**De l'Hopital mostra quanto è "FORTE" la funzione ESPONENZIALE**
**e quanto è "DEBOLE" la funzione LOGARITMICA**

a)

Con de l'Hopital si può provare che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ cioè\ \ per\ \ n=1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ ....$$

♥ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}^+_*,\ cioè\ \ per\ \ ogni\ \ \alpha>0$$

Ciò è IMPORTANTISSIMO e può essere condensato nello "slogan":

♥ **la funzione esponenziale tende all'infinito PIU' RAPIDAMENTE di qualsiasi funzione algebrica, comunque alto sia l'esponente di quest'ultima.**

Se anche prendiamo *n* = 1000, o ancora più alto, non riusciremo mai a costruire una funzione algebrica che riesca a competere con l'esponenziale, nella rapidità del tendere a infinito!!!

**"L'ESPONENZIALE VINCE" CONTRO LA FUNZIONE ALGEBRICA!!!**

b)

De l'Hopital permette poi di dimostrare che

♥ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0\quad per\ ogni\ \alpha\in\mathbb{R}^+_*\quad cioè\ \ per\ ogni\ \alpha>0$$

Ciò è IMPORTANTISSIMO e può essere condensato nello "slogan":

♥ **la funzione logaritmica tende all'infinito PIU' LENTAMENTE di qualsiasi funzione algebrica.**

… Non importa se cerchiamo di "indebolire" la funzione algebrica assegnandole esponenti piccoli, come 1/3, 1/10, 1/1000 … il limite precedente, qualunque sia l'esponente $\alpha$, vale sempre zero!

**"IL LOGARITMO PERDE" CONTRO LA FUNZIONE ALGEBRICA!!!**

c)

Dimostra, trasformando opportunamente il prodotto in quoziente per poter poi applicare De l'Hopital, che

$$\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\ \ cioè\ \ per\ \ n=1,2,3,4,...$$

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha e^x=0\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}^+_*\ \ cioè\ \ per\ ogni\ \alpha>0\ \ (effettua\ innanzitutto\ la\ sostituzione\ z=-x\ ...)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\ \ cioè\ \ per\ \ n=1,2,3,4,...$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}^+_*\ \ cioè\ \ per\ ogni\ \alpha>0$$

Questo conferma la "maggior forza" della funzione esponenziale rispetto alla funzione algebrica, anche in un contesto diverso dal precedente.

Qui, nel "tira-e-molla" fra due "forze" contrastanti
(il tendere a zero della funzione esponenziale, che "vorrebbe" far convergere il prodotto a zero,
e il tendere all'infinito della funzione algebrica, che "vorrebbe" far divergere il prodotto all'infinito,
la funzione esponenziale è talmente rapida nel suo tendere a zero, che non si lascia "sconfiggere"
da nessuna funzione algebrica tendente all'infinito,
comunque grande scegliamo l'esponente di quest'ultima nel tentativo di "irrobustirla".

**"L'ESPONENZIALE VINCE" CONTRO LA FUNZIONE ALGEBRICA!!!**

**SLOGAN CONTRO PRECISIONE**

E’ molto utile ricordare gli **slogan**

**“l’esponenziale vince” e “il logaritmo perde”** (nel “conflitto” con ogni funzione algebrica),
**“l’esponenziale è una funzione forte”** (nel suo tendere all’infinito o nel suo tendere a zero),
**“il logaritmo è una funzione debole”** (nel suo tendere all’infinito positivo o negativo),

ma

**GLI SLOGAN DEVONO PIU’ CHE ALTRO COSTITUIRE RICHIAMI DI CARATTERE GENERALE, DA INSERIRE POI IN UN CONTESTO PRECISO.**

**In che senso** “l’esponenziale vince”? …
Nel senso PRECISO espresso dalle relazioni viste alla pagina precedente:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \quad per\ ogni\ \alpha>0$ con la sua conseguenza $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$

$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0 \quad per\ \ n=1,2,3,4,\ldots$ con la sua generalizzazione $\lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha e^x=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$

$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0 \quad per\ \ n=1,2,3,4,\ldots$ con la sua generalizzazione $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x}=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$

Sarebbe **SBAGLIATISSIMO**, ad esempio, di fronte al limite $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}$ (forma [0/0])

affermare che, siccome l’esponenziale vince sulla funzione algebrica, tale limite è zero
(in effetti, sappiamo invece che vale 1).
**NON E’ IN QUESTO CONTESTO** che l’esponenziale “vince” sulla funzione algebrica!!!

E discorso analogo vale per il logaritmo.

**RISCOPRIAMO I LIMITI NOTEVOLI**

Come abbiamo avuto modo di constatare nel corso di questo capitolo,
molti fra i famosi “limiti notevoli”, la cui determinazione era stata a suo tempo in alcuni casi faticosa,
possono a questo punto essere ricostruiti facilmente grazie al buon de l’Hopital.
Ecco qui un quadro riassuntivo generale:

| | |
|---|---|
| $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \quad per\ ogni\ \alpha>0$ | $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$ |
| $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$ | $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x}=+\infty \quad per\ ogni\ \alpha>0$ |
| $\lim_{x\to-\infty}\lvert x\rvert^\alpha e^x=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$ | $\lim_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$ |
| $\lim_{x\to0+}x^\alpha\ln x=0 \quad per\ ogni\ \alpha>0$ | |
| $\lim_{x\to0}\frac{sen\ x}{x}=1$ | $\lim_{x\to0}\frac{sen\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$ |
| $\lim_{x\to0}\frac{1-cos\,x}{x^2}=\frac{1}{2}$ | $\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x}=0$ |
| $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ | $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ |
| $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ | $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ |
| $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k,\quad k\in\mathbb{R}$ | $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$ |
| $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha}=+\infty \qquad \forall\alpha,\beta>0$ | $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}=0 \quad \forall\alpha,\beta>0$ |