1.5 IL " CRITERIO SUFFICIENTE DI DERIVABILITA' "

Supponiamo di sapere che una certa funzione f è derivabile su tutto un intorno I_{x_0} di un'ascissa x_0, privato di x_0 (NOTA).

Supponiamo inoltre che la funzione f sia continua in x_0 (occhio! quest'ipotesi è indispensabile!).

NOTA
Voglio dire: IN x_0 noi non sappiamo ancora se la funzione sia o non sia derivabile; però all'immediata sinistra e alla immediata destra di x_0 certamente lo è.

Bene. Se adesso esiste il $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L \in \mathbb{R}$, allora esisterà pure $f'(x_0)$ e sarà uguale a L,

ossia si avrà pure $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$ (se si preferisce, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L$)

Il teorema vale non solo se L (come abbiamo sopra supposto) è un valore finito ($L \in \mathbb{R}$), ma anche se L è uguale a $+\infty$ o $-\infty$;
in quest'ultimo caso, la tesi è che la f ha in x_0 "derivata infinita",
cioè che il limite del rapporto incrementale in x_0, quando l' incremento tende a 0, è $+\infty$ o $-\infty$.

Questo importante teorema viene chiamato "**Criterio sufficiente di derivabilità**",
o, più sbrigativamente, **"Criterio di derivabilità"**.
Schematizziamone e poi analizziamone l'enunciato:

CRITERIO (SUFFICIENTE) DI DERIVABILITA'

Ipotesi
- f **derivabile su tutto** $I_{x_0} - \{x_0\}$
- f **continua in** x_0
- **esiste il** $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$ (**L finito o infinito**)

Tesi

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$, **ossia:**

se L è finito, esiste la derivata di f $\boxed{\text{IN}}$ x_0, ed è uguale a L $\left(\exists f'(x_0) = L\right)$,

se L è infinito, f ha $\boxed{\text{IN}}$ x_0 derivata infinita

Osservazioni

a) Quando il limite del rapporto incrementale è infinito, si dice, indifferentemente, che
I) "la funzione non è derivabile in quel punto" e che II) "la funzione ha derivata infinita in quel punto".
La contraddizione, in termini linguistici, è evidente e molto fastidiosa, ma è entrata nell'uso (non senza le sue buone ragioni) per cui ci rassegneremo ad accettarla.

b) ♥ **Il teorema è molto interessante. A partire da certe ipotesi sul comportamento di f e della sua derivata $\boxed{\text{IN UN INTORNO DI } x_0}$, consente di trarre conclusioni sulla derivata $\boxed{\text{IN } x_0}$.**

c) Il teorema varrebbe anche limitandosi a considerare solo un intorno sinistro (o solo un intorno destro) di x_0.
La tesi riguarderebbe in questo caso una derivata UNILATERALE.

Dimostrazione

Prendiamo un'ascissa x prossima a x_0 (contenuta nell'intorno di x_0 menzionato dall'ipotesi) e consideriamo l'intervallo chiuso di estremi x_0 e x
(si tratterà di $[x_0, x]$ oppure di $[x, x_0]$ a seconda che x si trovi a destra o a sinistra di x_0).

Poiché l'ipotesi ci assicura che f è continua in x_0 e derivabile in tutti i punti compresi fra x_0 (escluso) e x (incluso), all'intervallo in questione sarà lecito applicare il teorema di Lagrange.

Questo stabilisce l'esistenza di un punto c_x compreso strettamente fra x_0 e x, per il quale si ha

(1) $f'(c_x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

NOTA: il simbolo c_x è stato scelto per sottolineare la dipendenza di questo punto dall'ascissa x

Ma l'ipotesi afferma anche che esiste il $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Essendo c_x compreso fra x_0 e x, sarà allora anche $\lim\limits_{x \to x_0} f'(c_x) = L$ e quindi, per la (1),

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L .$$

La tesi è così dimostrata.

Esempio 1

Consideriamo la funzione $f(x)=\begin{cases} x\ln x & per\ x>0 \\ 0 & per\ x=0 \end{cases}$

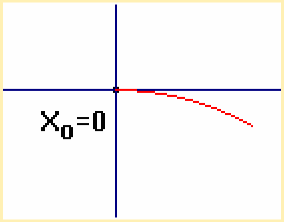
Si tratta, in pratica, della funzione $y = x\ln x$,

della quale si sa (vedi il capitolo su De l'Hospital) che $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0^-$,

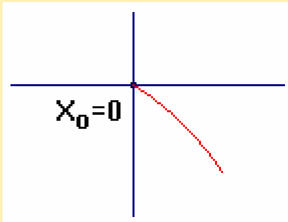
"*prolungata per continuità*" nell'origine.

Il grafico di questa funzione "nasce" dunque dall'origine, ma …
con quale pendenza si proietta fuori dall'origine?

