \quad 4/6 \cdot 10/18$.
Essi costituiscono quindi quella parte della “torta” della certezza (posta uguale a 1) che è espressa dalla somma
$2/6 \cdot 10/15 \cdot 10/18 + 2/6 \cdot 5/15 + 4/6 \cdot 8/18 \cdot 5/15 + 4/6 \cdot 10/18$.
Fra i cammini considerati, quelli nei quali la pallina Bianca estratta risulta provenire dall’urna U1 sono soltanto due: il secondo cammino ed il terzo, ossia quei cammini che vengono percorsi con probabilità, rispettivamente,
$2/6 \cdot 5/15$ e $4/6 \cdot 8/18 \cdot 5/15$.
Pertanto questi due cammini si spartiscono una “fetta” di certezza uguale a
$2/6 \cdot 5/15 + 4/6 \cdot 8/18 \cdot 5/15$.

Rapportando questa fetta di certezza con la fetta di certezza occupata dai quattro cammini che terminano con B, si perviene alla risposta al quesito:

$$\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{15}+\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{18}\cdot\frac{5}{15}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{10}{18}+\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{15}+\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{18}\cdot\frac{5}{15}+\frac{4}{6}\cdot\frac{10}{18}}=\ldots=\frac{17}{57}$$

Ci tengo comunque a sottolineare che **l’idea delle “fette di certezza” non è nient’altro che un modo “carino” di manipolare la probabilità “condizionata” (con l’annesso discorso della “restrizione dell’insieme universo”)!**



Se io per esempio dico che osservando il diagramma qui a fianco ($p(A \cap B) = \frac{1}{4}, \; p(B) = \frac{1}{3}$)

posso desumere immediatamente la relazione $p(A/B) = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$, io affermo ciò perché

I) nella mia mente ho una “fetta di certezza” che “pesa” $1/4$ (quella di $A \cap B$)
e un’altra “fetta di certezza” che “pesa” $1/3$
(quella di B, nell’ambito del quale voglio rimanere perché, se mi interessa $p(A/B)$, è B il mio insieme universo)
quindi, per andare a valutare quanto “pesa” A nell’ambito di B, mi viene spontaneo calcolare il quoziente $\frac{1/4}{1/3}$;

II) ma anche e soprattutto perché so (l’ho dimostrato!) che sussiste la relazione $\boxed{p(A/B) = \frac{p(A \wedge B)}{p(B)}}$!!!

… Come d’altronde, a ben guardare, nel quesito sulle urne e le palline dal quale abbiamo preso le mosse, la frazione che ci ha portato al risultato 17/57 coincide con quella frazione che avremmo ottenuto pensando di applicare il TEOREMA DI BAYES. Controlla tu stesso che è davvero così! $p(U1/\text{Bianca}) = \ldots$