2.11 RICERCA DEI FLESSI A TANGENTE OBLIQUA O VERTICALE COL METODO DELLO STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

❑ **Teorema 9**

Se risulta $f''(x_0)=0$
e se, nel passaggio dalla sinistra alla destra del punto x_0, la $f''(x)$ cambia di segno,
allora la funzione ha un flesso in x_0:

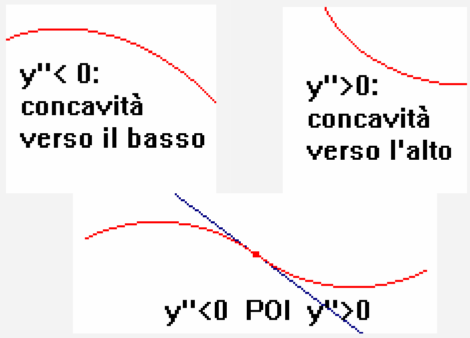
- flesso **ascendente**, se la derivata seconda f'' è **negativa a sinistra** di x_0 e **positiva a destra**;
- flesso **discendente**, se la derivata seconda f'' è **positiva a sinistra** di x_0 e **negativa a destra**.

Giustificazione con l'intuizione geometrica del teorema 9.

♥ In effetti, se, nell'attraversare l'ascissa x_0, la y'' cambia di segno, allora la y cambierà di concavità; è perciò intuitivo che si abbia un flesso.
Basta pensare che

- $y''>0$ **implica concavità rivolta verso l'alto**
- $y''<0$ **implica concavità rivolta verso il basso**,

per convincersi della validità del teorema.



Figg. 18a, 18b, 18c

Tuttavia, questo ragionamento non costituisce una dimostrazione rigorosa dell'enunciato.
Infatti, quando si dice che f ha, ad esempio, la concavità rivolta verso l'alto (o verso il basso) in un punto di ascissa *x* diversa da x_0, con ciò si afferma che il grafico della f sta, nell'intorno di *x*, al di sopra (o al di sotto) della tangente nel punto $(x,\ f(x))$,
mentre affermare che si ha un flesso in x_0 significa dire che la funzione attraversa, in x_0, la tangente nel punto $(x_0,\ f(x_0))$.
Insomma, la tesi del teorema si riferisce alla posizione della curva rispetto alla retta tangente nel punto di ascissa x_0,
mentre l'ipotesi si riferisce alla posizione della curva rispetto alle diverse tangenti nei diversi punti di ascissa *x* prossima a x_0.
Di conseguenza, il passaggio dall'ipotesi alla tesi non è così banale come potrebbe sembrare a prima vista!
Dimostriamo, dunque, il teorema.

Dimostrazione

Per ipotesi, la $f''(x)$ cambia di segno nell'attraversamento dell'ascissa x_0; supponiamo ad esempio, per meglio fissare le idee, che $f''(x)$ sia negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro di x_0 (la dimostrazione sarebbe poi perfettamente analoga se andassimo a prendere il caso opposto).

Consideriamo la medesima "funzione differenza" introdotta nella dimostrazione del precedente Teorema 8:

$$Y(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right].$$

Questa $Y(x)$ è la differenza fra l'ordinata del punto della curva che ha ascissa *x*, e l'ordinata del punto di ascissa x sulla retta tangente in $(x_0,\ f(x_0))$. Dunque, avremo:

$$Y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \quad \textit{da cui} \quad Y(x_0)=0;$$
$$Y'(x)=f'(x)-f'(x_0) \quad \textit{da cui} \quad Y'(x_0)=0;$$
$$Y''(x)=f''(x) \quad \textit{da cui} \quad Y''(x_0)=f''(x_0)=0.$$

Essendo $Y''(x)=f''(x)$, la $Y''(x)$ sarà negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro;
pertanto $Y'(x)$ sarà decrescente in un intorno sinistro di x_0 e crescente in un intorno destro;
e poiché $Y'(x_0)=0$, $Y'(x)$ sarà allora positiva sia in un intorno sinistro di x_0 che in un intorno destro.
Ma allora $Y(x)$ sarà crescente sia in un intorno sinistro di x_0 che in un intorno destro;
e poiché $Y(x_0)=0$, $Y(x)$ sarà negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro.
Ricordando a questo punto che $Y(x)$ è la differenza fra l'ordinata sulla curva e l'ordinata sulla tangente in x_0, ciò dimostra che x_0 è punto di flesso ascendente per la funzione f.