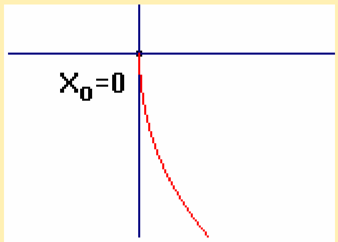
… così? …
(fig. 1)



… o forse così …??
(fig. 2)



… o, chissà, magari così !?! …
(fig. 3)



Per rispondere a questa domanda, noi **dovremmo calcolare la derivata $f'(0)$ (ammesso che esista).**
Il guaio è che, data la particolare definizione "per casi",
non possiamo effettuare il calcolo di questa derivata **applicando una formula,**
ma siamo costretti a svolgerlo scrivendo il rapporto incrementale in $x_0 = 0$:

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\ln x-0}{x-0}=\frac{x\ln x}{x}=\ln x}$$

e facendo poi tendere x a $x_0 = 0$
(precisamente, dato che la nostra funzione non esiste per $x<0$, facendo poi tendere x a 0^+).

Si vede immediatamente che il limite del rapporto incrementale considerato è $-\infty$:
perciò in definitiva possiamo dire che

$$\boxed{f'(0)=-\infty}$$

e abbiamo così stabilito che **$f(x)$ si affaccia fuori dall'origine con "discesa infinita"** (come in fig. 3, quindi!)

A questa conclusione, però, avremmo potuto anche pervenire in un modo diverso e più comodo, utilizzando il nostro bravo "Criterio di derivabilità".

Vediamo.
Fin dall'inizio noi sapevamo che la funzione $f(x)$ (continua nell'origine)
era derivabile nei punti a destra dell'origine. Tale derivata valeva

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x\ln x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1 \qquad (x\neq 0).$$

Facciamo tendere ora x a zero (precisamente, a 0^+): avremo

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} f'(x)=\lim_{x\to 0+}(\ln x+1)=-\infty}$$

il che ci assicura, per il Criterio di derivabilità appunto, che

$$\boxed{f'(0)=-\infty \quad \left(più\ \ precisamente: f'_+(0)=-\infty\right)}\,.$$

In questo modo, il procedimento di determinazione della derivata in 0 è più facile, **è più comodo e veloce**.

E' di norma **più agevole**, **o più rapido**, stabilire il valore della derivata *in* un punto x_0
calcolando $f'(x)$ *fuori* da x_0 e poi *facendo tendere* x *a* x_0,
piuttosto che attraverso la costruzione diretta del rapporto incrementale in x_0.

Può esserci **davvero utile**, dunque, questo teorema chiamato "**Criterio di derivabilità**" !

❑ **Esempio 2**

La funzione $\boxed{g(x)=1-\sqrt[3]{x^2}=1-x^{2/3}}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

Essa ha per derivata $\boxed{g'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$

ma **questa derivata, contrariamente alla funzione, NON è definita in $x_0=0$.**
Con quale inclinazione la funzione confluisce nel punto di ascissa 0 ?

Se noi andiamo a calcolare i due limiti di $g'(x)$,
al tendere di x a zero da sinistra e, rispettivamente, da destra, troveremo:

$$\boxed{\lim_{x\to 0-} g'(x)=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0+} g'(x)=-\infty}$$

Applicando il **Criterio di Derivabilità**, possiamo allora dire che

$$\boxed{g'_-(x_0)=+\infty, \quad g'_+(x_0)=-\infty}:$$

cioè che, se si andasse a scrivere il rapporto incrementale in $x_0=0$
e si facesse poi tendere a zero l'incremento,
si troverebbe come limite sinistro del rapporto incrementale $+\infty$ e come limite destro $-\infty$.
Verifichiamo questo fatto **operando direttamente sul rapporto incrementale:**

$$\boxed{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{(1-\sqrt[3]{x^2})-1}{x}=-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=-\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}$$

da cui, appunto,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0-}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=-\infty}$$

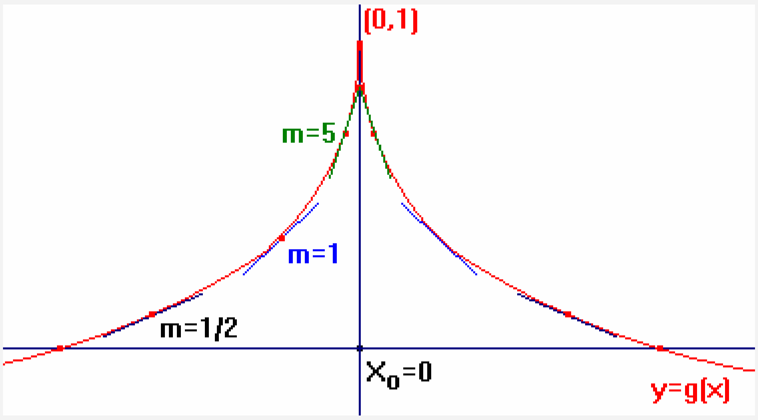
ovvero:

$$\boxed{g'_-(x_0)=+\infty, \quad g'_+(x_0)=-\infty}$$

D'altronde, dopo aver constatato che $\boxed{\lim_{x\to 0-} g'(x)=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0+} g'(x)=-\infty}$,

cosa avremmo potuto dedurre, intuitivamente, riguardo al grafico della funzione?

