RISPOSTE

1) $\frac{13}{15}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{10}{12}>52\%$ [*evento a più fasi*] *oppure* $\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}>52\%$ [*quaterne ordinate*] *oppure* $\frac{\binom{13}{4}}{\binom{15}{4}}>52\%$ [*quaterne non ordinate*]

2) $\frac{4}{52}\cdot\frac{16}{51}+\frac{16}{52}\cdot\frac{4}{51}\approx 4{,}8\%$ [*evento a due fasi*] *oppure* $\frac{4\cdot 16+16\cdot 4}{52\cdot 51}\approx 4{,}8\%$ [*coppie ordinate*] *oppure* $\frac{4\cdot 16}{\binom{52}{2}}\approx 4{,}8\%$ [*coppie non ordinate*]

3) a) $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{1}{22}$ *oppure* $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$ *oppure* … b) $1-\frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{37}{44}$ *oppure* $1-\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}$ *oppure* …

4) $p=1-\frac{2}{1024}=\frac{511}{512}$ (anche: $p=1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]=\frac{511}{512}$)

5) a) $\frac{30}{50}\cdot\frac{29}{49}=\frac{87}{245}$ b) $\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}=\frac{38}{245}$ c) $\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}+\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}=\frac{24}{49}$ *oppure* $1-\left(\frac{87}{245}+\frac{38}{245}\right)=\frac{24}{49}$

6) a) $\frac{30}{50}\cdot\frac{30}{50}=\frac{9}{25}$ b) $\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}=\frac{4}{25}$ c) $\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{50}+\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{50}=\frac{12}{25}$ *oppure* $1-\left(\frac{9}{25}+\frac{4}{25}\right)=\frac{12}{25}$

7) a) $\frac{264}{1000}=26{,}4\%$ b) $\frac{41}{1000}=4{,}1\%$ c) $\frac{41}{1000}=4{,}1\%$

8) Si risponde tracciando un diagramma di Venn, oppure scrivendo:

$$n(\mathrm{C}\cup\mathrm{I})=n(\mathrm{C})+n(\mathrm{I})-n(\mathrm{C}\cap\mathrm{I})=24+18-\frac{2}{3}\cdot 18=30;$$

$$p(\mathrm{C}\cup\mathrm{I})=\frac{30}{104};\quad p(\overline{\mathrm{C}}\cap\overline{\mathrm{I}})=p(\overline{\mathrm{C}\cup\mathrm{I}})=1-p(\mathrm{C}\cup\mathrm{I})=1-\frac{30}{104}=\frac{74}{104}\approx 71\%$$

9) $p=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}}=\frac{3}{4}$ (che i casi equipossibili siano 4 e quelli favorevoli 3 lo si capisce, comunque, anche senza scomodare il Calcolo Combinatorio) *oppure* $p=1-\overbrace{\frac{1}{\binom{4}{3}}}^{\text{NOTA}}=\frac{3}{4}$

NOTA: probabilità di avere l'unico tris d'assi senza l'asso di cuori

10) $p(astemio/maschio)=1-p(bevitore/maschio)=1-0{,}30=0{,}70=70\%$

$$p(maschio/astemio)=\frac{p(m)\cdot p(a/m)}{p(m)\cdot p(a/m)+p(f)\cdot p(a/f)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{70}{100}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{70}{100}+\frac{2}{5}\cdot\frac{90}{100}}=\frac{21}{39}\approx 54\%$$

oppure con un semplice diagramma di Venn...

11) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$ *oppure* $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$

12)

a) $\frac{\binom{997}{2}}{\binom{1000}{5}}=\frac{\frac{997\cdot 996}{2\cdot 1}}{\frac{1000\cdot 999\cdot 998\cdot 997\cdot 996}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0{,}00000006$ [*le cinquine, contenenti i* 3 *biglietti di Gastone, sono tante quante le coppie costruibili prendendo, per completare la cinquina,* 2 *fra i* 997 *biglietti rimanenti*]

opp., pensando che i 5 *numeri vincenti fossero già stati estratti (e tenuti segreti) prima della messa in vendita dei* 1000:

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{1000}{3}}=\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{1000\cdot 999\cdot 998}{3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0{,}00000006\ \ o\ \ \frac{5}{1000}\cdot\frac{4}{999}\cdot\frac{3}{998}\approx 0{,}00000006$$

b) $\dfrac{\binom{990}{5}}{\binom{1000}{5}} \approx 0{,}95 = 95\%$ *oppure* $\dfrac{990}{1000}\cdot\dfrac{989}{999}\cdot\dfrac{988}{998}\cdot\dfrac{987}{997}\cdot\dfrac{986}{996} \approx 0{,}95$

oppure (*dal punto di vista dei* 10 *acquisti di Paperino,*
pensando che i 5 *numeri vincenti fossero già stati estratti* − *e tenuti segreti* − *prima della messa in vendita dei* 1000):