Si può dimostrare (ma noi ometteremo questa dimostrazione)
che il teorema 9 vale anche sotto ipotesi meno restrittive:
non è necessario che si verifichi la condizione $f''(x_0)=0$ (anzi, la f'' potrebbe pure non esistere in x_0) …

- **Teorema 9'**

  Purché f'' cambi di segno nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0,
  e purché la curva ammetta retta tangente, eventualmente anche verticale, nel punto $(x_0,\ f(x_0))$,
  indipendentemente dall'esistenza o dal valore della f'' nel punto x_0,
  x_0 sarà punto di flesso per la funzione f.

Osservazioni

In considerazione del Teorema 9,
e visto che negli esercizi la situazione più frequente
è di trovarsi di fronte a funzioni "tranquille",
nel senso che sono dotate di derivata prima e derivata seconda continue nel dominio della funzione,
si dice spesso che *i punti di flesso vanno ricercati fra le soluzioni dell'equazione* $y''=0$ ...
questa affermazione, però, è un'indicazione di carattere generale, ma non è completamente vera.
Infatti, oltre alle ascisse di flesso così trovate, potrebbero esserci anche altre ascisse di flesso:

- **le ascisse alle quali abbiamo accennato presentando l'enunciato del teorema 9'**,
  ossia le ascisse attraversando le quali la y'' cambia di segno senza annullarsi
  (purché però esista la retta tangente nel punto considerato,
  ossia si possa parlare della $y'(x_0)$, finita o infinita che sia):
  - ✓ è questo il caso, ad esempio, della ben nota funzione $y=\sqrt[3]{x}$,
  - ✓ oppure della $y=x\cdot\sqrt[3]{x^2}+x=x^{5/3}+x$ (vedi figura 19a),
    interessante per avere derivata prima finita ma derivata seconda infinita nell'origine;
- **altre ascisse di flesso per le quali non sono verificate né le ipotesi del Teorema 9, né quelle del 9'**;
  sebbene, per la verità, per rintracciare casi del genere sia necessaria una certa fantasia
  (le figure 19b, 19c mostrano due situazioni di questo tipo).
  Infatti, i teoremi 9 e 9' esprimono condizioni sufficienti, ma non necessarie per la presenza di un flesso.

Allora, **in definitiva, riguardo alla ricerca dei flessi non orizzontali, potremo dare il seguente metodo**:

a) **Risolvere innanzitutto l'equazione $y''=0$**.
Fra le ascisse che si troveranno risolvendo tale equazione,
saranno di flesso soltanto quelle attraversando le quali la y'' cambia di segno (= la y cambia concavità);
si studierà perciò **il segno della y'' mediante la disequazione $y''>0$**
e da tale studio si trarranno le conclusioni opportune

b) **Andare successivamente a vedere se,**
oltre ai punti di flesso precedentemente trovati, ne esistano altri.
Quindi:
- riprendere lo studio del segno della y''
  per vedere se ci sono ascisse attraversando le quali la y'' cambia di segno senza annullarsi
  (controllare però che in corrispondenza di tali ascisse esista o sia infinita la y');
- valutare se esistano (caso ben raro) altre ascisse di flesso,
  per le quali non siano verificate né le ipotesi del teorema 9, né quelle del 9'.

Infine, possiamo osservare che la ricerca dei flessi a tangente obliqua o verticale
con lo studio del segno della derivata seconda viene di solito effettuata, in uno studio di funzione,
dopo aver determinato **i flessi a tangente orizzontale**;
è chiaro che questi ultimi **verranno così ritrovati una seconda volta**
(e ciò potrà allora costituire una verifica di una parte del lavoro già svolto).

Figura 19a:

$$y = x \cdot \sqrt[3]{x^2} + x = x^{5/3} + x$$

y'' cambia di segno, nell'attraversamento dell'ascissa 0,
ma $y''(0)$ non esiste (va all'infinito).
Interessante constatare che invece esiste finita $y'(0)$.
Non valgono le ipotesi del Teorema 9,
in compenso sono verificate quelle del Teorema 9 '.

La funzione ha in O(0,0) un punto di flesso.

