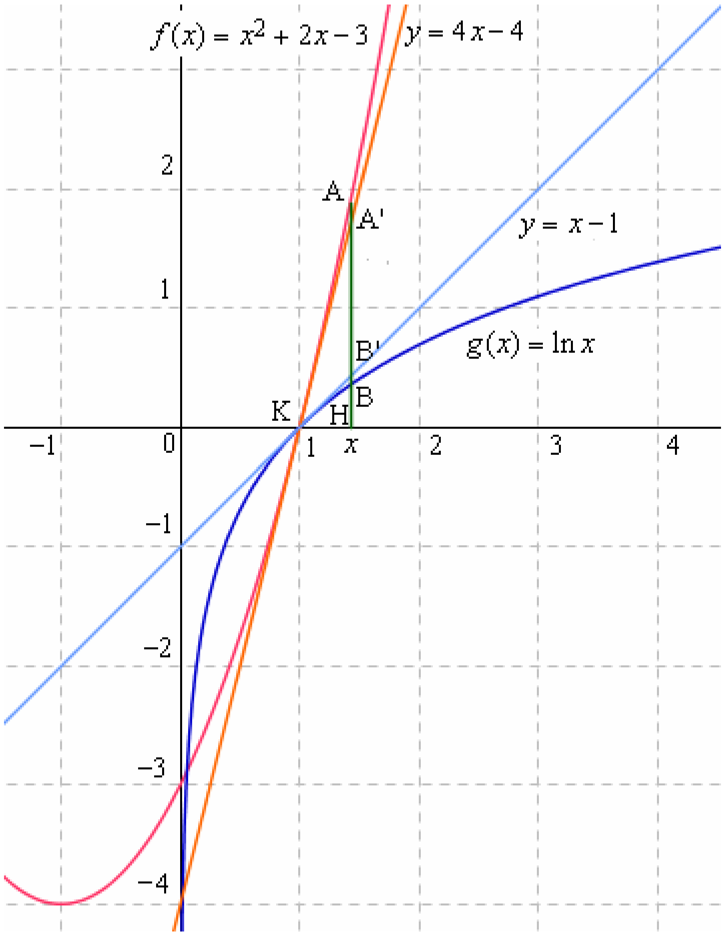
VERSO LA DIMOSTRAZIONE - Un'interpretazione geometrica del teorema di De l'Hopital

La figura qui sotto riportata vuole suggerire un'interpretazione geometrica molto suggestiva del Teorema di De l'Hopital.

Proponiamoci di calcolare
il limite seguente:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}}.$$

Tale limite si presenta
sotto la forma di indecisione [0/0]:
c'è dunque un "**conflitto**"
fra la funzione a denominatore,
che col suo tendere a zero
"vorrebbe"
far impennare la frazione
verso l'infinito,
e la funzione a numeratore,
che col suo tendere a zero
"vorrebbe"
schiacciare la frazione
verso lo zero.
Il valore del limite dipenderà
dalla **RAPIDITA'**
con cui tendono a zero,
rispettivamente,
numeratore $f(x)$
e denominatore $g(x)$.
Ma la rapidità nel tendere a zero
di $f(x)$ e, rispettivamente, $g(x)$,
è legata alla **PENDENZA** con cui
il grafico di ciascuna funzione
confluisce verso lo zero!



E tale pendenza non è altro che la pendenza della retta tangente in $K(1,0)$ a ciascuna curva
(legata, a sua volta, al **COEFFICIENTE ANGOLARE della tangente** ossia alla **DERIVATA** della funzione!)

Cerchiamo di mettere meglio a fuoco questa idea,
l'idea cioè di **chiamare in causa le rette tangenti** alle due curve in K, **e il loro coefficiente angolare**.
Prendiamo un'ascissa x (l'ascissa del punto H in figura) prossima a 1, e andiamo a considerare
il rapporto delle rispettive ordinate $f(x)$ e $g(x)$ (rapporto di cui ci interessa il limite per x che tende a 1).
Poiché siamo in prossimità del punto K,
i grafici delle due curve "si confondono con" le rispettive rette tangenti in K.
Il valore del rapporto $f(x)/g(x)$ è quindi **ottimamente approssimato** dal valore del rapporto fra le due ordinate,
che corrispondono a x NON sulle *curve* $y=x^2+2x-3$ e $y=\ln x$, bensì sulle rispettive *rette tangenti* in K.

Avremo allora

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}\approx\frac{y_A}{y_B}\approx\frac{y_{A'}}{y_{B'}}=\frac{\mathrm{HA'}}{\mathrm{HB'}}=\frac{m_{\mathrm{KA'}}\cdot\mathrm{KH}}{m_{\mathrm{KB'}}\cdot\mathrm{KH}}=\frac{m_{\mathrm{KA'}}}{m_{\mathrm{KB'}}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}\underset{\substack{\textit{come confidiamo che sia,}\\ \textit{essendo le nostre due}\\ \textit{funzioni } f,\ g\\ \textit{molto "regolari"}}}{\overset{=}{\downarrow}}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La catena appena scritta costituisce un **abbozzo** di giustificazione
(non è sufficientemente preciso né sufficientemente generale per poter essere considerato una "dimostrazione")
del Teorema di De l'Hopital.

