STUDIO DI FUNZIONE

1) I GRANDI TEOREMI PRELIMINARI

1.1 FUNZIONI CONTINUE SU TUTTO UN INTERVALLO

Vale innanzitutto il seguente **TEOREMA FONDAMENTALE:**
Se f è una funzione CONTINUA su di un INTERVALLO I, allora anche $f(\mathrm{I})$ è un INTERVALLO

- Ricordiamo che col simbolo $f(\mathrm{I})$ si indica " l'insieme delle immagini dei punti di I ", ossia
  " *l'insieme dei valori assunti dalla funzione $f(x)$, cioè dalla y della funzione, quando x varia in I* "
  (*dicendo "la funzione", in questo, come in molti casi, si intende "la variabile dipendente", "la y"*).
- L'insieme $f(\mathrm{I})$ viene anche chiamato "*l'immagine di* I *attraverso la* f".
  Si può anche dire che $f(\mathrm{I})$ è "il *codominio* di f", se il dominio di f è l'insieme I,
  o anche se, pur essendo l'intero dominio di f più grande di I, si intende di far variare *x* solamente in I.

Esempi

Consideriamo le funzioni seguenti,
e per ognuna supponiamo che *x* varii sull'insieme I a fianco specificato, che è, in ciascun caso, un intervallo;
osserviamo che ogni funzione della piccola rassegna è definita e continua sull'insieme considerato.
Bene, si può constatare che l'insieme dei valori che la *y* assume costituisce, in ciascun caso, ancora un intervallo!

$f(x)=10-2x$	$I=[1,3]$	$f(\mathrm{I})=[4,8]$	$g(x)=x^2$	$I=(-1,1)$	$g(I)=[0,1)$
$g(x)=x^2$	$I=(-\infty;+\infty)$	$g(I)=[0;+\infty)$	$h(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$	$I=(2,+\infty)$	$h(I)=\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

Nel caso che la funzione sia CONTINUA in un INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO,
valgono i quattro importanti **TEOREMI** qui di seguito elencati.

Se $y=f(x)$ è una funzione CONTINUA su di un intervallo CHIUSO E LIMITATO [a, b], allora:

**(1) l'insieme $f([a,b])$ dei valori che la *y* assume, al variare di *x* in [a, b],
è anch'esso un intervallo chiuso e limitato;**

(2) la funzione f ammette minimo assoluto e massimo assoluto in [a, b]
(**Teorema di Weierstrass;** Karl Weierstrass, tedesco, 1815 - 1897)

(3) la funzione f assume, almeno una volta, ogni valore compreso fra il suo minimo e il suo massimo
(**Teorema dei Valori Intermedi**);

(4) se $f(a)$ e $f(b)$ sono discordi, allora f si annulla almeno una volta nell'intervallo aperto (a, b)
(**Teorema dell'Esistenza degli Zeri delle Funzioni Continue**)

OSSERVAZIONI SULLE DIMOSTRAZIONI
Si può osservare che
- (2), (3), (4) sono conseguenze pressoché immediate di (1);
- (1), a sua volta, dipende in parte dal Teorema Fondamentale.

Ciò premesso, siamo purtroppo costretti a ***rinunciare*** alle dimostrazioni del Teor. Fondamentale e del Teor. (1),
e quindi, in definitiva, di tutti i teoremi sopra enunciati.
Infatti esse richiederebbero nozioni di "**topologia**" (un settore della Matematica, che esplora e studia questioni,
molto generali e ad un elevato livello di astrazione, in qualche modo ispirate dall'immaginazione geometrica)
la cui presentazione, seppure sommaria, ci costringerebbe ad aprire una parentesi troppo ampia e specialistica.

Se sei interessato a queste tematiche, puoi ricercare, su Internet o in Biblioteca, nell'argomento
"topologia", o "spazi topologici", o "spazi metrici",
le definizioni di "**insieme connesso**" e di "**insieme compatto**",
con i teoremi secondo i quali

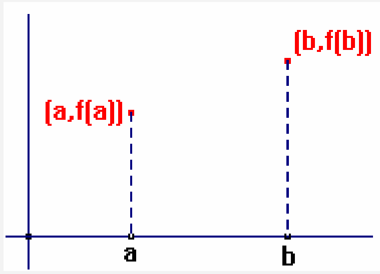
- "i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ aventi la proprietà di essere sia 'connessi' che 'compatti'
  sono tutti e soli gli intervalli chiusi e limitati"
- "l'immagine di un insieme connesso attraverso una funzione continua è ancora un insieme connesso"
  (brevemente: "l'immagine continua di un connesso è ancora un connesso")
- "l'immagine continua di un compatto è ancora un compatto"

OSSERVAZIONI

Si potrebbe affermare che tutti questi teoremi sono "geometricamente evidenti" …

Pensiamo ad esempio al teorema (2), quello detto "di Weierstrass":
"se $y = f(x)$ è una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato [a, b],
allora la funzione f ammette minimo assoluto e massimo assoluto in [a, b]".

