1.3 I TEOREMI DI LAGRANGE (O "DEL VALOR MEDIO") E DI CAUCHY

TEOREMA
DI LAGRANGE
O "DEL VALOR MEDIO"
Joseph-Louis Lagrange
Torino 1736 - Parigi 1813

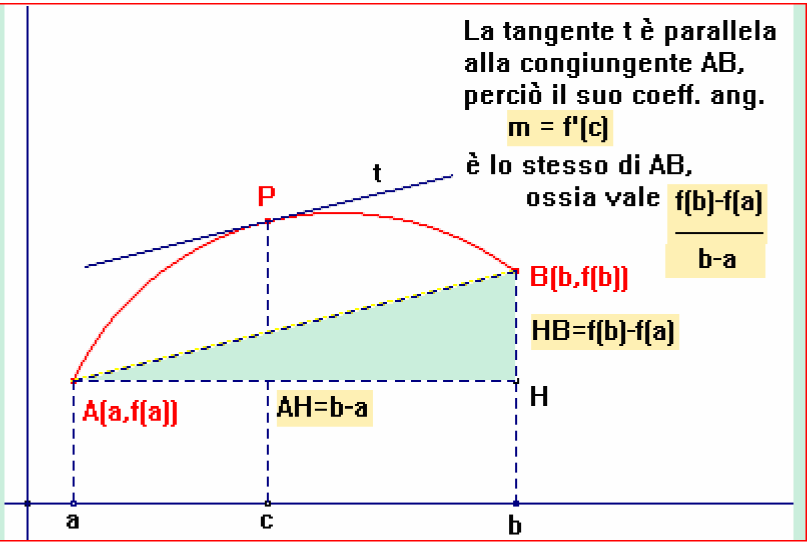
Ipotesi

- **f continua su [a,b]**
- **f derivabile per lo meno su (a,b)**

Tesi

Esiste almeno un punto c in (a,b) tale che

$$\boxed{f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}}$$



Giustificazione con l'intuizione geometrica (vedi la figura sovrastante)

Si capisce che, se f verifica le ipotesi del teorema, **deve per forza esistere un punto P sul grafico nel quale la tangente t alla curva sia parallela alla secante passante per i punti $\mathrm{A}(\mathrm{a}, f(\mathrm{a}))$ e $\mathrm{B}(\mathrm{b}, f(\mathrm{b}))$.**
Detta c l'ascissa di P, la tangente t ha coefficiente angolare

$$f'(\mathrm{c})$$

e la secante AB ha coefficiente angolare

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}.$$

Ma **essendo t ed AB parallele, tali due coefficienti angolari saranno uguali**.

Dimostrazione rigorosa del teorema di Lagrange

Si effettua **riconducendosi al teorema di Rolle**.
A tale scopo, si costruisce la **funzione ausiliaria**

$$F(x) = f(x) - kx$$

con k scelto in modo tale che a tale funzione F si possa poi applicare Rolle.
Occorre perciò che sussista la condizione $F(\mathrm{a}) = F(\mathrm{b})$ e quindi che sia

$$f(\mathrm{a}) - k\mathrm{a} = f(\mathrm{b}) - k\mathrm{b}$$

da cui ricaviamo

$$k = \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$$

Applichiamo dunque Rolle alla funzione

$$F(x) = f(x) - \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}x$$ (dài, ricontrolla, per sostituzione, che è proprio $F(\mathrm{a}) = F(\mathrm{b})$!);

ne deduciamo l'esistenza di un'ascissa c, strettamente compresa fra a e b, per la quale

$$F'(\mathrm{c}) = 0$$

Ma è

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$$

quindi avremo, per questa ascissa $x = \mathrm{c}$,

$$f'(\mathrm{c}) - \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} = 0$$

ossia

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}},$$

come volevasi dimostrare.

ESERCIZI sul Teorema di Lagrange (risposte alla pagina successiva)

1) E' applicabile Lagrange alla funzione $y=\sqrt{x}$ su $[0,4]$?

2) Inventa una funzione+intervallo per cui Lagrange non sia applicabile.