$\dfrac{\binom{995}{10}}{\binom{1000}{10}} \approx 0{,}95$ *o anche* $\dfrac{995}{1000}\cdot\dfrac{994}{999}\cdot\dfrac{993}{998}\cdot\dfrac{992}{997}\cdot\dfrac{991}{996}\cdot\dfrac{990}{995}\cdot\dfrac{989}{994}\cdot\dfrac{988}{993}\cdot\dfrac{987}{992}\cdot\dfrac{986}{991} \approx 0{,}95$

Beh, Paperino non è stato, questa volta, *particolarmente* sfortunato …

c) $1-\dfrac{987}{997}\cdot\dfrac{986}{996} \approx 0{,}02 = 2\%$ *oppure* $1-\dfrac{\binom{987}{2}}{\binom{997}{2}} = 1-\dfrac{\frac{987\cdot 986}{2\cdot 1}}{\frac{997\cdot 996}{2\cdot 1}} \approx 0{,}02$ *oppure* ...

13) a) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{19}{40}=0{,}475$ b) $\dfrac{4}{9}=0{,}444...$

14) a) $p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{S}\wedge\mathrm{R}) + p(\mathrm{S}\wedge\overline{\mathrm{R}}) = p(\mathrm{R})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{R}) + p(\overline{\mathrm{R}})\cdot p(\mathrm{S}/\overline{\mathrm{R}}) = 0{,}10\cdot 0{,}2 + 0{,}90\cdot 0{,}01 = 0{,}029 = 2{,}9\%$

b) $p(\mathrm{R}/\mathrm{S}) = \dfrac{p(\mathrm{R})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{R})}{p(\mathrm{R})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{R}) + p(\overline{\mathrm{R}})\cdot p(\mathrm{S}/\overline{\mathrm{R}})} = \dfrac{0{,}10\cdot 0{,}2}{0{,}10\cdot 0{,}2 + 0{,}90\cdot 0{,}01} \approx 69\%$

15) Arrotondando, 44%.
E’ vero che le condizioni generali della medicina, dell’alimentazione, della esposizione a patologie, ecc. cambiano, sia pure leggermente, nel tempo, quindi questa valutazione di probabilità, che presuppone uno “sguardo in avanti” di 5 anni nel futuro, non può per sua natura essere pienamente adeguata.
Comunque vadano le cose, è però vicinissima alla realtà: 5 anni sono davvero pochi.
L’informazione va tuttavia correttamente interpretata. Essa significa che, preso un gran numero di persone di quella nazione che hanno appena compiuto gli 85 anni, all’incirca il 44% festeggerà il 90° compleanno.
Se invece il nonno di Pierino compie oggi 85 anni, la probabilità che lui, proprio lui, sopravviva fino a 90 anni, va più correttamente valutata tenendo conto delle condizioni di salute note di quella determinata persona!

16) a) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

b) $\underbrace{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}_{\substack{\text{Testa}\\ \text{le prime}\\ \text{3 volte}}}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}_{\substack{\text{Croce}\\ \text{le altre}\\ \text{volte}}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{1}{256}$

c) $\binom{8}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{7}{32}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8+\binom{8}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{37}{256}$

e) $1-\dfrac{37}{256}=\dfrac{219}{256}$

17) a) $\underset{\mathrm{M}}{\dfrac{1}{2}}\cdot\underset{\mathrm{F}}{\dfrac{1}{2}}+\underset{\mathrm{F}}{\dfrac{1}{2}}\cdot\underset{\mathrm{M}}{\dfrac{1}{2}}$ *oppure* $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$
MM
MF •
FM •
FF

b) $\binom{4}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}=0{,}375$ c) $\binom{6}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}=0{,}3125$ d) $\binom{8}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{70}{256}=\dfrac{35}{128}=0{,}2734375$

18) $p(\mathrm{U1}/\mathrm{R})=\dfrac{p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1})}{p(\mathrm{U1})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U1})+p(\mathrm{U2})\cdot p(\mathrm{R}/\mathrm{U2})}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{19}$

19) $\le 3{,}125\%$

20) $\dfrac{\binom{23}{2}}{\binom{24}{3}}=\dfrac{1}{8}=12{,}5\%$ (Le terne non ordinate di esercizi, contenenti l’esercizio che lo studente ha già svolto, sono tante quante le coppie non ordinate costruibili utilizzando 2 dei 23 esercizi rimanenti)

21) $\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{6\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{1}{8}+\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{7\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{2}{8}+\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{8\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{2}{8}+\underbrace{\dfrac{1}{9}}_{\substack{9\ \textit{al}\ 1°\\ \textit{tiro}}}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{9}$ (anche, ovviamente, con la conta dei casi possibili e dei favorevoli)

