2.10 CONCAVITA' DI UNA CURVA IN UN PUNTO

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in un punto x_0.
Allora, la curva grafico della funzione ammette retta tangente, non verticale, nel punto P_0 di ascissa x_0.
Tale retta tangente ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Definizione:

Se esiste un intorno completo di x_0
per ogni x del quale, escluso x_0,
la curva sta AL DI SOPRA DELLA TANGENTE in P_0,
allora si dirà che la curva stessa ha, in P_0,
"la CONCAVITA' RIVOLTA VERSO L'ALTO".

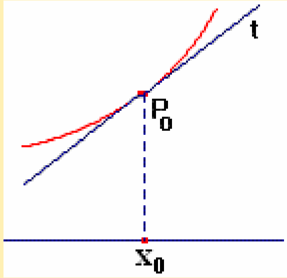

Fig. 15a

Definizione:

Se esiste un intorno completo di x_0
per ogni x del quale, escluso x_0,
la curva sta AL DI SOTTO DELLA TANGENTE in P_0,
allora si dirà che la curva stessa ha, in P_0,
"la CONCAVITA' RIVOLTA VERSO IL BASSO".

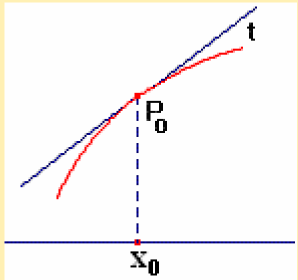

Fig. 15b

A volte, per brevità,
anziché dire: " f ha la concavità rivolta verso l'alto in x_0 ", diremo: " f *è convessa* in x_0 "
e anziché dire: " f ha la concavità rivolta verso il basso in x_0 " diremo: " f *è concava* in x_0 "

Si dice poi che una funzione f ha la concavità rivolta verso l'alto (verso il basso) **in un intervallo *I***,
se f ha la concavità rivolta verso l'alto (verso il basso) **in ogni punto di *I***.

❑ **Teorema 8**

♪ Se è $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, allora la funzione ha, in x_0, la **concavità rivolta verso l'alto**;

♫ se è $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$, allora la funzione ha, in x_0, la **concavità rivolta verso il basso**.

Insomma:

♪ **laddove la derivata seconda è positiva, la concavità è rivolta verso l'alto;**

♫ **laddove la derivata seconda è negativa, la concavità è rivolta verso il basso**

(ricordiamo che l'esistenza della y'' in un punto presuppone l'esistenza della y' in quel punto, anzi: addirittura in tutto un intorno del punto considerato).

Giustificazione con l'intuizione geometrica del teorema 8

Poiché la f'' non è altro che la derivata della f',
se la $f''(x_0)$ è >0, allora la f' è crescente in x_0;
ora, si capisce che
se il coefficiente angolare della tangente alla curva
cresce quando si attraversa l'ascissa x_0,
la funzione è obbligata ad avere la concavità
rivolta verso l'alto (vedi figura qui a fianco).

Analogamente, se fosse $f''(x_0) < 0$ ...

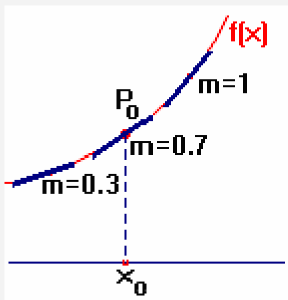

Fig. 16

Tuttavia, la considerazione intuitiva di carattere geometrico appena fatta non può pretendere di costituire una dimostrazione rigorosa dell'enunciato. Vediamo qui di seguito tale dimostrazione.

Dimostrazione del teorema 8

Supponiamo $f''(x_0) > 0$.
Vogliamo dimostrare che f ha, in x_0, la concavità rivolta verso l'alto.

Dovremo allora far vedere che, in un intorno di x_0 escluso x_0,
il grafico della funzione sta *al di sopra* della retta ad esso tangente in $(x_0, f(x_0))$.

L'equazione di tale retta tangente è
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$
ossia
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
Si tratterà dunque di provare che,
in un intorno di x_0 escluso x_0, la differenza
$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right]$$
è > 0.

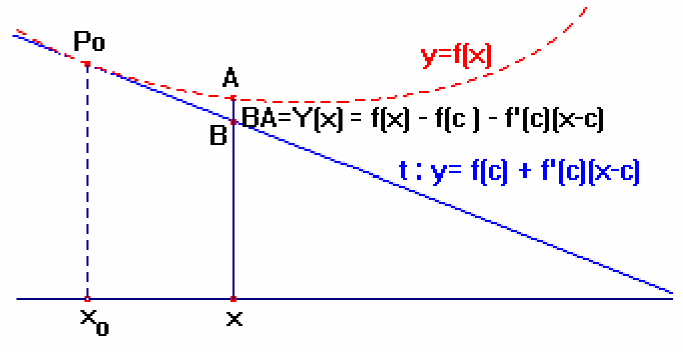

Fig. 17

Indichiamo con $Y(x)$ questa differenza:
$$Y(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right]$$
Avremo:
$$Y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad \textit{da cui} \quad Y(x_0) = 0;$$
$$Y'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \textit{da cui} \quad Y'(x_0) = 0;$$
$$Y''(x) = f''(x) \quad \textit{da cui} \quad Y''(x_0) = f''(x_0)$$

Essendo $f''(x_0) > 0$, sarà dunque $Y''(x_0) > 0$,
ed essendo $Y'(x_0) = 0$ (x_0 punto stazionario per Y),
x_0 sarà punto di minimo forte per Y (teorema 7).
Ora, essendo $Y(x_0) = 0$ e x_0 punto di minimo forte per Y,
in un intorno di x_0, escluso x_0, sarà $Y(x) > 0$,
come volevasi dimostrare (NOTA).

Analoga è la dimostrazione del teorema nel caso $f''(x_0) < 0$
(caso nel quale la tesi è che f *abbia, in* x_0*, la concavità rivolta verso il basso)*

NOTA

Si può anche evitare di citare il precedente teorema 7.
Basta ragionare così: Essendo $f''(x_0) > 0$, è pure $Y''(x_0) > 0$.
Ma allora $Y'(x)$ è crescente in x_0; ed essendo $Y'(x_0) = 0$,
$Y'(x)$ sarà negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra;
pertanto $Y(x)$ sarà decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra.
Ma essendo $Y(x_0) = 0$, ciò implica $Y(x) > 0$ su tutto un intorno di x_0, eccettuato x_0.

IMPORTANTE "NOTA NELLA NOTA"

In realtà, quando noi diciamo, ad es., che
$Y'(x)$ è negativa, e perciò $Y(x)$ decrescente, "a sinistra di x_0", e
$Y'(x)$ è positiva, e perciò $Y(x)$ crescente, "a destra di x_0" intendiamo
"in un intorno sinistro di x_0 ESCLUSO x_0", "in un intorno destro di x_0 ESCLUSO x_0"
quindi la conclusione $Y(x) > Y(x_0) = 0$ richiederebbe, per la precisione,
un riferimento alla continuità della $Y(x)$ in x_0
(qui assicurata dal fatto che $Y(x)$ è derivabile in x_0) e una citazione del Lemma 1.
Ormai però noi padroneggiamo ben solidamente la problematica del Lemma 1,
per cui possiamo permetterci esposizioni più sintetiche, che lascino sottintesa qualche puntualizzazione,
se questo può andare a vantaggio dell'efficacia espositiva.
D'altronde così abbiamo già fatto nel corso della dimostrazione della Seconda Parte del Teorema 7.
E in questo modo ci prenderemo la licenza di fare anche in seguito.