2.6 CUSPIDI, PUNTI ANGOLOSI

Invece nel caso della figura 10 qui a fianco non si parla di “flesso”, bensì di “cuspide”.
La funzione diagrammata è $f(x)=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$
La curva è tangente in $(1,\ 2)$ alla retta verticale $x=1$.

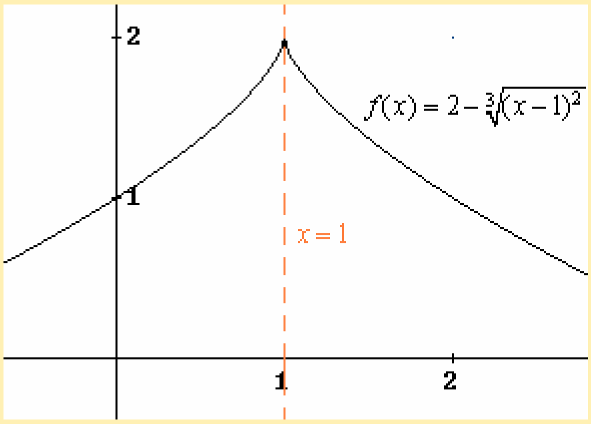
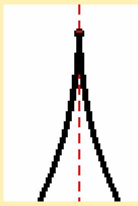


Fig. 10: una cuspide (vedi particolare qui sotto)



← Particolare del grafico di fig. 10

Come descriveremo dunque una "cuspide"?
Una “**cuspide**” è un **punto $(x_0,\ f(x_0))$**
in cui la funzione è continua, e non è derivabile, ma è tale che la derivata sinistra e la derivata destra valgono una $\pm\infty$, l'altra $\mp\infty$:

$$f'_-(x_0)=\pm\infty,\quad f'_+(x_0)=\mp\infty$$

… in altre parole,
il rapporto incrementale sinistro in x_0 e il rapporto incrementale destro in x_0 tendono, al tendere a zero dell’incremento, uno a $\pm\infty$, l'altro a $\mp\infty$:

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty,\quad \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\mp\infty$$

Una "cuspide" può essere considerata come un caso particolare di "punto angoloso".

Nella figura 11 qui a fianco, dove è rappresentata la funzione $y=\left|x^2-1\right|$, puoi osservare *due* punti angolosi, di ascisse -1 e $+1$ rispettivamente.

Si dice "**punto angoloso**"
un punto in cui la funzione è continua ma derivata sinistra e destra sono diverse fra loro (una o entrambe possono anche essere infinite).

Per esercizio, con riferimento alla fig. 11, verifica che le due semirette tangenti nel punto (1,0) hanno coefficienti angolari -2 e 2.

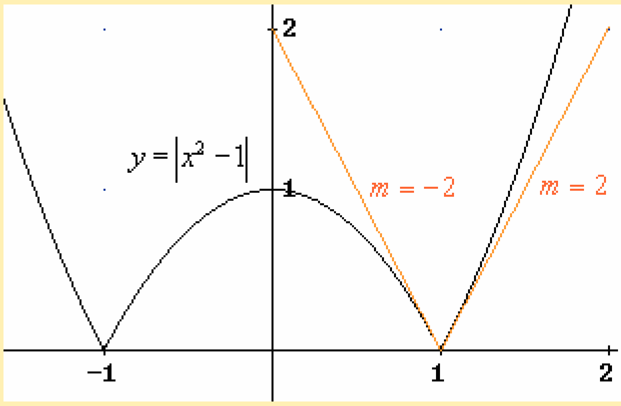


Fig. 11: due punti angolosi

Esercizio 1

Verifica che la funzione $\sqrt[5]{x^4}$ ha una cuspide per $x=0$, mentre $\sqrt[5]{x^3}$ ha per $x=0$ un flesso verticale.

Esercizio 2

Verifica che la funzione $g(x)=x^2+ax+b|x|$ *presenta, nell’origine, un punto angoloso nel quale l’ampiezza dell’angolo formato dalle due semitangenti può essere modulata a piacere assegnando valori opportuni ai due parametri a, b.*

Esercizio 3

Spiega perché la funzione $h(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{|x|}+ax$ *presenta nell’origine un punto angoloso in cui una delle due semitangenti è verticale.*

Dimostra inoltre che l’angolo (assoluto) γ *formato dalle due semitangenti è tale che* $tg\,\gamma=\dfrac{1}{|a|}$ *(NOTA)*

NOTA. - Ricordiamo che:

- L’angolo α che una retta $r:\ y=mx+q$ forma con l’asse orientato delle x è tale che $tg\,\alpha=m$
- Per calcolare l’angolo γ formato dalle due rette $r:\ y=mx+q,\quad r':\ y=m'x+q'$ si applica una delle due formule seguenti:

♪ $tg\,\gamma=\dfrac{m-m'}{1+mm'}$ se ci interessa un angolo “**orientato**” (strettamente compreso fra $-90°$ e $+90°$)

L’ “angolo orientato” è qui l’angolo di cui deve ruotare la retta r’, per sovrapporsi alla r con la rotazione *più breve possibile*, preso con segno:
- positivo se la rotazione più breve è quella che avviene in senso antiorario,
- negativo se in senso orario

♫ $tg\,\gamma=\left|\dfrac{m-m'}{1+mm'}\right|$ se vogliamo l’angolo “**assoluto**” (=senza segno)