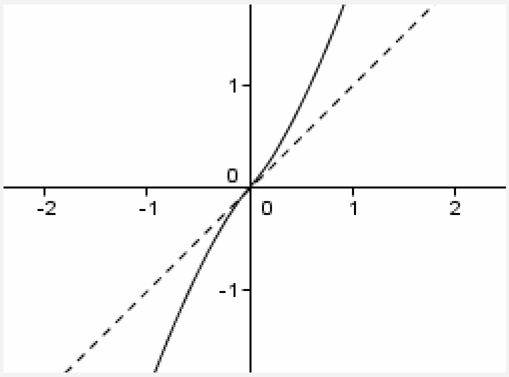


fig. 19a

Figura 19b:

qui si ha un flesso senza che siano verificate, nel punto in questione,
né le ipotesi del Teorema 9, né quelle del Teorema 9'.

In effetti, la y'' cambia di segno infinite volte
in ogni intorno sinistro e in ogni intorno destro dell'ascissa di flesso,
quindi non si può dire che si abbia
"un cambiamento di segno della derivata seconda
nell'attraversamento dell'ascissa"

Osserviamo ancora che
il grafico della funzione attraversa, nell'origine, la retta tangente in O
(di equazione $y = 0$),
ma in qualsiasi intorno dell'ascissa 0,
tale retta viene toccata infinite volte dalla curva.
Siamo in presenza, potremmo dire, di un "flesso improprio" nell'origine.

Per inciso, la determinazione di $g'(x)$, $g'(0)$, $g''(x)$, $g''(0)$
costituisce, per questa particolare funzione g,
un esercizio estremamente istruttivo.
Ci vuoi provare?

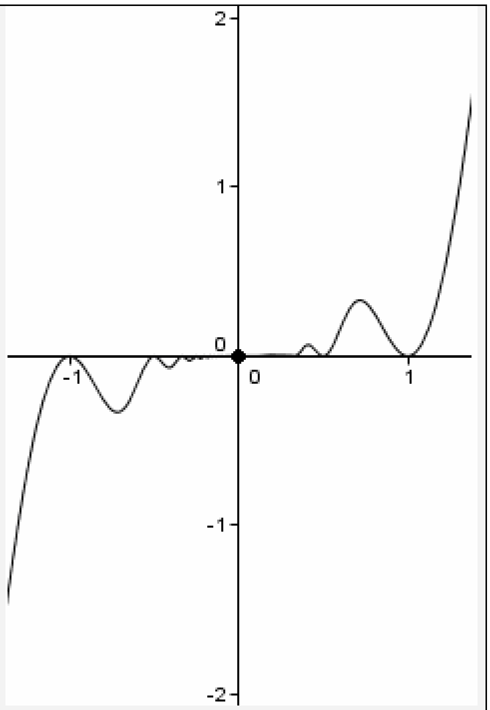


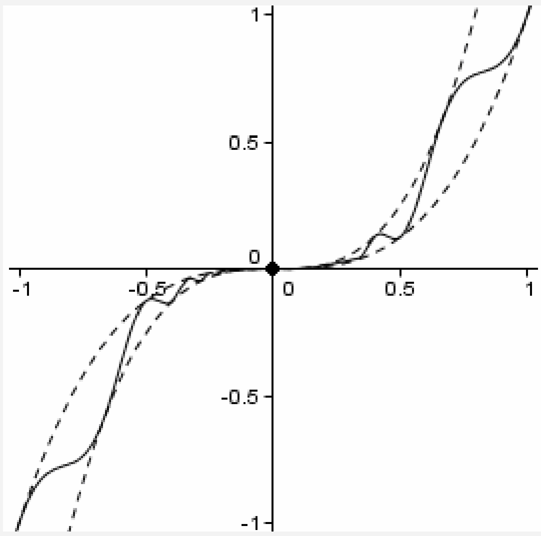
fig. 19b

$$g(x) = \begin{cases} x^3\, sen^2 \dfrac{\pi}{x} & per\ x \neq 0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$

Figura 19c:

(le due funzioni che "bordano" la $h(x)$
sono $y = x^3$ e $y = 2x^3$)

Il comportamento di questa funzione $h(x)$
richiama quello della funzione precedente;
qui però la retta tangente nell'origine
(che è ancora la $y = 0$)
NON viene toccata dalla curva,
eccetto, appunto, nell'origine
dove viene "attraversata".
Il flesso non è più, come nel caso precedente,
"improprio".
Ma è pur sempre un flesso "anomalo"
per il fatto che la y''
cambia di segno infinite volte in qualsiasi intorno
dell'ascissa di flesso,
quindi non si può affermare che cambi di segno
nell'attraversamento dell'ascissa di flesso.



$$h(x) = \begin{cases} x^3 sen^2 \dfrac{\pi}{x} + x^3 & per\ x \neq 0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$

Fig. 19c