22) a) $\dfrac{3\cdot\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}}=\dfrac{3\cdot\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)}{2}}=\dfrac{n-1}{3n-1}$

Si può anche pensare di estrarle una dopo l'altra anziché simultaneamente (la probabilità richiesta, infatti, non cambierebbe!).
Si estrae una pallina; qualunque sia l'esito, restano $n-1$ palline dello stesso colore della prima estratta, e $3n-1$ palline in totale.
Dunque la probabilità, all'estrazione successiva, di pescare una pallina dello stesso colore di quella estratta per prima, è $\dfrac{n-1}{3n-1}$

b) $\dfrac{1}{3}$

23) a) Il numero dei casi possibili è $\binom{9}{5}$.

Fra i numeri interi da 1 a 9 ce ne sono 5 Dispari (1, 3, 5, 7, 9) e 4 Pari (2, 4, 6, 8).
L'evento "somma pari" si verifica quando, delle 5 palline estratte, portano un numero dispari 2 palline, oppure 4 palline.

Allora il numero dei casi favorevoli è $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}+\binom{5}{4}\cdot\binom{4}{1}=40+20=60$

perché le cinquine di palline con 2 dispari si ottengono abbinando a 2 palline scelte fra le 5 dispari, 3 palline scelte fra le 4 pari, mentre le cinquine di palline con 4 dispari si ottengono abbinando a 4 palline scelte fra le 5 dispari, 1 pallina scelta fra le 4 pari.

La probabilità richiesta è dunque $p(somma\ \ pari)=\dfrac{60}{\binom{9}{5}}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$

b) $p(somma\ \ dispari)=1-\dfrac{10}{21}=\dfrac{11}{21}$

24) a) $1\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{4}$ *oppure* $\dfrac{4!}{4^4}$ b) $1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}$ *oppure* $\dfrac{4}{4^4}$

c) $\binom{4}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}-2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{21}{64}$ *oppure* $\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\left(2^4-2\right)}{4^4}$ NOTA: i termini preceduti dal segno "$-$" servono per escludere i casi di esiti tutti uguali

25) a) $1-1\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{6}{8}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{2}{6}$ *opp.* $1-\dfrac{2^5}{\binom{10}{5}}$ b) $1-1\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{6}{8}\cdot\dfrac{4}{7}$ *opp.* $1-\dfrac{\binom{5}{4}\cdot 2^4}{\binom{10}{4}}$ c) $1-1\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{6}{8}$ *opp.* $1-\dfrac{\binom{5}{3}\cdot 2^3}{\binom{10}{3}}$ d) 1

26) a) Numero casi possibili $=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$. Numero casi favorevoli $=1$. $p=1/5040$

Oppure: $p=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{7}$ (sceglie uno dei quattro, poi un altro, ecc.)

b) Quaterne non ordinate: numero casi possibili = $\binom{10}{4}$; numero casi favorevoli $=1$. $p=\dfrac{1}{210}$

27) $p(\mathrm{T}>\mathrm{C})=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4+\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\frac{1}{2}+\binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=$

$$=\left[\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=(210+120+45+10+1)\cdot\frac{1}{1024}=\frac{193}{512}$$

oppure (*molto meglio*!): $p(\mathrm{T}>\mathrm{C})=\dfrac{1-p(\mathrm{T}=\mathrm{C})}{2}=\dfrac{1-\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5}{2}=\dfrac{1-252\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{2}=\dfrac{1-\frac{252}{1024}}{2}=\dfrac{\frac{772}{1024}}{2}=\dfrac{193}{512}$

Con 9 monete: la risposta si coglie IMMEDIATAMENTE, per simmetria, ed è ovviamente ½.

D'altronde:

$$p(\mathrm{T}>\mathrm{C})=\binom{9}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4+\binom{9}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^3+\binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\frac{1}{2}+\binom{9}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9=$$

$$=\left[\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=(126+84+36+9+1)\cdot\frac{1}{512}=\frac{256}{512}=\frac{1}{2}$$

28) a) $\frac{19}{32}$ b) $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ 29) $1-1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}$ *oppure* $1-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^5}$

30) $\dfrac{6\cdot\binom{5}{3}\cdot5^2+6\cdot\binom{5}{4}\cdot5+6}{6^5}$ *oppure* $6\cdot\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+6\cdot\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\frac{5}{6}+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5$

31) $p(5)=p(tutte\ \mathrm{T})=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ $p(6)=p(4\mathrm{T},1\mathrm{C})=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$

$p(7)=p(3\mathrm{T},2\mathrm{C})=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}$ $p(8)=p(2\mathrm{T},3\mathrm{C})=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}$

