2.9 RICERCA DEI PUNTI DI MASSIMO, DI MINIMO E DI FLESSO ORIZZONTALE COL METODO DELLA DERIVATA SECONDA (O DELLE DERIVATE SUCCESSIVE)

- **Teorema 7**

  Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile tante volte quanto occorra; (NOTA 1)
  supponiamo che $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ (x_0 punto stazionario). (NOTA 2)

  Allora:

  - **se** $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, $\boldsymbol{x_0}$ **è un punto di minimo relativo;**
  - **se** $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$, $\boldsymbol{x_0}$ **è un punto di massimo relativo;**
  - **se** $\boldsymbol{f''(x_0) = 0}$, **nulla si può dire**, per ora, intorno alla natura del punto stazionario x_0;
    ma, in questo caso, si calcolino le derivate successive $\boldsymbol{f'''(x_0),\ f^{IV}(x_0),\ f^{V}(x_0)\ \ldots}$,
    fino a trovare *la prima* di queste derivate che sia *diversa da 0*:
    $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) \neq 0}$.
    A questo punto:
    - **se *n* è pari**, allora $\boldsymbol{x_0}$ **è un punto di minimo o di massimo relativo**, e precisamente:
      a) x_0 è un punto di **minimo se** $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) > 0}$
      b) x_0 è un punto di **massimo se** $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) < 0}$
    - **se *n* è dispari, allora** $\boldsymbol{x_0}$ **è un punto di flesso a tangente orizzontale**, e precisamente:
      a) x_0 è un punto di flesso orizzontale **ascendente se** $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) > 0}$
      b) x_0 è un punto di flesso orizzontale **discendente se** $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) < 0}$

OSSERVAZIONE
Nell'enunciato, "massimo" e "minimo" sono da intendersi come "massimo forte" e "minimo forte".

NOTA 1

Esprimendomi in questo modo, voglio dire: l'enunciato riassume diverse possibili situazioni;
non è perciò conveniente formulare un'unica ipotesi che valga nella totalità dei casi prospettati,
perché poi, quando si va a prendere un caso specifico, tale ipotesi sarebbe inutilmente sovrabbondante;
sottintenderemo invece che, qualora nell'enunciato venga chiamata in causa la derivata di un certo ordine,
in un certo punto, la derivata in questione esista effettivamente in quel punto.
Tutto molto ovvio e ragionevole, niente di speciale!

NOTA 2

Occorre, qui e altrove, tener presente che **l'esistenza della derivata** $\boldsymbol{f'}$ **in un punto** $\boldsymbol{x_0}$
comporta necessariamente l'esistenza della funzione $\boldsymbol{f(x)}$ **in tutto un intorno di** $\boldsymbol{x_0}$.
E allo stesso modo, se nell'enunciato si suppone l'esistenza di $f^{(k)}(x_0)$,
derivata di ordine *k* calcolata nel punto x_0,
allora ciò presuppone l'esistenza della derivata di ordine immediatamente inferiore, $f^{(k-1)}(x)$,
in tutto un intorno di x_0.

***Dimostrazione* del teorema 7**

PRIMA PARTE

Supponiamo che $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$. Vogliamo dimostrare che x_0 è punto di minimo relativo.

Osservazione: abbiamo già sottolineato che l'esistenza di $f''(x_0)$ presuppone l'esistenza di $f'(x)$ in tutto un intorno di x_0; invece la derivata seconda potrebbe anche esistere esclusivamente nel punto x_0, sebbene il caso di gran lunga più comune sia che esista anch' essa in tutto un intorno di x_0.

Dunque:
se $f''(x_0)>0$, allora $f'(x)$ è crescente in x_0 (ricordiamo che la f'' non è altro che la derivata della f');
ma essendo $f'(x_0)=0$, sarà quindi $f'(x)<0$ per $x<x_0$, e $f'(x)>0$ per $x>x_0$.
Pertanto la funzione f è decrescente a sinistra di x_0, e crescente alla destra di x_0 (NOTA)
f è anche continua in x_0 (infatti è derivabile in x_0),
quindi possiamo concludere che x_0 è punto di minimo relativo (Lemma 1, o, volendo, Teorema 6 oppure 6')

Non sto, per ovvie ragioni, a scrivere la dimostrazione nel caso $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$
(qui la tesi è che x_0 sia punto di massimo relativo):
essa sarebbe perfettamente speculare a quella appena conclusa.

