

## 2.7 PUNTI STAZIONARI

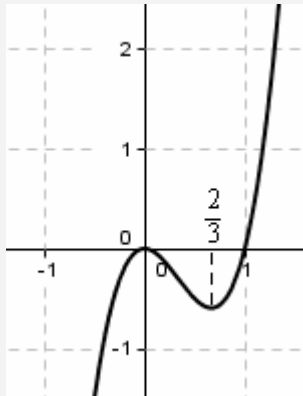
Data una funzione  $y = f(x)$ , si dice che  $x_0$  è un "punto stazionario" della  $f$  se  $f'(x_0) = 0$ .

**I punti stazionari di una funzione sono dunque quelli nei quali la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale (NOTA).**

*NOTA: scrivo spesso, per comodità, "orizzontale", quando a rigore dovrei scrivere "parallela all'asse delle ascisse": in effetti, di norma (anche se non sempre) l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto al lettore.*

Se  $x_0$  è un punto stazionario, allora può essere:

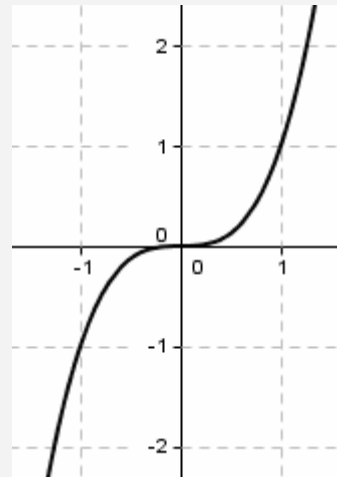
- un punto di **massimo o di minimo relativo** (cioè, un estremo relativo): fig. 12a
- oppure un **flesso a tangente orizzontale**: fig. 12b
- oppure ancora (**caso raro**) può darsi che non sia **né un estremo né un flesso**: fig. 12c



$$y = 4x^3 - 4x^2$$

Punti stazionari:  
 $x = 0$  (**massimo relativo**),  
 $x = 2/3$  (**minimo relativo**)

fig. 12°



$$y = x^3$$

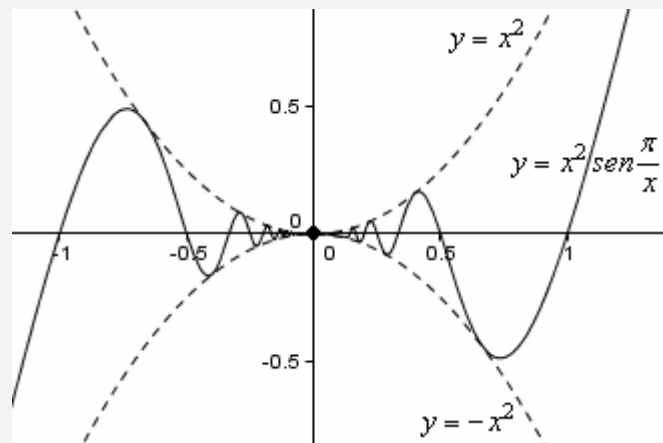
Punto stazionario:  
 $x = 0$  (**flesso orizzontale**)

fig. 12b

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Fig. 12c

Punto stazionario:  $x = 0$   
 (non è né di massimo,  
 né di minimo,  
 né di flesso)



**I punti stazionari di una funzione si ricercano**

**ricavando la derivata prima  $f'(x)$  e quindi risolvendo l'equazione  $f'(x) = 0$ .**

**Poi, naturalmente, occorrerà stabilire, per ciascun punto stazionario, se si tratti di un punto di massimo, di un punto di minimo, di un punto di flesso orizzontale oppure (caso raro) nessuna delle eventualità precedenti.**

**I teoremi che seguono sono finalizzati appunto a questa analisi dei punti stazionari.**

□ **Lemma 1**

Se una funzione  $f$  è crescente su  $(a, x_0)$  e decrescente su  $(x_0, b)$  e inoltre è continua in  $x_0$ , allora il punto  $x_0$  è di massimo relativo forte per la funzione.

Se  $f$  è decrescente su  $(a, x_0)$  e crescente su  $(x_0, b)$  e inoltre è continua in  $x_0$ , allora il punto  $x_0$  è di minimo relativo forte per  $f$ .