Dunque …
al tendere di x a zero da sinistra,
le rette tangenti alla curva $y=g(x)$
assumono inclinazioni
in salita sempre più ripida …
mentre al tendere di x a zero da destra,
le tangenti presentano inclinazioni
in discesa sempre più ripida…
ma allora il grafico, tenuto conto anche
della continuità in $x_0=0$,
non può essere altro che
del tipo raffigurato qui a fianco!



E cosa ci dice ora il disegno riguardo alla pendenza IN x_0?
Evidentemente, ci dice che la curva confluisce (da sinistra) nel punto $(x_0, g(x_0))$, in salita verticale (= in salita infinita), ed esce (verso destra) dallo stesso punto in discesa verticale (= in discesa infinita).
Insomma, dalla conoscenza del comportamento della pendenza della curva IN PROSSIMITA' DI x_0
(e tenendo presente anche il fatto che la funzione, come sappiamo, è continua in x_0),
era intuitivo che si potesse dedurre la pendenza della curva IN x_0.

Il carattere intuitivo di previsioni di questo tipo induce parecchi testi a ignorare completamente il Criterio di Derivabilità, facendo passare per "ovvie" le conclusioni che da esso dipendono …
tuttavia, "salti logici" di tal tipo nella sistemazione teorica comportano una rinuncia al rigore di questa.

❑ **Esempio 3 (CONTROesempio: qui il Criterio di derivabilità non sarà applicabile)**

Consideriamo la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2\,sen\dfrac{\pi}{x} & per\ \ x\neq 0 \\ 0 & per\ \ x=0 \end{cases}$$

e **chiediamoci se è derivabile nell'origine.**

La funzione **è continua nell'origine** perché, come facilmente si dimostra, $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.

Fuori dall'origine, la derivata esiste e vale

$$f\,'(x)=2x\cdot sen\frac{\pi}{x}+x^2\cdot cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)=2x\cdot sen\frac{\pi}{x}-\pi\cdot cos\frac{\pi}{x}$$

Ora, **se esistesse** il

$$\lim_{x\to 0} f\,'(x)\ ,$$

saremmo nelle condizioni di applicare il Criterio di derivabilità.

Sennonché, tale limite non esiste!

Infatti, dei due addendi $2x\cdot sen\dfrac{\pi}{x}$ e $-\pi\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}$,

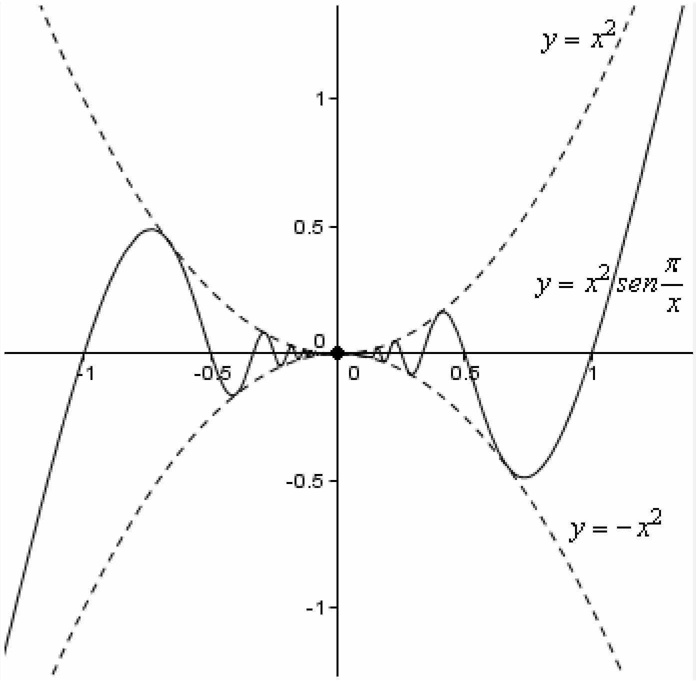
il primo tende a zero, ma il secondo oscilla fra $-\pi$ e π in qualsiasi intorno di $x=0$.

Pertanto **IL CRITERIO DI DERIVABILITA' NON E' APPLICABILE.**

Per rispondere al quesito che ci eravamo posti (**la funzione è derivabile nell'origine, o no?**) **dovremo per forza ricorrere al rapporto incrementale**:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2 sen\dfrac{\pi}{x}-0}{x-0}=x\cdot sen\frac{\pi}{x}$$

Poiché tale rapporto incrementale, al tendere di x a $x_0=0$, tende a zero,
potremo in definitiva affermare che *la derivata nell'origine esiste ed è nulla*.



Ecco il grafico della funzione:
essendo

$$-1\le sent\le 1\qquad \forall t$$

si ha

$$-x^2\le x^2 sen\frac{\pi}{x}\le x^2\qquad \forall x$$

per cui il grafico della $y=f(x)$
si mantiene compreso
fra i grafici delle due parabole

$$y=-x^2\quad e\quad y=x^2 .$$

Ciò permette
di comprendere molto bene
il motivo per cui
la derivata nell'origine
esiste ed è nulla.