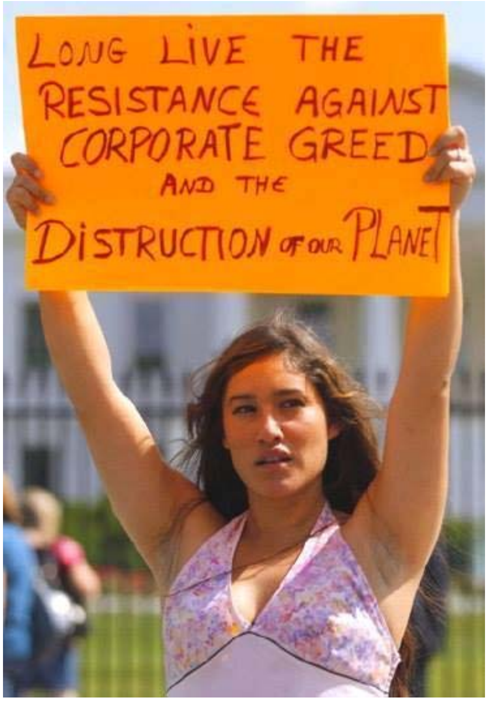
3) Applica Lagrange alla funzione $y=x^5+x^3+1$ sull'intervallo $[-1,1]$, determinando l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.

4) Applica Lagrange alla funzione $y=e^{-x}$ sull'intervallo $[0,1]$, determinando l'ascissa c di cui il teorema assicura l'esistenza.

5) Applica Lagrange alla funzione $y=ax^2+bx+c$ sull'intervallo $[x_1, x_2]$, determinando l'ascissa di cui il teorema assicura l'esistenza.

6) a) Applica Lagrange alla funzione $y=6/x$ sull'intervallo $[1,3]$, determinando l'ascissa c.

b) Indica con A, B i punti del grafico della funzione, di ascisse 1 e 3 rispettivamente. Dovresti ora essere in grado di stabilire qual è il punto N dell'arco della curva, di estremi A e B, che ha dalla retta AB la distanza massima, e di calcolare quanto vale tale distanza massima.



RISPOSTE

1) Sì: la funzione è continua sull'intervallo chiuso $[0, 4]$ e derivabile su tutto l'intervallo aperto $(0, 4)$.
E' pur vero che la funzione non è derivabile in $x=0$, perché in tale ascissa la derivata diventa infinita, ma si tratta di un *estremo* dell'intervallo, *non* di un suo punto interno.

2) Qui ci si può sbizzarrire… basta che la funzione considerata
   a) *non sia definita su tutto l'intervallo:* es. $y=1/x$ su un intervallo contenente l'ascissa 0, come [–1;1]
   b) *oppure sia definita su tutto l'intervallo ma abbia in esso una discontinuità di specie qualsiasi:*
   - potrai servirti di una funzione definita "a tratti", o "per casi", come ad esempio

$$f(x)=\begin{cases} x & per \quad 1 \le x \le 2 \\ x^2 & per \quad 2 < x \le 3 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\, x}{x} & per \;\; x \in [-\pi, \pi]-\{0\} \\ 5 & per \;\; x=0 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 1/x & per \;\; -1 \le x < 0 \;\vee\; 0 < x \le 1 \\ 0 & per \;\; x=0 \end{cases}$$

   - potrai scomodare funzioni come $int(x)=$"parte intera" di x oppure $m(x)=$"mantissa" di x
   - per non parlare di discontinuità più estese e "drammatiche" (funzione di Dirichlet e affini)
   - …

   c) *oppure ancora abbia uno o più punti di non derivabilità.*
   - Tipiche a tale proposito sono le funzioni col simbolo di valore assoluto che presentano di norma punti angolosi:
     ad es., $y=x^2+|x-1|$ su di un qualsiasi intervallo chiuso contenente l'ascissa 1, come [0; 2]
   - Puoi anche considerare situazioni di "derivata infinita",
     come $y=\sqrt[3]{x}$ o $y=\sqrt[3]{x^2}$ su di un qualsivoglia intervallo chiuso contenente l'ascissa 0, come $[-1, 1]$
   - La funzione $f(x)=\begin{cases} x\, sen\dfrac{\pi}{x} & per \;\; x \ne 0 \\ 0 \quad per & x=0 \end{cases}$ è continua ovunque ma non è derivabile per $x=0$
   - Puoi inventare una funzione definita "a tratti", che sia continua su tutto un intervallo ma presenti un punto di non derivabilità in corrispondenza dell' ascissa in cui cambia l'espressione analitica: es.

$$p(x)=\begin{cases} x+2 & per \quad 1 \le x \le 2 \\ x^2 & per \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