**Osservazione 1**

Notare come sia indispensabile l'ipotesi di continuità in  $x_0$ .

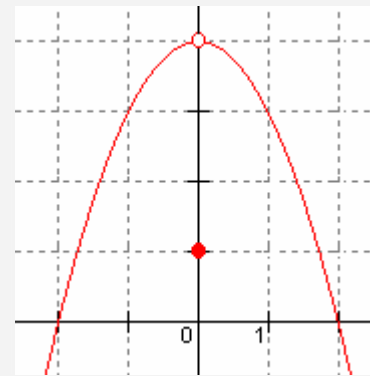
Prendiamo, come controesempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

(parabola col "buco": fig. 13 qui a fianco).

L'ascissa  $x_0 = 0$  NON È di massimo relativo, sebbene  $f(x)$  sia crescente a sinistra di  $x_0$  e decrescente a destra.

Il Lemma non è applicabile per via della discontinuità in  $x_0$ .



**Fig. 13**

**Osservazione 2**

L'enunciato **non è banale**, per il fatto che gli intervalli sono supposti APERTI.

Se si fosse scritto  $[a, x_0]$  e  $[x_0, b]$  al posto di  $(a, x_0)$  e  $(x_0, b)$

si sarebbe ottenuta una proposizione ancora vera, ma del tutto ovvia!

Invece gli intervalli sono aperti ... il punto  $x_0$  è "tagliato fuori" da questi intervalli ...

... e allora è **indispensabile** l'ipotesi di continuità della funzione in  $x_0$

per "saldare" il comportamento in  $x_0$  al comportamento in **prossimità di**  $x_0$ , e assicurare la verità della tesi.

**Dimostrazione del Lemma 1**

Si effettua ricorrendo al concetto di "estremo superiore"

e applicando il "Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone". Dunque:

1.

$f$  è crescente su  $(a, x_0)$  ed è continua in  $x_0$ .

La continuità in  $x_0$  significa che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

D'altra parte, applicando sull'intervallo  $(a, x_0)$  il "Teor. di esistenza del limite delle funzioni monotone", possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$$

Confrontando le due uguaglianze appena scritte,

si trae  $f(x_0) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$

e da ciò discende, tenendo conto anche del carattere *strettamente* crescente della  $f$  su  $(a, x_0)$ , che,  $\forall x \in (a, x_0)$ , si ha  $f(x) < f(x_0)$ .

**NOTA 1**

Abbiamo scritto la disug. STRETTA in quanto:

se, per assurdo, un  $\bar{x} \in (a, x_0)$  fosse tale che  $f(\bar{x}) = f(x_0)$ , allora nell'intervallo  $(\bar{x}, x_0)$  la  $f(x)$ , essendo strettamente crescente su tutto  $(a, x_0)$ , assumerebbe valori maggiori di  $f(x_0)$ ; ma ciò è incompatibile col fatto che  $f(x_0) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$

2.

$f$  è decrescente su  $(x_0, b)$  ed è continua in  $x_0$ .

La continuità in  $x_0$  significa che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

D'altra parte, applicando sull'intervallo  $(x_0, b)$  il "Teor. di esistenza del limite delle funzioni monotone", possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$$

Confrontando le due uguaglianze appena scritte,

si trae  $f(x_0) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$

e da ciò discende, tenendo conto anche del carattere *strettamente* decrescente della  $f$  su  $(x_0, b)$ , che,  $\forall x \in (x_0, b)$ , si ha  $f(x) < f(x_0)$ .

**NOTA 2**

Abbiamo scritto la disug. STRETTA in quanto:

se, per assurdo, un  $\bar{x} \in (x_0, b)$  fosse tale che  $f(\bar{x}) = f(x_0)$ , allora nell'intervallo  $(x_0, \bar{x})$  la  $f(x)$ , essendo strettamente decrescente su tutto  $(x_0, b)$ , assumerebbe valori maggiori di  $f(x_0)$ ; ma ciò è incompatibile col fatto che  $f(x_0) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$

3. Perciò, in definitiva, per ogni  $x$  di  $(a, b)$  distinto da  $x_0$  è  $f(x) < f(x_0)$  quindi  $x_0$  è di massimo relativo forte per la funzione, C.V.D.