ESERCIZI sul Teorema di De l'Hopital

1) Applicando il Teorema di De l'Hopital, verifica che: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{\ln x}=5$

2) Verifica che $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}=3$
a) scomponendo e semplificando (per due volte di seguito)
b) applicando de l'Hopital (per due volte di seguito)

3) Verifica applicando il Teorema di de l'Hopital la correttezza dei limiti seguenti, osservando comunque che per determinarli sarebbe sufficiente, come è ben noto, considerare i gradi dei polinomi in gioco:

a) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}=1$ b) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x}{x^2+x+1}=\pm\infty$ c) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^3+x^2+8x+14}{x^4-x^2+1}=0$

4) Considera i limiti notevoli seguenti (già noti) e ritrova i loro valori applicando de l'Hopital:

a) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1}$ b) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{bx}=\frac{a}{b}}$ c) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{x^2}=\frac{1}{2}}$ d) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{x}=0}$

e) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$ f) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}$ g) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$ h) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$

i) *ESERCIZIO SVOLTO*: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k,\quad k\in\mathbb{R}}$

RISOLUZIONE: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}\underset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{k\cdot(1+x)^{k-1}}{1}=k\cdot 1^{k-1}=k\cdot 1=k$

5) *ESERCIZIO SVOLTO*

Verifica che, per x che tende a zero, sul rapporto di funzioni $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2\,sen\frac{\pi}{x}}{sen\,x}}$ de l'Hospital NON è applicabile perché il rapporto delle derivate non tende ad alcun limite; ciononostante, il limite di $f(x)/g(x)$, per x che tende a zero, esiste (e vale 0).

Questo bel controesempio mostra che De l'Hopital esprime una condizione SUFFICIENTE, MA NON NECESSARIA, per l'esistenza del limite in questione.

RISOLUZIONE: $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\cdot sen\frac{\pi}{x}+\cancel{x^2}\cdot cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{\cancel{x^2}}\right)}{cos\,x}=\frac{2x\cdot sen\frac{\pi}{x}-\pi\cdot cos\frac{\pi}{x}}{cos\,x}$

quindi, in effetti, il rapporto delle derivate non tende ad alcun limite al tendere di x a 0:

$$\frac{\overbrace{\boxed{\underbrace{\boxed{2x}}_{\substack{tende\\ a\ zero}}\cdot\underbrace{\boxed{sen\frac{\pi}{x}}}_{\substack{oscilla\\ fra\ -1\ e\ 1}}}}^{tende\ a\ zero}-\pi\cdot\underbrace{\boxed{cos\frac{\pi}{x}}}_{\substack{oscilla\\ fra\ -1\ e\ 1}}}{\underbrace{\boxed{cos\,x}}_{tende\ a\ 1}}$$

Ed ecco ora, SENZA ovviamente de l'Hopital, il calcolo del limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,sen\frac{\pi}{x}}{sen\,x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{x}{sen\,x}}}_{tende\ a\,1}\cdot\underbrace{\boxed{x}}_{tende\ a\ zero}\cdot\underbrace{\boxed{sen\frac{\pi}{x}}}_{oscilla\ fra\ -1\,e\,1}=0$$

6) Stabilisci se è possibile applicare de l'Hopital alla determinazione del limite seguente: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-sen\,x}{x+sen\,x}$

Verifica, comunque, dividendo per x sia il numeratore che il denominatore, che tale limite vale 1.

7) Verifica, col Teorema di de l'Hopital, i limiti notevoli seguenti:

a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty}$ b) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}=+\infty}$ c) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$

d) *ESERCIZIO SVOLTO:* $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad \forall n=2,3,4,5,\ldots}$

RIS.: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}\underset{H}{=}\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty$

e) *ESERCIZIO SVOLTO:* $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad n=2,3,4,\ldots}$

RIS.: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\overset{\substack{\textit{tende a } 0\\ (es.\,7c)}}{\boxed{\frac{\ln x}{x}}}\cdot\overset{\textit{tende a } 0}{\boxed{\frac{1}{x^{n-1}}}}=0\,.$

In alternativa: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0$

f) *ESERCIZIO SVOLTO:* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^4 x}{x}=0$

RIS. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^4 x}{x}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln^3 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln^3 x}{x}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{12\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12\ln^2 x}{x}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{24\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{24\ln x}{x}\underset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{24\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{24}{x}=0$

8) Servendoti del Teorema di de l'Hopital, calcola i limiti seguenti (risultati in fondo alla pagina):

g) $\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\ldots$ h) $\lim_{x\to-\infty}x^4\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{e^{-x}}=\ldots$ i) $\lim_{x\to0+}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\ldots$

l) $\lim_{x\to4}\frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}=\ldots$ m) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}=\ldots$ n) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-1}{4\sqrt[3]{2x+5}+7}=\ldots$

o) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{\ln\left(3x^2+5x+7\right)}=\ldots$ p) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x+8}}{x^3+x^2+x+1}=\ldots$ q) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(5x+11\right)}{e^{x-4}}=\ldots$

r) $\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{e^x}=\ldots$ s) $\lim_{x\to0+}x\ln^2 x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\ldots$ t) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x-\pi\right)tg\,x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\,x}{\frac{1}{2x-\pi}}=\ldots$

u) $\lim_{x\to0+}x^{\left(x^2\right)}=\lim_{x\to0+}e^{\ln\left[x^{\left(x^2\right)}\right]}=\lim_{x\to0+}e^{x^2\cdot\ln x}=\ldots$ *perché con de l'Hospital si ha* $\lim_{x\to0+}x^2\ln x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\ldots$

v) $\lim_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{1/x}=\ldots$ w) $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\ldots$ z) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)=\ldots$

RISULTATI : g) 0 h) 0 i) 0 l) 192 m) $+\infty$ n) $+\infty$ o) $\pm\infty$ p) $+\infty$ q) 0 r) 0 s) 0
t) 0 u) 1, essendo uguale a 0 il limite dell'esponente v) e^2 w) $1/e$ z) $-1/2$