$p(9)=p(1\mathrm{T},4\mathrm{C})=\binom{5}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$ $p(10)=p(tutte\ \mathrm{C})=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

32) $1-\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+10\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9+\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8\right]\approx 0,4744$

33) $p(truccata/3\ teste)=\dfrac{p(truccata)\cdot p(3\ teste/truccata)}{p(truccata)\cdot p(3\ teste/truccata)+p(non\ truccata)\cdot p(3\ teste/non\ truccata)}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot(0,6)^3}{\frac{1}{2}\cdot(0,6)^3+\frac{1}{2}\cdot(0,5)^3}=\frac{(0,6)^3}{(0,6)^3+(0,5)^3}=\frac{0,216}{0,216+0,125}=\frac{0,216}{0,341}\approx 0,633=63,3\%$$

34)

a) Per un “evento unione” le probabilità si sommano solo quando gli eventi-base sono *incompatibili*, altrimenti la formula è più complicata.
Ora, se pensiamo ad esempio al quadruplo lancio del singolo dado,
l’evento “esce 6 al 1° lancio, e un risultato qualsiasi agli altri lanci” (evento che ha probabilità 1/6)
NON è incompatibile con l’evento “esce 6 al 2° lancio, e un risultato qualsiasi agli altri lanci” … ecc. …
D’altronde, se il ragionamento del Cavaliere fosse corretto, ne deriverebbe come conseguenza
che lanciando per 6 volte un dado, la probabilità di uscita di un 6 si porti a valere 1
e quindi che lanciando per 6 volte un dado, si abbia la certezza assoluta dell’uscita di un 6 …
… addirittura: con 7 lanci, la probabilità diventerebbe 7/6, il che non ha senso alcuno
essendo una probabilità comunque sempre compresa fra 0 e 1.

b) $p(almeno\ un\ 6\ con\ 4\ lanci\ di\ un\ dado)=1-p(nessun\ 6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0{,}5177...$

$p(almeno\ un\ \text{"}doppio\ 6\text{"}\ con\ 24\ lanci\ di\ una\ coppia\ di\ dadi)=1-p(nessun\ \text{"}doppio\ 6\text{"})=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0{,}4914...$

c) Casi possibili per le partite successive, dopo che la situazione è di 2 partite vinte da A contro 1 vinta da B:
A (e A vince, perché arriva a 3)
BA (vince A)
BB (vince B)
Sennonché, questi 3 casi … non sono equipossibili!
Per avere un set di casi equipossibili dobbiamo pensare alla situazione “fittizia” seguente
(“fittizia” perché, se A è già a 3 punti, non ha molto senso effettuare una quarta partita):
AA (vince A)
AB (vince A)
BA (vince A)
BB (vince B)
Pertanto A ha probabilità ¾ di vincere, e se si vuole ripartire equamente la posta
in seguito all’interruzione del gioco, bisognerà dare i ¾ delle 64 monete ad A.
Ad A spetteranno perciò 48 monete, e 16 a B.

Oppure: $p(vince\ \mathrm{A})=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{A}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{BA}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ con la medesima conclusione.

d) $p(vince\ \mathrm{A})=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathrm{A}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{BA}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{BBA}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ da cui 56 monete ad A e 8 a B.

35) $p(almeno\ un\ 6\ lanciando\ 6\ dadi) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,6651$

$p(almeno\ due\ 6\ lanciando\ 12\ dadi) = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11}\right] \approx 0,6187$

$p(almeno\ tre\ 6\ lanciando\ 18\ dadi) = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{18} + 18 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} + \binom{18}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16}\right] \approx 0,5973$

36) $p(colori\ diversi) = \frac{b \cdot n}{\binom{b+n}{2}} = \frac{bn}{\frac{(b+n)(b+n-1)}{2}} = \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$

oppure $\frac{b}{b+n} \cdot \frac{n}{b+n-1} + \frac{n}{b+n} \cdot \frac{b}{b+n-1} = ...$

(*osserviamo che nel primo modo abbiamo pensato a coppie non ordinate, nel secondo abbiamo immaginato di estrarre una pallina poi subito dopo un'altra, introducendo così un ordine comunque irrilevante per la probabilità cercata*)

$p(colori\ uguali) = 1 - p(colori\ diversi) = 1 - \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$

oppure pensando a un evento a due fasi;

o anche: $p(colori\ uguali) = \frac{\binom{b}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{b+n}{2}} = \frac{\frac{b(b-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(b+n)(b+n-1)}{2}} = \frac{\frac{b^2 - b + n^2 - n}{2}}{\frac{(b+n)(b+n-1)}{2}} = \frac{b^2 - b + n^2 - n}{(b+n)(b+n-1)} =$

$= \frac{(b+n)^2 - 2bn - (b+n)}{(b+n)(b+n-1)} = \frac{(b+n)(b+n-1) - 2bn}{(b+n)(b+n-1)} = \frac{(b+n)(b+n-1)}{(b+n)(b+n-1)} - \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)} = 1 - \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$

37) a) $p_k =$ probabilità di azzeccare la chiave giusta esattamente al k-esimo tentativo

$p_1 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \quad p_1 + p_2 = \frac{2}{5} < \frac{1}{2} \quad p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \quad p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$

quindi: dopo 3 tentativi.