Ma ecco, alla pagina successiva, la "vera" dimostrazione,
riferita a quello che abbiamo chiamato Il "Primo Teorema di De l'Hopital",
e la cui ipotesi e tesi ti invito a rivedere, prima di iniziare la lettura.
Il "Secondo Teorema di De l'Hopital" avrebbe una dimostrazione analoga
(anzi, più semplice, non essendoci in quel caso il problema del comportamento della funzione IN c*).*

DIMOSTRAZIONE del Teorema di De l'Hopital (nel caso del Primo Teorema)

L'ipotesi vincola il comportamento delle due funzioni $f(x),\ g(x)$ IN PROSSIMITA' di c:

- $f(x)$ e $g(x)$ definite e derivabili su tutto un intorno I_c di c, ad eccezione al più del punto c;
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$;
- $g'(x) \neq 0$ su tutto $I_c - \{c\}$
- esiste il $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

ma non richiede alcunché riguardo al comportamento di $f(x)$ e $g(x)$ IN c,
dove le due funzioni potrebbero addirittura non essere definite.
Ciò finirebbe per complicarci alquanto la vita, ma (IDEA!) dato che la tesi riguarda
ciò che accade quando x viene FATTO TENDERE a c (e NON ciò che avviene con x UGUALE A c),
potremmo superare l'ostacolo andando a considerare, al posto delle funzioni date $f(x),\ g(x)$,
i loro "prolungamenti per continuità in c", ossia le due funzioni ausiliarie

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & per\ x \neq c \\ 0 & per\ x = c \end{cases}; \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & per\ x \neq c \\ 0 & per\ x = c \end{cases}$$

Nel caso in cui $f(x)$ sia continua in c, cioè si abbia non solo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, ma anche $f(c) = 0$,
la F coincide perfettamente con f; diciamo che questo è il caso in cui l'introduzione della F sarebbe inutile;
se invece $f(x)$ è discontinua in c (perché non è definita in c, oppure perché $f(c)$ è diverso da 0),
la F differisce dalla f esclusivamente per il comportamento in c, ma è del tutto identica a f fuori dall'ascissa c;
in compenso, la F è più "brava" della f perché, oltre a risultare $\lim\limits_{x\to c} F(x) = 0$, è pure $F(c) = 0$.

E le stesse cose si possono affermare riguardo alla G nei confronti della g.

Delle due funzioni F e G possiamo dunque dire che:

- $F(x)$ e $G(x)$ sono definite e continue su tutto I_c e derivabili su tutto $I_c - \{c\}$;
- $\lim\limits_{x\to c} F(x) = \lim\limits_{x\to c} G(x) = 0$ e $F(c) = G(c) = 0$;
- $G'(x) \neq 0$ su tutto $I_c - \{c\}$
- esiste il $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(x)}{G'(x)}$

E se ora riusciremo a dimostrare la tesi con riferimento alla due funzioni "figlie" *F*, *G*, vale a dire:
se riusciremo a far vedere che esiste il $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{F(x)}{G(x)}$ ed è $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(x)}{G'(x)}$,

avremo provato pure la tesi originaria, quella sulle funzioni "madri" *f*, *g*,
in quanto le "figlie" *F* e *G* coincidono perfettamente, al di fuori dell'ascissa c, con le "madri" *f* e *g*.

Consideriamo dunque il rapporto $\dfrac{F(x)}{G(x)}$.

Possiamo scrivere la catena $\dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{F(x)-0}{G(x)-0} = \dfrac{F(x)-F(c)}{G(x)-G(c)}$.

Ora, il teorema di Cauchy, applicato all'intervallo chiuso di estremi c, x
(intervallo che sarà $[c, x]$ oppure $[x, c]$ a seconda che x si trovi a destra o a sinistra di c)
ci assicura che internamente a questo intervallo esiste un'ascissa c_x per la quale $\dfrac{F(x)-F(c)}{G(x)-G(c)} = \dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)}$

(controlla tu con attenzione: le condizioni di applicabilità di Cauchy sono assicurate dall'ipotesi …).

Ricapitolando, per questa ascissa c_x, compresa fra c e x, si ha $\dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \dfrac{F(x)}{G(x)}$.

Ma a questo punto siamo a posto !!! ☺

Sì, perché dato che esiste il $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(x)}{G'(x)}$, essendo c_x compreso fra c e x esisterà pure il $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)}$

e sarà uguale al precedente, ossia varrà l'uguaglianza $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(x)}{G'(x)}$,

da cui $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(x)}{G'(x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{F(x)}{G(x)}$, C.V.D.