   - Se vuoi fare un po' di "scena", potresti citare la funzione di Weierstrass "*continuous but nowhere differentiable*" di cui abbiamo parlato all'inizio del capitolo
   - …

3) $c_1=-\sqrt{\dfrac{2}{5}},\; c_2=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

4) $1-\ln(e-1)$

5) $c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

6) $c=\sqrt{3};\;\; \mathrm{N}\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right);\;\; d=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \approx 0.479$

CONSEGUENZE NOTEVOLI DEL TEOREMA DI LAGRANGE

TEOREMA: se una funzione ha DERIVATA NULLA in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), essa è COSTANTE in quell'intervallo

Dimostrazione

Se è $f'(x) \equiv 0$ su tutto un intervallo I (il simbolo $\equiv$ vuol dire "identicamente uguale a")
allora, presi due qualsivoglia punti x_1, x_2 di I, dovrà essere necessariamente, $f(x_1) = f(x_2)$
in quanto, se così non fosse, ossia se $f(x_1)$ fosse diverso da $f(x_2)$,
per il teorema di Lagrange esisterebbe, fra x_1 e x_2, un'ascissa c nella quale si avrebbe

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

contro l'ipotesi che $f'(x)$ sia identicamente nulla in I. Ciò prova che la f è costante su I.

TEOREMA: se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno DERIVATE UGUALI in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), allora DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE

Dimostrazione

Se è $f'(x) \equiv g'(x)$ su tutto un intervallo I,
allora, considerata la funzione ausiliaria $F(x) = f(x) - g(x)$,
si avrà $F'(x) = f'(x) - g'(x) \equiv 0 \ \ su\ I$,
da cui, per il teorema precedente, $F(x) = \mathrm{c}$ con c costante,
e quindi $f(x) - g(x) = \mathrm{c}$, come volevasi dimostrare.

Perché il Teorema di Lagrange viene anche detto "del valor medio"?

In Fisica, dato lo spazio percorso in funzione del tempo attraverso la funzione $s = s(t)$,
la derivata $s'(t) = ds/dt$ *fornisce, istante per istante, la velocità del moto:* $s'(t) = v(t)$
Se l'intervallo temporale nel quale vogliamo studiare il moto è $\mathrm{a} \le t \le \mathrm{b}$,
la velocità media è data invece dal rapporto $\dfrac{s(\mathrm{b}) - s(\mathrm{a})}{\mathrm{b} - \mathrm{a}}$.
Ricordiamo che "velocità media" di un moto significa
"quella velocità la quale, se fosse stata mantenuta costante per tutto il tempo del moto, avrebbe dato luogo al medesimo spostamento complessivo che si è registrato in regime di velocità varia".
Ora, il valore $t = c$ *di cui il teorema di Lagrange assicura l'esistenza, è tale che* $s'(\mathrm{c}) = \dfrac{s(\mathrm{b}) - s(\mathrm{a})}{\mathrm{b} - \mathrm{a}}$;
quindi la velocità in tale istante è $v(\mathrm{c}) = \dfrac{s(\mathrm{b}) - s(\mathrm{a})}{\mathrm{b} - \mathrm{a}}$ = *velocità media del moto.*
In definitiva, Lagrange assicura
(se, come di norma avviene, la funzione s(t) soddisfa a determinate ipotesi di regolarità)
l'esistenza di un istante c nel quale la velocità istantanea è uguale alla velocità media del moto:
di qui la denominazione del teorema.

TEOREMA DI CAUCHY

Augustin Louis Cauchy, francese, 1789-1857

Ipotesi
- $\boldsymbol{f, g}$ **continue su** $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$
- $\boldsymbol{f, g}$ **derivabili per lo meno su** (a, b)
- $\boldsymbol{g'(x) \neq 0}$ **su tutto** (a, b)

Tesi **Esiste almeno un punto c in (a, b) tale che** $\boxed{\dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{g(\mathrm{b}) - g(\mathrm{a})} = \dfrac{f'(\mathrm{c})}{g'(\mathrm{c})}}$

Dimostrazione

Come per Lagrange, si utilizza una funzione ausiliaria:
$F(x) = f(x) - k \cdot g(x)$, con k determinato in modo che $F(\mathrm{a}) = F(\mathrm{b})$;
a questa funzione ausiliaria F si applicherà poi il teorema di Rolle, deducendo facilmente la tesi.