1.2 IL TEOREMA DI ROLLE

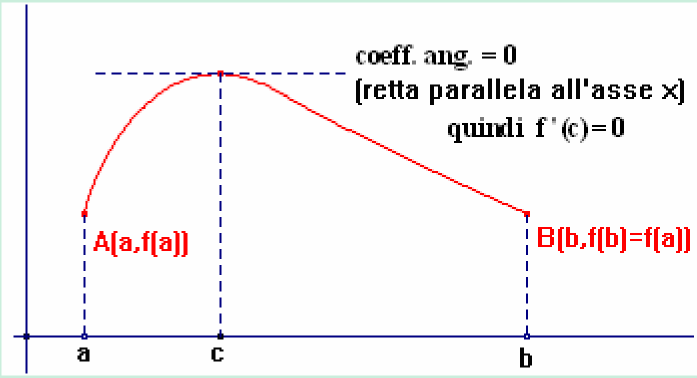
TEOREMA DI ROLLE
Michel Rolle, francese, 1652-1719

Ipotesi

- **f continua su [a,b]**
- **f derivabile perlomeno su (a,b)**
- **$f(a) = f(b)$**

Tesi

Esiste almeno un punto c in (a,b) tale che
$$\boxed{f'(c) = 0}$$



Giustificazione con l'intuizione geometrica

La curva grafico della funzione, partendo dal punto $A(a, f(a))$,
si snoda con continuità, senza interruzioni, fino ad approdare nel punto $B(b, f(b))$.
Ma A e B hanno la stessa ordinata (infatti per ipotesi è $f(a) = f(b)$);
quindi, **se il grafico parte da A in salita (o, rispettivamente, in discesa),
per poter giungere a B, che si trova alla stessa "altezza" di A,
dovrà prima o poi ridiscendere (risalire)
e nel cambiare la "direzione di marcia" sarà obbligato a toccare un massimo (minimo),
nel quale la retta tangente sarà orizzontale e quindi la derivata sarà nulla.**

Dimostrazione rigorosa

Sia f continua su [a, b], derivabile perlomeno su (a, b), e tale che $f(a) = f(b)$.
Per il teorema di Weierstrass, f ammette, su [a, b], minimo assoluto m e massimo assoluto M.

- Se è m = M, allora f è costante su tutto [a, b], quindi $f'(x) = 0$ per ogni x di [a, b] e la tesi è vera.
- Se è m ≠ M, allora almeno uno dei due valori m, M deve essere distinto dal valore $f(a) = f(b)$;
quindi, dovrà essere assunto dalla f in corrispondenza di un'ascissa c diversa sia da a che da b (a<c<b).
Dico ora che $f'(c) = 0$.
Supponiamo, per meglio fissare le idee, che c sia il punto di MINIMO assoluto:
$f(c) = m$, ossia: $\forall x \in [a,b],\ f(x) \ge m = f(c)$ (analogo sarebbe il ragionamento nel caso $f(c) = M$)

  - Se costruiamo il rapporto incrementale DESTRO in c, avremo: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$
  perché, su tutto [a, b], è $f(x) \ge f(c)$ quindi $f(x) - f(c) \ge 0$,
  e inoltre, essendo x alla *destra* di c ($x > c$), sarà pure $x - c > 0$.
  - Se invece costruiamo il rapporto incrementale SINISTRO in c, avremo: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$
  perché, su tutto [a, b], è $f(x) \ge f(c)$ quindi $f(x) - f(c) \ge 0$,
  ma, essendo questa volta x alla *sinistra* di c ($x < c$), sarà $x - c < 0$.

  Ora l'ipotesi ci dice che f è derivabile su tutto (a, b) quindi anche in c;
pertanto i due rapporti incrementali destro e sinistro in c dovranno tendere allo stesso limite
(la derivata $f'(c)$) quando si fa tendere x a c: $\lim\limits_{x\to c+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$

  Essendo, come abbiamo visto, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$ quando $x > c$ e $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$ quando $x < c$,

  dovrà necessariamente essere $\lim\limits_{x\to c+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$ e $\lim\limits_{x\to c-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$

  Ora, **tali due limiti, in considerazione dei loro segni,
possono essere uguali soltanto se entrambi nulli**.

  Con ciò resta provato che $f'(c) = 0$, cioè la tesi.

ESERCIZI sul teorema di Rolle (risposte alla fine)

1) Considera la funzione $y = x^3 - x$ sull'intervallo [0,1].

a) Dopo aver controllato che esistono le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.

b) Traccia infine il "grafico probabile" della funzione (su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$), *tenendo anche conto dei punti in cui hai stabilito che la derivata si annulla (in questi punti la retta tangente dovrà essere orizzontale!).*

2) Considera la funzione $y = \sqrt{1-x^2}$ sull'intervallo $[-1, 1]$

a) Dopo aver controllato che esistono (appena appena!) le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.

b) Grafico probabile.

3) Considera la funzione $y = x^4 - 2x^2$ sull'intervallo $[-3, 3]$

a) Dopo aver controllato che sussistono le condizioni per applicare il teorema di Rolle, determina l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.

b) Grafico probabile della funzione (su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$).

4) Spiega perché Rolle non è applicabile alla funzione $y = |x|$ su $[-1; 1]$

5) Determina il valore del parametro k in modo che alla funzione $y = \dfrac{kx-1}{x^2-3}$ sia applicabile Rolle su [2;4]

a) Determina poi l'ascissa c in (2,4) tale che $f'(c) = 0$

b) Spiega perché non avrebbe avuto senso, per nessun valore di k, applicare Rolle su [0;2]

c) Grafico probabile (su tutto il dominio).

6) a) Applica Rolle alla funzione $y = sen\, x - \cos x$, su $[0, 2\pi]$ verificando che di punti c tali che $f'(c) = 0$ ce n'è più d'uno.

b) Traccia il grafico probabile della funzione su $[0, 2\pi]$, costruendolo per differenza di ordinate.

7) Considera la funzione $f(x) = 3\sqrt{x} - x$

a) Determina il secondo estremo di un intervallo, il cui primo estremo sia 1, sul quale sia possibile applicare alla $f(x)$ il teorema di Rolle.

b) Successivamente, determina in tale intervallo l'ascissa c in cui $f'(c) = 0$.

c) Grafico probabile della funzione (su tutto il dominio).

RISPOSTE

1) $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2) $c = 0$; dico che le condizioni per l'applicabilità del Teorema di Rolle sussistono "appena appena" perché la funzione non è derivabile agli estremi dell'intervallo.

3) Ben 3 possibili valori di c: $-1, \; 0, \; +1$

4) Rolle non è applicabile in questo caso, perché la funzione non è derivabile su tutto $(-1, 1)$: infatti ha derivata sinistra e destra distinte ("punto angoloso") in $x = 0$.

5) a) $k = \dfrac{6}{11}$ b) $c = \dfrac{11+\sqrt{13}}{6} \simeq 2.434$ c) perché la funzione non è definita su tutto [0;2]: il dominio si interrompe in $x = \pm\sqrt{3}$, e $0 < \sqrt{3} < 2$.

6) $c_1 = \dfrac{3}{4}\pi$, $c_2 = \dfrac{7}{4}\pi$

7) L'altro estremo è 4; $c = \dfrac{9}{4}$