Anche, più semplicemente: se fa $n \le 5$ tentativi, l'ubriaco si trova a utilizzare *n* chiavi sulle 5 che ha; è come se ci fosse una lotteria con 5 biglietti, col biglietto vincente già estratto ma non reso pubblico. Comprando *n* biglietti, la probabilità di vincere il premio è *n*/5, perché i casi possibili sono 5 (il premio può essere stato assegnato a uno qualunque dei 5 biglietti), mentre i casi favorevoli sono *n* (vinco il premio se questo risulta essere stato assegnato a uno degli *n* biglietti che ho scelto). Ora, $n/5 > 1/2$ a partire da $n = 3$.

O ancora: il numero di tentativi cercato coincide col numero dei tentativi per cui la probabilità di non azzeccare mai la chiave giusta scende al di sotto del valore ½.

E si ha $p(primi\ 3\ tentativi\ tutti\ falliti) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$

b) Indichiamo sempre con p_k la probabilità di azzeccare la chiave giusta esattamente al *k*-esimo tentativo.

$p_1 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$

$p_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25} \quad p_1 + p_2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25} < \frac{1}{2}$

$p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125} \quad p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125} = \frac{61}{125} < \frac{1}{2}$

$p_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{64}{625} \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125} + \frac{64}{625} = \frac{369}{625} > \frac{1}{2}$

quindi la risposta è: dopo 4 tentativi.

Oppure: il numero di tentativi cercato coincide col numero dei tentativi per cui la probabilità di non azzeccare mai la chiave giusta scende al di sotto del valore ½.

E si ha $p(primi\ 4\ tentativi\ tutti\ falliti) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{256}{625} < \frac{1}{2}$

38) a) almeno 7 pescate (il prodotto $\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}\cdot\ldots$ relativo alla probabilità dell'evento contrario comincia a essere <½ a partire da 7 fattori)

b1) almeno 6 tentativi b2) almeno 7 tentativi: $1-(9/10)^\wedge n>1/2$ per $n\geq 7$

39) La parola-chiave "almeno" quasi sempre fa sì che sia conveniente pensare all'evento contrario. Ma qual è l'evento contrario di "esce almeno un 6 o almeno un 1"?

Ricordiamo le leggi di De Morgan $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}, \quad \overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}$!

$\overline{\textit{almeno un } 6 \vee \textit{almeno un } 1}=\overline{\textit{almeno un } 6}\wedge\overline{\textit{almeno un } 1}=\textit{nessun } 6\wedge\textit{nessun } 1$

$p(\textit{almeno un } 6\vee\textit{almeno un } 1)=1-p(\overline{\textit{almeno un } 6\vee\textit{almeno un } 1})=$

$=1-p(\textit{nessun } 6\wedge\textit{nessun } 1)=1-\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{9}$ oppure $1-\frac{4\cdot 4}{36}=\frac{5}{9}$

40) $p(\textit{almeno un } 6\vee\textit{almeno un } 1)=1-p(\textit{nessun } 6\wedge\textit{nessun } 1)=1-\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{19}{27}$

41) $p(\textit{almeno un } 6\wedge\textit{almeno un } 1)=1-p(\textit{nessun } 6\vee\textit{nessun } 1)=$

$=1-\left[p(\textit{nessun } 6)+p(\textit{nessun } 1)-p(\textit{nessun } 6\wedge\textit{nessun } 1)\right]=1-\left[\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3\right]=1-\frac{186}{216}=\frac{30}{216}=\frac{5}{36}$

42) $p(2\ \textit{risultati uguali})=a\cdot a+b\cdot b=a^2+b^2;\qquad p(2\ \textit{risultati diversi})=a\cdot b+b\cdot a=2ab$

Ora, si ha sicuramente $a^2+b^2>2ab$

perché $a^2+b^2-2ab>0$ *equivale ad* $(a-b)^2>0$, *che è sempre verificata quando* $a\neq b$

43) $1-1\cdot\frac{28}{31}\cdot\frac{24}{30}\cdot\frac{20}{29}\cdot\frac{16}{28}$ *oppure* (NOTA) $1-\frac{\binom{8}{5}\cdot 4^5}{\binom{32}{5}}$

NOTA - L'evento contrario è "nessuna coppia"; e per esso, i casi favorevoli si possono contare supponendo di scegliere 5 fra gli 8 valori A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7 e, per ciascun valore, una delle 4 carte di quel valore.