NOTA - In questo e in molti altri casi, quando scrivo "a sinistra di x_0", "a destra di x_0",
oppure, come nella riga sopra, "per $x<x_0$", "per $x>x_0$",
il lettore deve comunque capire che sto usando, per brevità, dei modi di esprimermi "condensati":
per la precisione dovrei dire "esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale
avviene che: a sinistra di x_0 ovvero se $x<x_0$ ecc. ecc. e a destra di x_0 ovvero se $x>x_0$ ecc. ecc."
Così scrivendo, però, l'esposizione si sfilaccerebbe un po' troppo,
da cui la scelta di locuzioni brevi, che poi chi legge interpreterà convenientemente.

SECONDA PARTE

Sia ora $f'(x_0)=0$ e anche $f''(x_0)=0$. Supponiamo che sia $f'''(x_0)=f^{IV}(x_0)=0$ ed $f^{V}(x_0)>0$.
Sto considerando un caso particolare, per fissare le idee; tuttavia, dal modo in cui svolgerò la dimostrazione in questo caso particolare, si capirà come potrebbe essere svolta in altri casi particolari, e sarà a quel punto evidente la possibilità di formulare una dimostrazione di carattere generale (non riportata in queste pagine).

Sappiamo che $\boldsymbol{f^{V}(x_0)>0}$. Quindi la $\boldsymbol{f^{IV}(x)}$ è crescente in x_0.

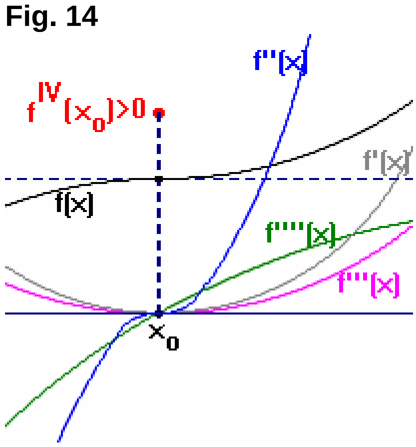
Ma $\boldsymbol{f^{IV}(x_0)=0}$.
Quindi $\boldsymbol{f^{IV}(x)}$ è negativa a sinistra di x_0, positiva a destra di x_0.
Quindi $\boldsymbol{f'''(x)}$ è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0.

Ma $\boldsymbol{f'''(x_0)=0}$.
Quindi $\boldsymbol{f'''(x)}$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0.
Quindi $\boldsymbol{f''(x)}$ è crescente sia a sinistra che a destra di x_0.

Ma $\boldsymbol{f''(x_0)=0}$.
Quindi $\boldsymbol{f''(x)}$ è negativa a sinistra di x_0, positiva a destra di x_0.
Quindi $f'(x)$ è decrescente a sinistra di x_0, crescente a destra di x_0.

Ma $\boldsymbol{f'(x_0)=0}$.
Quindi $f'(x)$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0.
Quindi $\boldsymbol{f(x)}$ è crescente sia a sinistra che a destra di x_0.

Fig. 14



Pertanto il punto stazionario x_0 è di flesso ascendente.

Esercizi utilissimi.

- Per ripassare in modo molto efficace le dimostrazione della SECONDA PARTE del Teorema, ricostruisci passo a passo la figura 14, disegnando i grafici delle le funzioni $f^{V}, f^{IV}, f''', f'', f', f$ **uno dopo l'altro in sequenza**, coerentemente con le ipotesi fatte sulle derivate successive della funzione.
- Noi abbiamo, per fissare le idee, supposto che la prima derivata a non annullarsi in x_0 fosse la derivata quinta, e fosse positiva; come esercizio molto istruttivo, passa a considerare qualche altro caso, immaginando ad es. che la prima derivata a non annullarsi sia la derivata quarta e sia negativa…
con l' aiuto di una figura costruita passo a passo, dimostra la tesi corrispondente.