2.12 RICERCA DEI FLESSI (A TANGENTE NON VERTICALE) COL METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

❑ **Teorema 10**

Sia x_0 un punto in cui $f''(x_0)=0$;
si calcolino le derivate successive $f'''(x_0),\ f^{IV}(x_0),\ f^{V}(x_0)\ldots,$
fino a trovare la prima di queste derivate che sia diversa da 0: $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.
A questo punto:

♪ **se n è dispari**, allora x_0 **è un punto di flesso**, e precisamente:
a) di flesso *ascendente* se $f^{(n)}(x_0)>0$
b) di flesso *discendente* se $f^{(n)}(x_0)<0$

♫ **se n è pari**, allora x_0 **non è un punto di flesso**, bensì:
c) è un punto in cui f volge la concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0)>0$
d) è un punto in cui f volge la concavità *verso il basso* se $f^{(n)}(x_0)<0$

Dimostrazione

Si effettua come per il teorema 7, deducendo, da ciò che si sa sulla derivata di ordine più alto, informazioni sulla derivata di ordine immediatamente inferiore, e così via.
Nella dim. del teorema 7 occorreva giungere a deduzioni riguardanti la derivata prima, per poi trarre da queste la conclusione riguardante la funzione; qui invece "salteremo" direttamente dalla derivata seconda alla funzione, perché ci interesseranno questioni di concavità e convessità, e non più di andamento crescente o decrescente.
Ci limiteremo a ragionare *su due casi particolari*, dopodiché sarà chiara la possibilità di procedere in modo analogo per qualsiasi altro caso particolare, e, volendo, di formulare una dimostrazione di carattere generale.

Traduci in disegno tu stesso le varie fasi della dimostrazione!

Supponiamo $f''(x_0)=f'''(x_0)=f^{IV}(x_0)=0$, e invece $f^{V}(x_0)<0$.
Il fatto che sia $f^{V}(x_0)<0$ ci dice che la $f^{IV}(x)$ è decrescente in x_0.
Ma $f^{IV}(x_0)=0$.
Quindi $f^{IV}(x)$ è positiva a sinistra di x_0, negativa a destra di x_0.
Quindi $f'''(x)$ è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra di x_0.
Ma $f'''(x_0)=0$. Quindi $f'''(x)$ è negativa sia a sinistra che a destra di x_0.
Quindi $f''(x)$ è decrescente sia a sinistra che a destra di x_0.
Ma $f''(x_0)=0$. Quindi $f''(x)$ è positiva a sinistra di x_0, negativa a destra di x_0.
Pertanto la f cambia concavità nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa x_0: x_0 è ascissa di flesso (per il precedente teorema 9).
Si tratta di un flesso discendente perché la $f''(x)$ passa da positiva a negativa, quindi la f da convessa diventa concava. La tesi è dimostrata!

Ora vediamo la dimostrazione nel caso in cui $f''(x_0)=f'''(x_0)=0$, e $f^{IV}(x_0)>0$.
Essendo $f^{IV}(x_0)>0$ ne deduciamo che la $f'''(x)$ è crescente in x_0.
Ma $f'''(x_0)=0$. Quindi $f'''(x)$ è negativa a sinistra di x_0, positiva a destra di x_0.
Quindi $f''(x)$ è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0.
Ma $f''(x_0)=0$. Quindi $f''(x)$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0.
Pertanto la f ha la concavità rivolta verso l'alto sia a sinistra che a destra di x_0.
E' intuitivo, e si potrebbe d'altronde dimostrare utilizzando la "funzione differenza" $Y(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]$ in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 9, che la f ha quindi la concavità rivolta verso l'alto in x_0. La tesi è dimostrata.

OSSERVAZIONE

Il teorema appena stabilito fornisce uno strumento in più per la determinazione dei flessi di una funzione.
Si tratta dunque di risolvere l'equazione $y''=0$, per determinare le ascisse in cui si annulla la derivata seconda.
In corrispondenza di ciascuna di queste ascisse, si calcoleranno poi le derivate successive della funzione, fino a trovare la prima derivata non nulla. Nel caso in cui tale derivata sia di ordine dispari... ecc. ecc.
Così facendo, si potranno trovare alcuni flessi, ma può darsi che ce ne siano pure altri: magari a tangente verticale (il presente metodo, richiedendo l'esistenza della derivata seconda in x_0, presuppone che la funzione ammetta derivata prima in x_0 – più precisamente, su tutto un intorno di x_0 – quindi restano esclusi gli eventuali punti a retta tangente verticale); o comunque tali che la y'' cambi di segno senza annullarsi; oppure ancora "anomali". Pertanto si proseguirà come al punto b) delle Osservazioni al Teorema 9'.