44) a) $p(\mathrm{D})=p(\mathrm{D}\wedge\mathrm{M1})+p(\mathrm{D}\wedge\mathrm{M2})+p(\mathrm{D}\wedge\mathrm{M3})=p(\mathrm{M1})\cdot p(\mathrm{D}/\mathrm{M1})+p(\mathrm{M2})\cdot p(\mathrm{D}/\mathrm{M2})+p(\mathrm{M3})\cdot p(\mathrm{D}/\mathrm{M3})=$

$=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{200}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{250}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{300}=\frac{1}{400}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1200}=\frac{15+6+5}{6000}=\frac{26}{6000}=\frac{13}{3000}$.

$p(\overline{\mathrm{D}})=1-p(\mathrm{D})=1-\frac{13}{3000}=\frac{2987}{3000}\approx 0{,}9957$

b) $p(\textit{tutte buone})=p(\textit{tutte buone}\wedge\mathrm{M1})+p(\textit{tutte buone}\wedge\mathrm{M2})+p(\textit{tutte buone}\wedge\mathrm{M3})=$

$=p(\mathrm{M1})\cdot p(\textit{tutte buone}/\mathrm{M1})+p(\mathrm{M2})\cdot p(\textit{tutte buone}/\mathrm{M2})+p(\mathrm{M3})\cdot p(\textit{tutte buone}/\mathrm{M3})=$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{200}\right)^{50}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{250}\right)^{50}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{300}\right)^{50}=\textit{poco più dell'}80\%$

$p(\textit{almeno una difettosa})=1-p(\textit{tutte buone})=\textit{poco meno del } 20\%$

45) I casi possibili sono tanti quante le sequenze di 10 lanci, 8 almeno dei quali siano "Teste". Possiamo effettuare una partizione dell'insieme dei casi possibili, distinguendo fra

esattamente 8 teste:	esattamente 9 teste:	esattamente 10 teste:
$\binom{10}{8}=45$ casi	$\binom{10}{9}=10$ casi	1 caso solo.

Perciò i casi possibili sono in totale $45+10+1=56$.
E si ha 1 solo caso favorevole.
La probabilità richiesta è 1/56.

46) $p(4\ \text{"}\textit{ori}\text{"}\ \textit{da un mazzo di}\ 40)=\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{7}{37}\approx 0{,}0023\quad p(4\ \text{"}\textit{ori}\text{"}\ \textit{da un mazzo di}\ 52)=\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49}=0{,}0026\ldots$

E' lecito pensare, come abbiamo scelto di fare noi, ad un "evento a 4 fasi",
perché è vero che le carte vanno estratte "simultaneamente",
ma la probabilità richiesta non muta se immaginiamo di estrarle invece una dopo l'altra;
o magari, di estrarle contemporaneamente salvo poi guardarle una dopo l'altra.
Se vuoi, per esercizio, puoi rifare il calcolo pensando alle 4 carte estratte tutte assieme.
Si tratterà di contare le quaterne non ordinate … ecc. ecc.

47) $p(4\,\text{"}ori\text{"}-con\ reimbussolamento-estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 40)=\left(\frac{10}{40}\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4\approx 0{,}0039$

$p(4\,\text{"}ori\text{"}-con\ reimbussolamento-estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 52)=\left(\frac{13}{52}\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4\approx 0{,}0039$

48) $p(4\ semi\ diversi\ estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 40)=1\cdot\frac{30}{39}\cdot\frac{20}{38}\cdot\frac{10}{37}\approx 0{,}109421...$

$p(4\ semi\ diversi\ estraendo\ 4\ carte\ da\ un\ mazzo\ di\ 52)=1\cdot\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{13}{49}=0{,}105498...$

49) $p(4\ semi\ diversi-con\ reimbussolamento-da\ un\ mazzo\ di\ 40)=1\cdot\frac{30}{40}\cdot\frac{20}{40}\cdot\frac{10}{40}=1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

$p(4\ semi\ diversi-con\ reimbussolamento-da\ un\ mazzo\ di\ 52)=1\cdot\frac{39}{52}\cdot\frac{26}{52}\cdot\frac{13}{52}=1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

50) a) $p(somma\ 18\ con\ 3\ dadi)=p(tutti\ 6)=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

b) $p(somma\ 9\ con\ 3\ dadi)=$

$=p(un\ 6, un\ 2, un\ 1)+p(un\ 5, due\ 2)+p(un\ 5, un\ 3, un\ 1)+p(due\ 4, un\ 1)+p(un\ 4, un\ 3, un\ 2)+p(tre\ 3)=$

