

## 1.4 II TEOREMA (MEGLIO: I TEOREMI) DI DE L'HOPITAL

### Teorema (PRIMO TEOREMA DI DE L'HOPITAL)

*Guillaume de l'Hôpital, francese, 1661-1704*

Sia  $I_c$  un intorno di  $c \in \mathbb{R}$ , e siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni definite e derivabili su tutto  $I_c - \{c\}$  (non è necessario fare alcuna ipotesi sul comportamento delle due funzioni IN  $c$ , dove, addirittura, l'una o l'altra o entrambe le funzioni potrebbero persino non essere definite).

Sia inoltre  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$

cosicché il calcolo del limite  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  si presenti come forma di indecisione  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .

Supponiamo infine che sia  $g'(x) \neq 0$  su tutto  $I_c - \{c\}$ .

Bene!

Il teorema di cui ci occupiamo dice che, *sotto le ipotesi di cui sopra*,

**SE ESISTE il  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , ALLORA ESISTE pure il  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  E COINCIDE col precedente,**

ossia risulta

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Esempio 1**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sin(\pi x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{\pi \cos(\pi x)} = -\frac{3}{\pi}$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

*la catena appena scritta ha senso perché il secondo dei due limiti, quello del rapporto fra le derivate, esiste ...*

*nel caso non fosse esistito il secondo limite,*

*il discorso per quanto riguarda il primo limite sarebbe rimasto aperto.*

*Vale a dire:*

*quando il  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  non esiste,*

*de l'Hopital non è applicabile e quindi nulla si può dire, a priori, sul  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ ;*

*quest'ultimo potrà non esistere, oppure esistere finito o infinito, a seconda dei casi.*

**Esempio 2**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4x-3)}{x^2+7x-8} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4}{4x-3}}{2x+7} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(4x-3)(2x+7)} = \frac{4}{9}$

**Esempio 3**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^3-3x-2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{3x^2-3} = \infty$

*L'alternativa a De l'Hopital, in quest'ultimo caso, sarebbe stata di scomporre in fattori e semplificare:*

*con De l'Hopital, comunque, la determinazione del limite risulta più rapida.*

**In pratica, il teorema considerato dice che**

**(se, beninteso, sono verificate determinate ipotesi)**

**il limite del rapporto di due funzioni,**

**che si presenti sotto la forma di indecisione  $[0/0]$ ,**

**è uguale al limite del rapporto fra le loro derivate!!!**

**Il teorema vale anche se l'intorno  $I_c$  è solo unilaterale.**

**E vale pure nel caso in cui  $x$ , anziché tendere a  $c \in \mathbb{R}$ , tenda a  $+\infty$  oppure a  $-\infty$ .**

**IL “SECONDO TEOREMA DI DE L’HOPITAL”**

Un enunciato analogo al precedente vale anche se il limite del rapporto  $f/g$

si presenta sotto la forma di indecisione  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

**Esempio 4**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 4}{3x + 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0^+$

Quando si cita il “Teorema di De l’Hopital” ci si vuole di norma riferire indifferentemente all’uno o all’altro dei due teoremi che abbiamo presentato, o, se si preferisce, all’unico enunciato che si otterrebbe riunendoli.

Quando il rapporto delle derivate risulta essere ancora una forma di indecisione  $[0/0]$  o  $[\infty/\infty]$  è possibile applicare il Teorema di De l’Hopital una seconda volta, ed eventualmente poi una terza ...

**Esempio 5**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 + x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x + 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$

Il teorema di De l’Hopital si riferisce alle forme di indecisione  $[0/0]$  oppure  $[\infty/\infty]$ ; tuttavia,

anche le forme  $[0 \cdot \infty]$ ,  $[\infty - \infty]$  e le forme di indecisione con potenze:  $[0^0]$ ,  $[\infty^0]$ ,  $[1^\infty]$

possono a volte essere risolte riconducendole a  $[0/0]$  oppure  $[\infty/\infty]$  e poi applicando De l’Hopital.

A tale scopo, si utilizzeranno le tre identità seguenti:

1)  $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{f}{1}}{\frac{1}{g}}$

2)  $f(x)^{g(x)} = e^{\ln [f(x)^{g(x)}]} = e^{g(x) \ln f(x)}$

3)  $f - g = f \left( 1 - \frac{g}{f} \right) = g \left( \frac{f}{g} - 1 \right)$

(si lascerà a numeratore l’una o l’altra delle due funzioni, a seconda della convenienza) (si raccoglierà o l’una o l’altra delle due funzioni, a seconda della convenienza; tuttavia, di norma queste ultime formule non sono molto utili perché possono essere sostituite da procedimenti alternativi più vantaggiosi, ad esempio un banale denominatore comune)

**Esempio 6**  $[0 \cdot \infty]$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0^-$

**Esempio 7**  $[\infty \cdot 0]$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{+e^{-x}} = 0^+$  (NOTA)

NOTA: Verifica tu che lasciando a numeratore l’esponenziale, cioè passando a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1/x^2} \dots$  ... il tentativo di applicare de l’Hopital sarebbe fallito ☹ perché avrebbe portato ad espressioni via via più complicate rispetto a quella di partenza.

**Esempio 8**  $[0^0]$   $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln (\sin x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln \sin x}$

e dopo questi passaggi preliminari, andremo a calcolare il limite della funzione ad esponente riconducendoci ad un quoziente “trattabile” con De l’Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^2 \cos x}{\sin x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \overset{0^+}{x} \cdot \overset{1}{\cos x} = 0^-$$

In definitiva, tornando all’esercizio iniziale, avremo  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\overbrace{x \cdot \ln \sin x}^{-0}} = 1$