Supponiamo di voler disegnare
sull'intervallo [a, b] *della figura qui a fianco,*
una funzione $f(x)$ *che sia continua su tutto l'intervallo chiuso e limitato* [a, b].
La nozione intuitiva di continuità su di un intervallo fa pensare ad una curva
che possa essere tracciata "senza mai staccare la matita dal foglio" …
quindi dovremo partire con la punta della matita
appoggiata sul punto di coordinate $(\mathrm{a},\ f(\mathrm{a}))$
e muovere la matita senza mai alzarne la punta
fino ad approdare in $(\mathrm{b},\ f(\mathrm{b}))$.



Ora, si capisce che in questo nostro "viaggio" saremo OBBLIGATI, PER FORZA,
a toccare un massimo assoluto da cui ridiscendere e un minimo assoluto dal quale risalire!

… tuttavia, giustificazioni "geometrico-intuitive" di questo tipo
non sono ritenute sufficientemente rigorose, per diversi motivi:

- L'**esistenza di funzioni stranissime** ci mostra che, **in Analisi, l'intuizione a volte può ingannare.**
  Basti pensare che proprio il tedesco *Weierstrass diede per primo (1871) un esempio di funzione continua su TUTTO un intervallo, ma non derivabile in NESSUN punto di quell'intervallo!!!*
  Diciamo la verità, chi mai avrebbe scommesso che potesse esistere una funzione siffatta?!?

- In particolare, la possibilità di costruire funzioni come quella di Weierstrass appena citata,
  ma anche soltanto il pensare a una funzione come la
  $$f(x) = \begin{cases} x & per \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & per \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$
  stramba e tutta "**disgregata**" ma tuttavia dotata della proprietà di essere **continua in $x = 0$**,
  ci fanno dubitare dell'idea che la continuità di una funzione su di un intervallo
  possa essere sempre interpretata come
  "la possibilità di tracciamento del grafico senza mai staccare la matita dal foglio"
  (ammettendo pure che questa idea legata all'esperienza concreta sia in qualche modo "matematizzabile",
  cioè traducibile in relazioni non equivoche fra entità matematiche astratte).

- E' atteggiamento caratterizzante della matematica l'organizzare ciascun tema oggetto di studio
  secondo una **struttura "ipotetico-deduttiva"** (basti pensare alla geometria euclidea …)
  Insomma, si sceglie un sistema di proposizioni "di base" (= gli "**assiomi**") e, a partire da questi,
  per via puramente logica, si ricavano altre proposizioni "dimostrate" (= i "**teoremi**").
  Se una proposizione che si sospetta fortemente esser vera non è stata dimostrata come teorema,
  - o la si tiene "congelata" come "**congettura**"
    (= proposizione "plausibile", non smentita, ma comunque ancora in attesa di una dimostrazione)
  - oppure si decide di aggiungerla esplicitamente alla famiglia degli assiomi.

- Ancora: il dimostrare questioni numeriche restando in ambito puramente numerico
  (quindi, evitando di coinvolgere la geometria)
  permette di dare piena autonomia alla costruzione teorica dell' Aritmetica-Algebra-Analisi
  (in effetti, il completo **affrancamento dell'Analisi dalla Geometria** è considerato
  una delle maggiori conquiste intellettuali della matematica del Diciannovesimo secolo)

♥ Intendiamoci:
con ciò, non voglio dire che in Analisi si debba rinunciare all'intuizione geometrica, tutt'altro!
Questa, anzi, è utilissima, insostituibile!!!
Come scrisse August De Morgan (1806 -1871):

*"The moving power of mathematical invention is not reasoning but **imagination**".*

Voglio solo sottolineare che la validità di quegli enunciati,
che siamo portati a intuire e a ritenere plausibili a partire da una visione geometrica,
deve poi essere stabilita in via definitiva con catene deduttive fondate su basi puramente **razionali**.