$=3!\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3!\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3!\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3=25\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\approx 0{,}11574$

Anche: poiché ciascuno dei 3 dadi porterà al minimo 1 e $1+1+1=3$, si tratta di vedere in quanti modi le rimanenti 6 unità che mancano per fornire una somma uguale a 9 possono "distribuirsi nei 3 dadi". Ma è noto (vedi paragrafo sulle "combinazioni con ripetizione" nel capitolo sul Calcolo Combinatorio) che 6 oggetti possono distribuirsi in 3 scatole in un numero di modi dato da

$C'_{3,\,6}=\binom{3+6-1}{6}=\binom{8}{6}=\binom{8}{2}=28$ e da questo numero, 28, occorre togliere 3

perché le 3 ripartizioni (6, 0, 0), (0, 6, 0), e (0, 0, 6) sono da escludere
in quanto corrisponderebbero alle situazioni (1+6, 1+0, 1+0), (1+0, 1+6, 1+0) e (1+0, 1+0, 1+6),
ma un dado non ha la faccia $1+6=7$.

I modi in questione sono dunque $28-3=25$ e la probabilità richiesta è $\frac{25}{6^3}$.

51) $p(\text{R})=p(\text{U1, poi 1R}+\text{2N da U1, poi R})+$
$+\,p(\text{U1, poi 3N da U1, poi R})+$
$+\,p(\text{U2, poi 3R da U2, poi R})+$
$+\,p(\text{U2, poi 2R}+\text{1N da U2, poi R})=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\binom{4}{3}}\cdot\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}}\cdot\frac{3}{8}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{35}+\frac{3}{35}+\frac{1}{16}+\frac{9}{64}\approx 46\%$$

52) $x=p(\text{A})=p(\text{A}\wedge\text{B})+p(\text{A}\wedge\overline{\text{B}})=p(\text{B})\cdot p(\text{A/B})+p(\overline{\text{B}})\cdot p(\text{A}/\overline{\text{B}})=y\cdot 0{,}4+(1-y)\cdot 0{,}3$

$p(\text{A})\cdot p(\text{B/A})=p(\text{B})\cdot p(\text{A/B})\qquad x\cdot 0{,}5=y\cdot 0{,}4$

$$\begin{cases}x=y\cdot 0{,}4+(1-y)\cdot 0{,}3\\ x\cdot 0{,}5=y\cdot 0{,}4\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0{,}4y+0{,}3-0{,}3y\\ 5x=4y\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0{,}1y+0{,}3\\ x=\frac{4}{5}y=0{,}8y\end{cases}$$

$$0{,}8y=0{,}1y+0{,}3;\qquad 8y=y+3;\qquad 7y=3;\qquad y=3/7;\qquad\begin{cases}x=\frac{4}{5}y=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{35}\\ y=\frac{3}{7}\end{cases}$$

53) Problematico. Va considerato il fatto che le stazioni quasi certamente non avranno la stessa “importanza”, e quindi non avranno la stessa frequenza media di viaggiatori che scendono; tale frequenza, poi, potrebbe anche dipendere dall’ora della giornata in cui il treno arriva in stazione, e inoltre la particolare stazione di partenza potrebbe essere tale che statisticamente i passeggeri che salgono in essa siano diretti in prevalenza ad una certa destinazione …

Se hai risposto che la probabilità è $1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$, si tratta di una valutazione piuttosto illusoria, che sarebbe corretta solo se la probabilità di uscita ad ogni stazione fosse identica per tutte e 5 le stazioni.

54) a) $1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}\approx 9{,}4\%$ oppure $\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4^4}=\frac{3}{32}\approx 9{,}4\%$

b) Con 20 confezioni: $1\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{5}{17}\approx 12{,}9\%$. Con 8 confezioni: $1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\approx 22{,}9\%$

55) $\frac{2}{3}$

56) $p(\mathrm{X})=p(\mathrm{XR})+p(\mathrm{XN\text{-}YN\text{-}XR})+p(\mathrm{XN\text{-}YN\text{-}XN\text{-}YN\text{-}XR})+p(\mathrm{XN\text{-}YN\text{-}XN\text{-}YN\text{-}XN\text{-}YN\text{-}XR})=$

$$=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}+\frac{7}{40}+\frac{1}{12}+\frac{1}{40}=\frac{7}{12}$$

57) La probabilità che tutte le *n* persone festeggino il compleanno in giorni diversi è, calcolandola col teorema dell’ “evento a più fasi”,

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-n+1}{365}=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

oppure, indifferentemente, calcolandola col rapporto $\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$,

$$\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

Quindi la probabilità che almeno 2 festeggino il compleanno nello stesso giorno è

$$1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

Si può ora utilizzare il foglio elettronico per verificare che il più piccolo valore di *n* per il quale questa quantità supera ½ è inaspettatamente basso: $n=23$.

Insomma, prese 23 persone a caso, la probabilità che almeno 2 compiano gli anni nello stesso giorno è già > ½ (e si capisce che andando a “riammettere” il 29 febbraio la differenza di probabilità sarebbe minima). Questo fatto piuttosto sorprendente è noto come il “paradosso dei compleanni”.

58) Circa 0,4%; circa 0,4%; in media 4

59) Circa 16,8%; circa 16,3%; pressappoco 15

60) Sembrano dipendenti …

61) Intorno a 139-140; vicino al 98%

62) Il 9,5%

63) Se il concorrente più bello è A, quello “così-così” è B, mentre il più brutto è C, le sequenze possibili sono
ABC ACB BAC BCA CAB CBA.
Con la sua strategia, la principessa andrebbe a selezionare A in 3 casi su 6 (controlla!) quindi, appunto, con probabilità ½.

64) a) 54 b) 14

65) 4 socks: 1b, 3r

66) $p(\mathrm{P}\cup\mathrm{R}\cup\mathrm{D})=p(\mathrm{P})+p(\mathrm{R})+p(\mathrm{D})-p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R})-p(\mathrm{P}\cap\mathrm{D})-p(\mathrm{R}\cap\mathrm{D})+p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R}\cap\mathrm{D})$ da cui

$$p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{P}\cup\mathrm{R}\cup\mathrm{D})-p(\mathrm{P})-p(\mathrm{R})-p(\mathrm{D})+p(\mathrm{P}\cap\mathrm{R})+p(\mathrm{P}\cap\mathrm{D})+p(\mathrm{R}\cap\mathrm{D})=$$
$$=0,85-0,60-0,50-0,40+0,60\cdot0,50+0,40\cdot0,50+0,50\cdot0,40=$$
$$=0,85-0,60-0,50-0,40+0,30+0,20+0,20=0,05=5\%$$

67) $p(\mathrm{S})=p(\mathrm{S}\wedge\mathrm{O})+p(\mathrm{S}\wedge\mathrm{P})=p(\mathrm{O})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{O})+p(\mathrm{P})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{P})=\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100}=\frac{800}{10000}=\frac{8}{100}=8\%$

$$p(\mathrm{P}/\mathrm{S})=\frac{p(\mathrm{P})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{P})}{p(\mathrm{P})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{P})+p(\mathrm{O})\cdot p(\mathrm{S}/\mathrm{O})}=\frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{10}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}}=\frac{3}{4}=75\%$$

$$p(\mathit{almeno}\,1\,\mathit{scomodo\ su\ n})=1-p(\mathit{nessuno\ scomodo})=1-\left(\frac{92}{100}\right)^n;\quad 1-\left(\frac{92}{100}\right)^n>0,50;\quad \left(\frac{92}{100}\right)^n<\frac{1}{2};\quad n\geq 9$$

68)

$$p(\mathrm{M}\vee\mathrm{Z})=p(\mathrm{M})+p(\mathrm{Z})-p(\mathrm{M}\wedge\mathrm{Z})$$

da cui

$$p(\mathrm{M}\wedge\mathrm{Z})=p(\mathrm{M})+p(\mathrm{Z})-p(\mathrm{M}\vee\mathrm{Z})=60\%+50\%-100\%=10\%$$

69)

$$p(\mathit{almeno\ una})=1-p(\mathit{nessuna})=1-\frac{\binom{12}{2}}{\binom{21}{2}}=1-\frac{\frac{12\cdot11}{2!}}{\frac{21\cdot20}{2!}}=1-\frac{11}{35}=\frac{24}{35}$$

$$p(\mathit{tutte\ e}\ 2)=\frac{\binom{9}{2}}{\binom{21}{2}}=\frac{\frac{9\cdot8}{2!}}{\frac{21\cdot20}{2!}}=\frac{6}{35}$$

70) $p=\dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}=\dfrac{\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}}{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{18}{35}\approx0,51$

$$p=\frac{1}{\binom{8}{4}}=\frac{1}{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{1}{70}\approx0,014$$

71) $p(\mathit{almeno}\ 2\ \mathit{corrette})=1-p(\mathit{nessuna\ corretta})-p(\mathit{esattamente}\,1\,\mathit{corretta})=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}-10\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\approx76\%$

72) $\approx0,3929$

73) $\approx0,1167$ (osserviamo che la conoscenza del numero di lampadine presenti in ciascuna scatola è superflua)

74) $3/36=1/12$; $\approx0,0735$; $\approx0,0831$

75) Almeno 13 tiri

76) $\approx0,2751$